Aerodynamik

von

Richard Fuchs und Ludwig Hopf

Handbuch der Flugzeugkunde

Unter Mitwirkung des

Reichsamtes für Luft- und Kraftfahrwesen

herausgegeben

von

F. Wagenführ

Oberstleutnant a. D.

vormals Major und Kommandeur der Flugzeugmeisterei

Band II

Aerodynamik

BERLIN W 62

Richard Carl Schmidt & Co.

1922

AERODYNAMIK

von

Prof. Dr. Richard Fuchs und Prof. Dr. Ludwig Hopf
in Berlin-Halensee in Aachen

Mit 285 Abbildungen im Text

BERLIN W 62
Richard Carl Schmidt & Co.
1922

Vorwort der Verfasser.

Der vorliegende Band behandelt denjenigen Teil der Flugzeugkunde, der sich bei seiner Entwicklung am wenigsten an Bekanntes anlehnen konnte und die wenigsten Grundlagen theoretischer oder experimenteller Natur in der Wissenschaft der Vorflugzeit fand. Wir hielten es daher für richtig, nicht nur die besonderen Erfahrungen, welche wir als Leiter der aerodynamischen Abteilung bei der Flugzeugmeisterei sammeln konnten, hier zu verwerten, sondern den gesamten Stoff der aerodynamischen Wissenschaft zu einem Lehrbuch zu verarbeiten. Auch im Rahmen dieses Handbuches schien es uns angemessen, die Form des Lehrbuches zu wählen, nur war durch die Stellung unseres Bandes im Handbuch eine gewisse Einschränkung des Stoffes geboten. So verzichteten wir auf eine ausführliche Behandlung der Luftschraube, obwohl diese ja durchaus als aerodynamisches Problem angesehen werden muß, da ein besonderer Band darüber vorgesehen ist; ferner schieden alle aerodynamischen Fragen des Luftschiffes, des Segelfluges und dergl. aus, die ganz außerhalb des Gesichtskreises der Flugzeugmeisterei lagen. Dagegen hielten wir es für wichtig, die theoretischen Grundlagen des Fluges ausführlich darzustellen, da deren praktische Bedeutung nach den Erfolgen der Prandtlschen Tragflügeltheorie außer allem Zweifel steht und eine immer innigere Vereinigung dieser theoretisch-physikalischen Überlegungen mit den grundlegenden Ideen des Flugzeugentwurfs von der Zukunft durchaus erwartet werden muß.

Es war unser Bestreben, daß jeder, der praktisch oder theoretisch an der Aerodynamik des Flugzeuges weiterarbeiten will, in unserem Buche die Grundlagen finden kann, auf denen er voraussichtlich wird aufbauen müssen. Aber das, was verschiedene Leser bei der Aerodynamik suchen, ist nicht immer dasselbe; der Ingenieur, der sich über die aerodynamischen Eigenschaften seines Flugzeuges Rechenschaft geben will, braucht nicht mit Anspannung seiner ganzen mathematischen Fähigkeiten in die physikalischen Grundlagen der Luftkräfte einzudringen; andererseits braucht der Wissenschaftler, der physikalische Klarheit erstrebt, nicht die einzelnen numerischen Werte und die praktischen Rechenvorschriften für Flugzeugerbauer zu kennen. Daher wendet sich unser Buch in seinen verschiedenen Teilen an ein verschiedenes Leserpublikum, und es war geboten, die Voraussetzungen, welche in den verschiedenen Teilen an die physikalischen und mathematischen Kenntnisse der Leser gestellt werden, ganz verschieden zu bemessen. Dadurch geht dem Buche vielleicht eine gewisse Gleichartigkeit der Darstellung durch alle seine Teile hindurch verloren, aber dafür ist das praktische Ziel, jeden Teil in der Schreibweise möglichst seinem voraussichtlichen Leserkreis anzupassen, besser erreicht. Im wesentlichen sind es drei Ideenkreise, welche in diesem Buche behandelt sind:

1. die physikalische Theorie der Luftkräfte, welche in erster Linie für den Wissenschaftler interessant sind (I, 1 bis 5); 2. die rechnerischen Grundlagen für das Gleichgewicht des Flugzeuges, welche zur Berechnung jedes einzelnen Flugzeugtyps herangezogen werden müssen (I, 6 und 7; II, 1 und 2); 3. die allgemeine Dynamik des Flugzeuges, welcher die Aufgabe zufällt, Richtlinien für die weitere Entwicklung des Flugzeuges zu geben — vielleicht in der Zukunft noch wesentlich stärker als in der Gegenwart (II, 3 und 4).

Eine andere, hoffentlich weniger fühlbare Ungleichmäßigkeit im Stil des Buches wird die notwendige Folge davon sein, daß es von zwei Verfassern mit nicht ganz gleicher Vorbildung stammt. Gemeinsame Arbeit liegt fast allen Teilen zugrunde; die Abfassung des ersten Teiles lag aber ganz in den Händen von R. Fuchs, die Abfassung der Einleitung und des zweiten Teiles ganz in den Händen von L. Hopf.

Schließlich sei an dieser Stelle besonders Herrn Studienrat W. Zabel gedankt, der in selbstloser Weise und mit größtem Eifer die Figuren des ersten Teiles zeichnete und uns beim Tabellenrechnen bereitwilligst unterstützte.

Berlin und Aachen, Oktober 1921.

R. FUCHS. L. HOPF.

Inhaltsverzeichnis.

ZWEITER TEIL:

Die Bewegung des Flugzeugs.

Einleitung.

Quellen aerodynamischer Erkenntnis.

1. Probleme.

Kaum mehr als fünfzehn Jahre sind vergangen, seit zum erstenmal Menschen mit Motorkraft sich in die Luft zu heben und darin fortzubewegen vermochten; kürzer ist die Zeitspanne, in welcher das Flugzeug systematisch ausgebildet und vervollkommnet wurde. Die Not des Weltkriegs hat die Kräfte aller Kulturvölker gerade auf flugtechnischem Gebiet derart hochgepeitscht, daß die Leistungen in kurzer Zeit auf das höchste gestiegen sind und heute kaum mehr eine Aufgabe, welche der Flugtechnik gestellt werden könnte, unerreichbar scheint. Dadurch ist das Flugzeug verhältnismäßig rasch aus der Kindheitsepoche jedes großen technischen Fortschritts, in welcher der kühne Griff des genialen Erfinders den Ausschlag für das Gelingen gibt, herausgewachsen; die wissenschaftliche Durchdringung der flugtechnischen Probleme ist zum notwendigen Erfordernis geworden.

Auch die Flugwissenschaft hat sich in derselben Zeit, wenn auch nicht ganz im selben Tempo wie die Technik, entwickelt; auch sie hat ihre Kindheit, in welcher sie der Praxis noch wenig nützen konnte, einigermaßen hinter sich. Gerade die einsamen Pfadfinder der Flugtechnik haben schon die Wichtigkeit wissenschaftlicher Erfassung erkannt; so rühren von Pénaud die ersten Rechnungen über das Kräftespiel am Flugzeug samt den einfachsten Stabilitätsbetrachtungen her; so hat Lilienthal die ersten Modellversuche angestellt.

Als die Entwicklung des leichten Motors das Fliegen mit Motorkraft ermöglichte, war die Hauptschwierigkeit, welche den Menschen von der Eroberung der Luft zurückhielt, beseitigt. Man war wohl allgemein der Ansicht, welche Siemens einmal aussprach, daß mit dem leichten Motor jeder geschickte Mechaniker ein Flugzeug herstellen könne, und man hatte damit ja auch bis zu einem gewissen Grade recht. Diese Auffassung hatte aber andererseits die Folge, daß damals die experimentellen und theoretischen Kenntnisse über die Luftkräfte, über die Bewegungen und über die Stabilitätsverhältnisse des Flugzeugs sehr gering waren. Der Anreiz für den Experimentalphysiker zur großzügigen Untersuchung fehlte, trotzdem man in vielen praktischen Fragen die gründliche Kenntnis der Luftkräfte schwer vermißte; auch die theoretische Physik versprach sich von weitergehenden Untersuchungen keine Vertiefung ihrer Anschauungen.

So fand sich die Wissenschaft vor etwa fünfzehn Jahren vor dringlichen Problemen, welche noch nicht in Angriff genommen waren. Zunächst wußte man noch fast nichts von den Luftkräften; selbst den Widerstand einfach gestalteter Körper, wie Platten, Kugeln, Zylinder, galt es zu ermitteln. Dann waren die Auf-

triebskräfte zu untersuchen, die Kräfte, welche senkrecht zur Bewegungsrichtung flügelförmiger Körper wirken und durch welche der Flug erst möglich wird, ihre Abhängigkeit von der Anstellung gegen die Bewegungsrichtung, von der Geschwindigkeit, vom Umriß und der Profilgebung. Weiter mußten die Kräfte auf die einzelnen Konstruktionsteile, die im Flugzeug Verwendung finden, untersucht werden, und es entstand die wichtige Aufgabe, die Kräfte nicht nur auf die aus dem Ganzen gelösten Teile, sondern auch in der Verbindung des Ganzen kennen zu lernen, also die gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Teile. Wie wird z. B. die Tragkraft eines Flügels geändert, wenn er nicht alleinsteht, sondern im Doppel- oder Mehrdecker Verwendung findet? Wie werden die Kräfte auf Rumpf und Flosse durch die Luftschraube beeinflußt? und derlei Fragen mehr. Die Theorie, welche zur Erledigung dieser Probleme in weitgehendster Weise herangezogen werden mußte, war zu Beginn der aerodynamischen Untersuchungen noch vollkommen im Dunkel über das Wesen der Luftkräfte; sie rang noch mit dem Paradoxon der klassischen Hydrodynamik, wonach ein Körper, der in einer Flüssigkeit bewegt ist, keinen Widerstand haben sollte. Der Mechanismus des Widerstands wie des Auftriebs war unklar; die Strömungsverhältnisse im einzelnen wie im ganzen Flugzeug erforderten theoretische und experimentelle Untersuchungen. Neben diesen fundamentalen Problemen standen aber bald auch die Fragen der Belastung und Beanspruchung der einzelnen Flugzeugteile; ohne deren Klärung war eine statische Durchrechnung des Flugzeugs nicht möglich — eine der praktisch dringendsten Aufgaben.

Aber die Kenntnis der Kräfte allein genügt noch nicht zur wissenschaftlichen Beherrschung des Flugzeugs. Die Klarheit über die Art und Weise, wie diese Kräfte ins Spiel kommen, erfordert viel Forschungsarbeit. Zuerst müssen die Gesetze des stationären Flugs geklärt werden. In welcher Weise wirken die Luftkräfte mit dem Gewicht, dem Motor, der Schraube zusammen? Auf welche Teile des Flugzeugs ist entscheidender Wert zu legen, welche sind weniger wichtig, wenn es sich um bestimmt umrissene Aufgaben handelt? Wie muß z. B. ein Flugzeug gebaut sein, welches hoch steigen kann, wie dagegen ein Flugzeug, welches nur sehr schnell sein soll? Bei diesen Fragen kommen natürlich nicht nur aerodynamische Gesichtspunkte in Betracht; ein entscheidendes Wort hat dabei die Motorentechnik mitzusprechen; aber die Luftschraube und ihre Wirksamkeit stellen wieder ein rein aerodynamisches Problem dar, das in engem Zusammenhang mit der Lehre von den Luftkräften experimentell und theoretisch bearbeitet worden ist.

Rein aerodynamische Fragen von großer Wichtigkeit wirft der Ausgleich der am Flugzeug wirkenden Momente auf. Hier verlangt die Technik bestimmte Regeln über Lage und Größe der Flügel und der Flossen und Ruder. Die beste Lage des Schwerpunkts ist aufzuzeigen. Auch die Kräfte und Momente, welche bei Seitenbewegungen, Kurvenflug, Spiralflug usw. auftreten, verlangen Klärung.

Noch tiefer gehen die Fragen, die sich mit der Sicherheit des Flugs beschäftigen, die Stabilitätsprobleme. Nicht nur die Frage, wann ein Flugzeug stabil ist, hat Bedeutung; man muß vielmehr forschen, welches Maß von Stabilität erforderlich und wünschenswert ist, von welchen konstruktiven Größen die Sicherheit abhängt, welche Faktoren die Wendigkeit und Steuerbarkeit beeinflussen. Dieses

Problem verlangt in seiner ganzen Ausdehnung eine Diskussion der Bewegung des Flugzeugs im ganz allgemeinen, nicht gleichmäßigen Flug. Wie reagiert das Flugzeug auf eine äußere Störung, etwa eine Bö, in welcher Weise und mit welcher Schnelligkeit gehorcht es dem Steuer? Welche Flugzustände oder welche Flugzeugkonstruktionen sind gefährlich? usw.

An allen diesen Fragen arbeiten Technik und Wissenschaft, seitdem man fliegen kann; auf manche gibt der Praktiker kurzerhand eine Antwort durch den Erfolg, andere sind in mühsamer systematischer Arbeit der Klärung entgegengeführt worden; in manchen Gebieten stehen sich Praxis und Theorie noch fern und sprechen noch verschiedene Sprachen, in manchen konnten sie sich bereits die Hand reichen. In vielen Punkten steht die Frage noch ohne Antwort da; fast überall führt die Lösung eines Problems immer wieder auf ein neues, das Interesse erfordert. Die Darstellung einer Wissenschaft, die derart im Werden ist, kann natürlich nichts Abgeschlossenes sein; wir versuchen den Stand der Wissenschaft in Deutschland beim Abschluß des Weltkriegs darzustellen, um nach Möglichkeit die vielen Ansätze, die in der rasch vorwärtsdrängenden Zeit versucht wurden, als Grundlagen weiterer Entwicklung leicht zugänglich zu machen. Vielleicht — oder sagen wir lieber hoffentlich — ist vieles schon überholt, wenn das Buch im Druck vorliegt. Jetzt gilt es nicht nur, die gesicherten Grundlagen darzustellen, sondern gerade auch auf die offenen Fragen hinzuweisen, die vielen Probleme ins Licht zu stellen, die noch der Lösung harren, und Interesse für dieselben zu erwecken. Wir sehen darin die vornehmste Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

2. Theoretische Grundlagen der Modellversuche.

Um zu einer klaren Erkenntnis in den aerodynamischen Fragen vorzudringen, standen Versuche im großen, also am ausgeführten Flugzeug, von Anfang an nicht zur Verfügung. Die Schwierigkeiten und Gefahren derartiger Versuche sind so bedeutend, daß selbst heute in dieser Hinsicht noch wenig Nennenswertes geleistet ist. Mit theoretischen Hilfsmitteln allein ist natürlich an eine Klärung derartiger Probleme nicht zu denken; so sah man sich, seit es eine Flugwissenschaft gibt, auf Versuche an Modellen angewiesen, und bis heute sind die Modellversuche die wesentliche Grundlage aller aerodynamischen Rechnungen und Überlegungen. Die erste Grundfrage, über die wir uns Rechenschaft geben müssen, betrifft daher die Übertragung vom Modell auf die Wirklichkeit. Unter welchen Umständen und mit welcher Sicherheit läßt sich aus Erfahrungen an einem Objekt auf ein anderes schließen? Wie von kleinen Abmessungen auf große? Wie von kleinen Geschwindigkeiten auf große? Müssen die Versuche notwendig in der Luft angestellt werden, oder ist es etwa auch möglich, Beobachtungen im Wasser auf Luft zu übertragen?

Wenn man eine einzelne Beobachtung auf ein größeres Gebiet von physikalischen Erscheinungen übertragen will, so ist dazu bereits eine weitgehende theoretische Durchdringung der betreffenden Erscheinungsgruppe erforderlich. Stellen wir uns z. B. den Fall vor, es sei ein Gegenstand von einfachster Form, etwa ein Zylinder mit elliptischer Basis, in einem Luftstrom untersucht, es sei die darauf wirkende Luftkraft gemessen und, vielleicht mit Hilfe von Rauchfäden, das ganze

Bild der Strömung um den Zylinder festgehalten. Es sei etwa bei dem Versuch die Achse der Zylinderbasis senkrecht zum Luftstrom 1 cm, seine Höhe 25 cm, die Luftgeschwindigkeit 10 m/s gewesen, und die Messung habe eine Kraft von 12,5 g in der Richtung des Luftstroms ergeben. Diese Beobachtungen sollen nun zu Schlüssen über eine ebenso gestaltete Flugzeugstrebe verwendet werden; man kann nach der Kraft fragen, welche auf die wirkliche Strebe wirkt, oder sich auch — etwa wegen der Anbringung von Meßinstrumenten — für den Verlauf der Luftbewegung in der Umgebung der Strebe interessieren; aber die wirkliche Strebe ist zehnmal so groß als die untersuchte, die Flugzeuggeschwindigkeit viermal so groß als die des Luftstroms, und außerdem will man das Verhalten nicht am Boden kennen, sondern in 6 km Höhe, wo die Luftdichte nur etwa die Hälfte des im Luftstrom vorhandenen Wertes hat, wo der Luftdruck erheblich niedriger, die Temperatur, der elektrische Zustand der Luft usw. ganz andere sind. Außerdem sei die Modellstrebe aus Holz gewesen, die wirkliche Strebe ein Stahlrohr. Da kommt es in erster Linie darauf an zu wissen, welche der erwähnten Umstände eigentlich maßgebend sind für die Kräfte und den Verlauf der Strömung, welche von untergeordneter Bedeutung und welche überhaupt ohne Einfluß sind. Darüber kann im allgemeinen natürlich nur die Erfahrung entscheiden, aber für manche Entscheidungen genügt doch auch das physikalische Gefühl. Es bedarf ja keines Experimentes, um festzustellen, daß der elektrische Zustand der Luft keine Bedeutung für die Strömung haben kann, auch daß die Temperatur keine unmittelbare Wirkung darauf ausübt. Dagegen müssen wir doch erst aus der Erfahrung entnehmen, daß auch das Material der Strebe ohne nennenswerten Einfluß ist, wenn die Oberfläche einigermaßen dieselbe Glätte zeigt.

So sehen wir schließlich ein, daß es für unser Problem nur auf die rein mechanischen Eigenschaften der Luft, auf die Geschwindigkeit und auf die Größe der Strebe ankommt. Aber das genügt uns noch nicht; wir wollen noch wissen, ob die Kräfte etwa mit der Geschwindigkeit proportional oder stärker anwachsen u. dgl. Darüber nun können rein theoretische Überlegungen Aufschluß geben, die sogenannten Ähnlichkeits- oder Dimensionsbetrachtungen: Wir erhielten in unserem Beispiel eine Kraft von 12,5 g. Offenbar hat die Zahl 12,5 keine allgemeine Bedeutung; sie hängt wesentlich davon ab, was als Einheit genommen ist, und wird ganz anders, wenn das Ergebnis statt in Gramm etwa in englischen Pfund ausgedrückt wird. Dasselbe gilt von allen anderen Zahlenangaben, die in unserem Beispiel Verwendung fanden; die Kraft, die Geschwindigkeit, die Längen sind alles benannte Größen, die nur in einem bestimmten, konventionell festgesetzten Maßsystem durch eine Zahl ausgedrückt werden können. Offenbar würde das Ergebnis in einer viel übersichtlicheren Form erscheinen und seine Tragweite besser zu überblicken sein, wenn die Zahlenangabe in unbenannter Form erfolgen könnte, wenn also der Zahlwert sich nicht auf die Kraft beziehen würde, sondern auf eine vom Maßsystem unabhängige oder, wie man sagt, dimensionslose Größe. Solch eine Form läßt sich immer finden; denn auf jeden Fall ist das Meßergebnis die Folge eines allgemeinen, uns noch unbekannten Gesetzes, wonach die Kraft gleich ist einer Funktion der Luftgeschwindigkeit, der Körperabmessung und der mechanischen Eigenschaften der Luft. Diese Funktion muß nun selbstverständlich auch die Dimension einer

Kraft haben, d. h. sie muß sich auch in Gramm oder Pfund, nicht aber etwa in Meter oder Sekunden oder sonstwie messen lassen. Nun wird allgemein im technischen Maßsystem — das wir durchgehends verwenden wollen — ein Kraft in Kilogramm, eine Länge in Metern, eine Zeitspanne in Sekunden gemessen; eine Geschwindigkeit hat, wie man sich ausdrückt, die Dimension m Die Kraft, welche auf einen Körper im Luftstrom ausgeübt wird, kann nun unmöglich nur von der Geschwindigkeit und der Abmessung des Körpers abhängen; denn wie wir auch Geschwindigkeit und Länge in den Dimensionen zusammensetzen mögen, wir erhalten immer eine Dimension von der Form $[\mathrm{m}^{\alpha}\,\mathrm{s}^{\beta}]$, niemals die Dimension [kg]. Von den mechanischen Eigenschaften der Luft ist für unseren Fall von der größten Bedeutung die Dichte; denn offenbar muß die Kraft doch verschieden sein, ob der Körper sich in Wasser oder in Luft bewegt, und im fast luftleeren Raum von außerordentlich geringer Dichte muß die Kraft sehr klein werden. Die Luftdichte $\rho = \frac{\gamma}{g}$, dem spezifischen Gewicht der Luft geteilt durch die Schwerebeschleunigung, hat die Dimension

$$\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} : \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4}\right].$$

Luftdichte ρ, Geschwindigkeit v und Längenabmessung l können aber in einer und nur einer Weise so zusammentreten, daß eine Kraft herauskommt:

$$\rho\, l^2\, v^2 = \left[\frac{\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right] = [\mathrm{kg}].$$

Das gesuchte Gesetz wird daher die Form haben: Kraft $K = \zeta\, \rho\, l^2\, v^2$, wobei ζ eine reine Zahl, eine dimensionslose Größe ist. Dabei bleibt allerdings noch willkürlich, welche Längenabmessung des Körpers wir einführen wollen; da es sich aber nur darum handelt, geometrisch ähnliche Körper zu vergleichen, wir uns also von vornherein darüber klar sind, daß ζ von der Gestalt des Körpers abhängen kann, ist es auch ganz gleichgültig, welche Länge wir wählen; man pflegt bei Widerstandsproblemen die dem Luftstrom gebotene Fläche F auszuzeichnen (in unserem Beispiel $F = 1 \cdot 25\ \mathrm{cm}^2$) und $l^2 = F$ zu setzen, so daß unser Gesetz lautet:

$$K = \zeta\, \rho\, F\, v^2 \quad \text{. . . . .} \quad (1)$$

Da die Luftdichte am Erdboden $\rho = \frac{1}{8}\frac{\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4}$ beträgt, folgt aus obigen Zahlenangaben $\zeta = 0{,}40$ und dieser Wert wäre genau so herausgekommen, wenn wir konsequent ein anderes Maßsystem als das unsere, etwa das englische, benutzt hätten.

In dieser Form ist das Meßergebnis schon viel klarer und übersichtlicher gegeben als in der obigen; aber natürlich haben wir damit noch nicht ein allgemein gültiges Gesetz gewonnen; denn wir hatten ja willkürlich angenommen, daß die Luftdichte von allen mechanischen Eigenschaften der Luft die ausschlaggebende sein sollte. Wir müssen uns jetzt noch darüber klar werden, von welchen Größen ζ abhängen

kann. ζ ist eine reine Zahl, kann daher nur wieder von Zahlen abhängig sein. Die absolute Größe des Körpers, eine Länge, kann nicht von Einfluß auf ζ sein, dagegen wohl das Verhältnis zweier Längen, also in unserem Beispiel der Quotient Höhe/Basisachse; solche Verhältniszahlen bestimmen die Gestalt des Körpers, ähnliche Verhältniszahlen oder Winkel seine Lage zum Luftstrom. Von der Geschwindigkeit kann ζ nur dann abhängen, wenn sie mit anderen dimensionierten Größen so zusammentritt, daß eine dimensionslose Größe herauskommt; ein Verhältnis zweier voneinander unabhängiger Geschwindigkeiten tritt in den Versuchsbedingungen nicht auf.

Wenn nun keine andere mechanische Eigenschaft der Luft als nur ihre Dichte in Betracht käme, so könnte ζ von nichts weiter abhängen als von der Gestalt und Orientierung des Körpers; denn aus den drei einzigen Größen, welche vorkommen können: Dichte, Geschwindigkeit und Längenabmessung, kann man keinen dimensionslosen Ausdruck bilden; in diesem Fall würde unsere Formel (1) ein sehr allgemeingültiges Gesetz aussprechen; die Abhängigkeit der Kraft von der Geschwin-

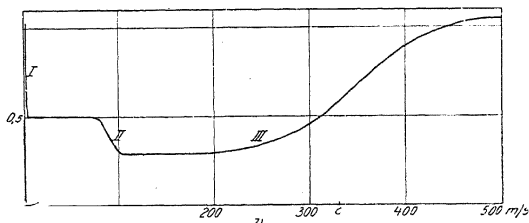



Abb. 1. Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

digkeit könnte dann gar keine andere sein als die quadratische, die Abhängigkeit von der Fläche F und von der Dichte ρ müßte linear sein. Auch das Stromlinienbild, das man an einem Modell oder an einem beliebigen Objekt in einer beliebig dichten Flüssigkeit beobachtet, wäre ohne weiteres auf alle Fälle übertragbar; denn was man bei einer derartigen Beobachtung feststellt, sind auch nur reine Zahlen, dimensionslose Größen, wie Winkel, Richtungen der Strömung, das Verhältnis lokaler Geschwindigkeit zur Luftstromgeschwindigkeit u. dgl. Auch diese Zahlen könnten dann nur von der Gestalt und Orientierung des Körpers abhängen.

Diesen Gedankengang kann man aber auch umkehren und schließen, daß, wenn man etwa quadratische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und lineare Abhängigkeit von der Fläche beobachtet, dann auch keine andere Eigenschaft der Luft als ihre Dichte für unser Problem von Bedeutung sein kann. Nun lehrt die Erfahrung, daß dies zwar sehr vielfach, aber doch nicht durchweg der Fall ist; wird z. B. der Widerstand unserers Versuchskörpers in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gemessen, so ergibt sich ein Bild, das Abb. 1 qualitativ darstellt. ζ ergibt sich tatsächlich in großen Bereichen als gut konstant; aber es finden sich doch dreierlei Abweichungen von der Konstanz:

I. bei kleinen Geschwindigkeiten wird ζ erheblich größer; es verhält sich wie $\frac{1}{v}$;

II. in einem kleinen Bereich geht es einmal von einem höheren zu einem niederen Wert über;

III. bei Geschwindigkeiten, die mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar werden oder dieselbe noch überschreiten, findet sich ein komplizierter Verlauf.

In diesen drei Fällen müssen also andere Eigenschaften als die Dichte der Luft von ausschlaggebender Bedeutung sein, und es ist theoretisch aufzuklären, welche Eigenschaften dies sind, welche Naturkonstanten dadurch in die Betrachtung eingehen, und von welchen dimensionslosen Größen infolgedessen ζ noch abhängen kann. Wir werden auf diese Weise aus den Messungen über Abhängigkeit der Kraft von der Geschwindigkeit gewisse bindende Schlüsse über die Abhängigkeit der Kraft und des Stromlinienverlaufs von den Abmessungen und von den Lufteigenschaften ziehen können.

Verhältnismäßig einfach läßt sich die Abweichung bei großer Geschwindigkeit erledigen; sie tritt bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit in Erscheinung und muß daher mit der Schallgeschwindigkeit auch in physikalischer Beziehung stehen. Die Schallgeschwindigkeit ist aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Kompressionswellen, die Geschwindigkeit, mit welcher eine Zusammendrückung der Luft an irgendeiner Stelle sich ausgleicht und an die benachbarten Stellen weitergegeben wird. Je leichter zusammendrückbar eine Flüssigkeit ist, desto niedriger liegt die Schallgeschwindigkeit. Die Eigenschaft der Luft, welche bei dieser beobachteten Abweichung von unserem Ansatz (1) ins Spiel tritt, ist die Zusammendrückbarkeit oder Kompressibilität. Durch sie geht als weitere Naturkonstante in unsere Betrachtung die Schallgeschwindigkeit ein, die mit c bezeichnet werde. Diese kann nur in einer Weise mit den oben betrachteten Größen zu einer dimensionslosen Zahl zusammentreten, nämlich in der Form $\frac{v}{c}$; also unser Koeffizient ζ kann noch vom Verhältnis der Luftstrom- zur Schallgeschwindigkeit abhängen. Durch diese Zahl wird ζ nicht weiter abhängig von der Dichte und von den Längenabmessungen; es bleibt also gleichgültig, ob ein Modell oder ein Flugzeug untersucht wird.

Man trifft nun vielfach — allerdings meist bei „Erfindern" — die Auffassung, daß beim Fluge die Luft unter dem Flügel zusammengepreßt werde und der dadurch entstehende Überdruck den Flügel in die Höhe hebe. Aus unseren Betrachtungen, die sich auf den in Abb. 1 niedergelegten Versuch stützen, folgt, daß diese Auffassung nicht richtig sein kann. Nur bei solchen Geschwindigkeiten kann die Kompression der Luft von Einfluß auf die Kräfte und den Strömungsverlauf sein, die mit der Schallgeschwindigkeit (332 m/s) vergleichbar sind oder sie übersteigen. Also in der Ballistik, wo Geschoßgeschwindigkeiten von etwa 1000 m/s vorkommen und in der Theorie der Dampfturbinen, wo man Dampfstrahlen von 600 m/s Geschwindigkeit kennt, ist die Kompression von wesentlicher Bedeutung, nicht so in der Theorie des Fluges. Die höchsten bisher erreichten Fluggeschwindigkeiten gehen selbst

im Sturzflug kaum über 100 m/s hinaus, das Verhältnis $\frac{v}{c}$ bleibt also stets unter einem Drittel. Der Einfluß auf die Luftkräfte ist aber noch von kleinerer Größenordnung, er geht nämlich proportional $\left(\frac{v}{c}\right)^2$; die Kleinheit des Einflusses sehen wir an unserer Abb. 1. Nur bei der Bewegung der Propellerspitzen könnten Werte bis zur Schallgeschwindigkeit in Betracht kommen; doch muß man in der Praxis solche Werte unbedingt vermeiden, weil dabei kein Schraubenzug mehr zu erzielen ist.

Wir werden also bei all unseren Betrachtungen von der Zusammendrückbarkeit der Luft absehen und die Luft nicht als ein Gas, sondern als eine Flüssigkeit betrachten; wir sind dadurch in den Stand gesetzt, auch Ergebnisse von Experimenten, die in Wasser angestellt sind, auf unser Problem zu übertragen; dies ist von großer Bedeutung deshalb, weil der Verlauf einer Strömung sich weit besser in Wasser verfolgen und photographisch festhalten läßt als in Luft.

Tieferliegende Schwierigkeiten, die wir nicht so leicht aus unserem Wege entfernen können, bringen die anderen ausgezeichneten Stellen der Kurve in Abb. 1. Daß sie nicht auch mit der Zusammendrückbarkeit der Luft zu tun haben, ist eigentlich ohne weiteres klar; wir können das aber auch experimentell beweisen, wenn wir die der Abb. 1 zugrunde liegenden Messungen an einem ganz ähnlich gestalteten Körper wiederholen, dessen lineare Abmessungen auf den doppelten Wert des erst untersuchten Körpers vergrößert sind. Dann werden, wie es nach unseren Dimensionsbetrachtungen sein muß, die Werte von ζ bei großem v sich nicht ändern; denn wo es nur auf $\frac{v}{c}$ ankommt, können die Abmessungen keinen Einfluß auf ζ haben. Die anderen auffallenden Werte der ζ-Kurve werden wir auch wiederfinden, aber nicht mehr bei derselben, sondern bei einer halb so großen Geschwindigkeit wie früher. Daraus können wir den zwingenden Schluß ziehen, daß die Zusammendrückbarkeit für diese Erscheinung nicht maßgebend ist, daß vielmehr eine Naturkonstante eingehen muß, welche die Dimension $v \cdot l$ hat. Daraus, daß sich die Gebiete I und II in gleicher Weise verschoben haben, schließen wir, daß beiden Abweichungen dieselbe Ursache zugrunde liegen muß.

Diese Ursache ist die Zähigkeit oder innere Reibung der Luft. Wenn zwei Schichten einer Flüssigkeit mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander vorbeigleiten, so üben sie aufeinander Schubkräfte aus, und zwar zwei Schichten von der infinitesimalen Entfernung dy, zwischen denen der Geschwindigkeitsunterschied dv herrscht, die Schubkraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Der hier auftretende „Reibungskoeffizient" μ spielt eine entscheidende Rolle bei allen Flüssigkeitsbewegungen mit kleiner Geschwindigkeit und bei kleinen Abmessungen; der bekannteste Fall, in welchem die innere Reibung den ganzen Strömungsvorgang beherrscht, ist die sog. „Poiseuillesche Strömung" in Kapillarröhren, welche ein einfaches Gesetz befolgt und zur Bestimmung von μ dient. Auch die Bewegung einer Kugel von kleinem Durchmesser in einer Flüssigkeit läßt sich

mit Hilfe des Reibungskoeffizienten schön beschreiben; dabei ergibt sich das Stokessche Widerstandsgesetz, bei welchem die Kraft nicht v^2, sondern v proportional ist, ζ also v umgekehrt proportional wird, entsprechend unserer in Abb. 1 niedergelegten Erfahrung.

Die Theorie der mechanischen Ähnlichkeit gibt uns nun ohne weiteres Aufschluß über die Art und Weise, wie der Reibungskoeffizient μ mit der Geschwindigkeit v, der linearen Abmessung l und der Dichte ρ zusammentreten muß, um in die Gesetze der Luftkräfte einzugehen. μ folgt aus der Beziehung (2) als ein Druck, geteilt durch ein Geschwindigkeitsgefälle, hat also die Dimension

$$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2} : \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{m}}\Big] - \Big[\mathrm{m}$$

Aus den vier genannten Größen läßt sich in einer und nur in einer Weise eine dimensionslose Zahl bilden, nämlich die nach dem Entdecker ihrer Bedeutung benannte „Reynoldssche Zahl“:

$$\frac{\varsigma \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}}\Big] = [0] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nachdem wir also experimentell erkannt haben, daß unser ζ sowie der Strömungsverlauf vom Reibungskoeffizienten abhängen müssen, folgern wir aus unserer Überlegung streng, daß diese Größe nicht anders als in der Form (3) in Erscheinung treten kann. Es ist sinnlos, zu sagen, ζ hänge von v oder von l ab, ζ *ist nur eine Funktion von* R. Damit sind wir aber nun vollkommen im Klaren, wie wir in unserem ganzen Gebiet einzelne Beobachtungen auf andere Fälle übertragen dürfen, und wo die Grenzen dieser Übertragbarkeit liegen.

Sind das Stromlinienbild und die Kräfte in einem Fall beobachtet, so gilt derselbe Kraftbeiwert ζ und verläuft die Bewegung in derselben Weise, wenn nur die Reynoldssche Zahl dieselbe bleibt. Es ist also vom Standpunkt der Mechanik aus ganz dasselbe, wenn einmal — wie oben — die Geschwindigkeit 10 m/s und die Körperabmessung 0,01 m beträgt, oder ein anderes Mal etwa die Körperabmessung 0,1 m beträgt, aber die Geschwindigkeit nur 1 m/s. Es ist auch mechanisch gleichwertig, wenn derselbe Körper in einem Luftstrom von 10 m/s von der Dichte der Luft am Erdboden steht und wenn er sich in einer Höhe, wo nur halb so große Luftdichte herrscht, aber derselbe Reibungskoeffizient, mit doppelter Geschwindigkeit, also mit 20 m/s, bewegt. Es ist schließlich auch kein Unterschied, ob der Versuch in Luft, in Wasser oder in irgendeiner anderen Flüssigkeit angestellt wird, wenn nur die Abmessungen oder die Geschwindigkeit in der Weise geändert werden, daß die Reynoldssche Zahl wieder dieselbe wird. Die einzige Materialkonstante, die vorkommt, ist das Verhältnis $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, das man auch den „kinematischen Reibungskoeffizienten“ nennt. Dieser ist z. B. bei Wasser etwa 14mal so groß wie bei Luft. Ein im Wasser angestelltes Experiment gibt darum streng richtigen Aufschluß über einen Vorgang in der Luft, wenn etwa in der Luft die Körperabmessung das Doppelte, die Geschwindigkeit das Siebenfache der im Wasser verwendeten beträgt.

Auf die Modellversuche angewandt, besagt dieses Ergebnis, daß man dann mit Sicherheit von dem kleinen Modell auf das große wirkliche Flugzeug oder einen Flugzeugteil schließen kann, wenn man entweder das Modell mit einer um so viel höheren Geschwindigkeit bewegt, als der Verkleinerung des Maßstabes entspricht, oder die Versuche in einer Flüssigkeit von hohem kinematischen Reibungskoeffizienten, etwa in Wasser, anstellt, wobei eine kleinere Geschwindigkeit zur restlosen Anpassung an den wirklichen Bewegungsvorgang genügt. Beides ist nun nur in sehr unvollkommener Weise möglich. Die Flugzeuggeschwindigkeit ist von der Größenordnung 40 m/s; sei nun ein Modell gegen die wirkliche Ausführung nur auf ein Fünftel verkleinert, so wäre im Luftstrom bereits eine Geschwindigkeit von 200 m/s erforderlich, um die wirkliche Reynoldssche Zahl zu erreichen; diese Geschwindigkeit ist nur mit größten Mitteln herstellbar; die Annäherung an die Schallgeschwindigkeit bringt aber dabei eine große Unsicherheit in die Ergebnisse; im Wasser brauchte man allerdings nur 14 m/s, aber auch dieser Wert übersteigt das zur Zeit technisch Mögliche bei weitem. Wir sind also bei den aerodynamischen Fragen in der mißlichen Lage, Modellversuche von restloser Übertragbarkeit auf das wirkliche Flugzeug nicht anstellen zu können.

In dieser Beziehung ist das Flugzeug schlechter daran als das Schiff; in der Mechanik des Schiffes sind bekanntlich die Modellversuche seit langem ein bewährtes und verläßliches Hilfsmittel der Technik und der Forschung. Beim Schiff gilt aber auch eine andere Modellregel als beim Flugzeug. Das Schiff ist nicht völlig eingetaucht in eine Flüssigkeit, es bewegt sich an der Oberfläche des Wassers; die darauf wirkenden Kräfte sind darum wesentlich durch die Erscheinungen an der freien Oberfläche einer Flüssigkeit, durch die Wellenbildung, bestimmt. Auf die Wellenbildung hat aber die Reibung keinen maßgebenden Einfluß, sondern fast ausschließlich die Schwerkraft; und die dimensionslose Zahl, welche das Gesetz der mechanischen Ähnlichkeit bestimmt, enthält den Reibungskoeffizienten nicht, dafür die Schwerebeschleunigung g. Sie lautet $G = \frac{v^2}{g\,l}$. Zwei Vorgänge sind mechanisch ähnlich, werden also auch durch das gleiche ζ beschrieben, wenn die Zahlen G dieselben sind. Eine Übertragung vom kleinen Modell auf das große Schiff ist einwandfrei, wenn die Geschwindigkeit des Modells zur Schiffsgeschwindigkeit sich verhält wie die Wurzeln der Modellabmessungen zu den Schiffsabmessungen. Der kleinere Maßstab erfordert eine kleinere Geschwindigkeit; beim Flugzeug ist es leider umgekehrt.

So wäre der Wert der Modellversuche für die Flugtechnik sehr gering, wenn nicht eine auffallende Erscheinung die ganzen Verhältnisse doch wesentlich vereinfachte. Unsere Abb. 1 zeigt, daß nur ganz schmale Bereiche der Kurve „ζ in Abhängigkeit von v“ uns zur Einführung der Reynoldsschen Zahl veranlaßten, und daß in weiten Bereichen ζ von v und damit auch von R unabhängig wird. In der ersten Zeit der Modellversuche kannte man wohl die Bedeutung der Reynoldsschen Zahl und die Abweichung der ζ-Kurve bei kleinen Reynoldsschen Zahlen, nicht aber den Übergang II der Abb. 1. Man nahm daher das quadratische Widerstandsgesetz (1), also die Konstanz von ζ als exakt gültig an und setzte sich auf diese Weise über die Schwierigkeiten der Modellregel hinweg. Seitdem durch die Versuche von Eiffel

und Prandtl die Existenz von Übergangsbereichen II erwiesen ist, wird man nur dann mit Sicherheit die Konstanz von ζ annehmen, wenn man zwischen der Reynoldsschen Zahl des Modellversuchs und derjenigen des wirklichen Flugvorgangs keine solche Übergangsstelle vermutet. Dies kann zum Glück bei vielen interessanten Problemen der Flugtechnik angenommen werden. Da es aber nicht durchgehends der Fall ist, mußte man doch Modellversuche in möglichst großem Maßstab anstreben; man hat die Modellversuche so weiterentwickelt, daß man zu recht großen Werten der Reynoldsschen Zahl gelangen kann. Die Abweichungen vom Widerstandsgesetz (1) mit konstantem ζ sind durchaus nicht so klein, daß man leichthin darüber hinweggehen könnte; sie halten sich aber doch in solchen Grenzen, daß ein Schluß von den heutigen Dimensionen der Modellversuche auf die Wirklichkeit die Bedürfnisse der Technik befriedigen kann.

3. Modellversuchsanordnungen.

Die Modellversuchsanordnungen, über die wir hier natürlich nur eine allgemeine Übersicht geben können, kann man in zwei Klassen einteilen, in Schleppversuchsanordnungen, bei welchen der zu untersuchende Körper gegen die Luft oder das Wasser bewegt wird, und solche Anordnungen, welche, gestützt auf das Relativitätsprinzip der Mechanik, die Luft gegen den Körper strömen lassen. Die erstere Art ist die näherliegende, ist darum in der ersten Zeit der Flugwissenschaft besonders ausgebaut worden; doch kann sie sich hinsichtlich der Erfolge nicht mit den Luftstromanlagen messen, die heute allein die maßgebende Rolle spielen.

1. Schleppversuche. Schon ehe es eine Flugtechnik gab, bestimmte man den Luftwiderstand von festen Körpern, indem man sie vorn an Lokomotiven anbrachte und den darauf wirkenden Druck maß. Später verwendete man gelegentlich das Automobil zu demselben Zweck. Der Erfolg dieser Messungen war stets sehr gering; dies liegt hauptsächlich an den unvermeidlichen Erschütterungen bei der Bewegung der Fahrzeuge, durch welche jegliche sichere Ablesung unmöglich gemacht wird. Diese Erschütterungen werden ja in ihrer Wirkung noch erheblich dadurch verstärkt, daß die Versuchskörper durch das Gerüst vom Fahrzeug weggehalten werden müssen. Tut man dies nicht, so hat man eine starke Beeinflussung der Strömung und somit der Luftkräfte durch das Fahrzeug oder durch die Nähe des Erdbodens, und die Meßergebnisse weichen in ganz unkontrollierbarer Weise von den praktisch wichtigen, gesuchten Größen ab. Man hat in jüngster Zeit versucht, die Schleppversuche auf Bahnstrecken in größtem Stil wieder aufzunehmen; man wollte dabei sogar über Modellgrößen hinausgehen und ganze Flugzeugteile und Flugzeuge mit großer Geschwindigkeit gegen die Luft schleppen; aber alle Kunst ist bisher der Schwierigkeiten infolge zu großer Erschütterungen nicht Herr geworden.

Dagegen haben solche Schleppversuche auf geradliniger Strecke sehr schöne Erfolge gezeitigt in den Wasserkanälen, wie sie zuerst und am besten von Ahlborn ausgebildet wurden. Diese bieten die Möglichkeit, Strömungsbilder photographisch festzuhalten, besser als irgendeine andere Anordnung, und liefern daher die wirksamsten Fingerzeige für die theoretische Durchforschung der

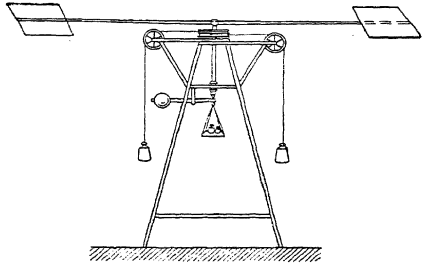
Flüssigkeitskräfte. Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß man bei Wasser mit kleineren Abmessungen und Geschwindigkeiten verwendbare Daten bekommt als bei Luft. Infolgedessen ist es leichter, die störenden Erschütterungen und die großen Schleppgerüste zu vermeiden, und man erhält sehr saubere und exakt arbeitende Anordnungen. Der größte Vorteil liegt in der Möglichkeit, feine Teilchen im Wasser zu suspendieren, deren Bewegung sich auf einer kurz belichteten photographischen Platte deutlich abzeichnet und mit der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, welche dem suspendierten Teilchen benachbart sind, identifiziert werden kann. Am einfachsten lassen sich diese Versuche ausführen, indem man die freie Oberfläche des Wassers mit Bärlappsamen bestreut und von oben photographiert. Diese Anordnung hat zwei Nachteile; erstens hält man damit nur Bilder in einer Ebene fest; man bringt also nur die Strömung um einen senkrecht zur photographischen Ebene unendlich ausgedehnten Körper zur Darstellung; dies ist allerdings ausreichend für viele theoretische Fragen. Zweitens sind die Strömungsbilder an einer freien Oberfläche nicht vollkommen identisch mit den Strömungsbildern im Innern der Flüssigkeit, sondern durch die Erscheinungen der Oberflächenwellen kompliziert; allein es ist nicht schwer, diese Erscheinungen von den anderen abzutrennen, vor allem, wenn man mit der Geschwindigkeit des Objekts nicht zu hoch geht und dadurch die Wellen klein hält. Die Wellenerscheinungen mit ihrer charakteristischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und ihren dadurch bedingten, ganz bestimmt gerichteten Kämmen haben ein vollkommen anderes Aussehen als die für die Bewegung des festen Körpers innerhalb der Flüssigkeit maßgebenden Wirbelerscheinungen, so daß das auf der Oberfläche erhaltene Bild ohne weiteres Schlüsse auf die Bewegung im Innern der Flüssigkeit gestattet. Aber es gelingt auch, Unterwasserphotographien zu erhalten, indem man den Kanal an einzelnen Stellen seitlich mit Glasplatten begrenzt und mit einer starken Lichtquelle hindurchleuchtend photographiert. Man suspendiert dann Teilchen von ungefähr dem spezifischen Gewicht des Wassers, welche im unbewegten Wasser stilliegen oder nur sehr langsam nach unten sinken; Ahlborn empfiehlt Späne von Ahornholz von 0,25 bis 1 mm Durchmesser, in Teddington wurden eingedickte Milch und Aluminiumfeilspäne benutzt. Schöne Bilder hat auch Zenneck mit elektrolytisch erzeugten Gasbläschen von 0,014 bis 0,023 mm Durchmesser erhalten. Werden gleichzeitig Aufnahmen von oben und von der Seite gemacht, so gelingt die volle räumliche Darstellung des Strömungsvorgangs, auch wenn er von einem nach jeder Richtung endlichen Körper (etwa von einem Flügelmodell von begrenzter Spannweite) hervorgerufen wird. Besonders ergiebig sind diese Aufnahmen, wenn man nach Ahlborn gleichzeitig mit zwei Bildkammern photographiert, eine fest gegen den Kanal anordnet, die andere mit dem festen Körper verbunden den Kanal entlang schleppt. Die erstere Bildkammer hält die Bahnen der suspendierten Teilchen, wie sie wirklich durchlaufen werden, fest, die Bahnlinien (auch absolute Stromlinien oder Kraftlinien genannt); die letztere bringt die Bahnen zur Anschauung, wie sie von Teilchen in einer gegen den festen Körper anströmenden Flüssigkeit beschrieben werden, die (relativen) Stromlinien. Beide Bilder zeigen die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit in jedem Raumpunkt, nicht aber ihre Größe. Aber die beiden Bilder sind nur dadurch unterschieden, daß auf dem zweiten, infolge der

Bewegung der Kammer, das Teilchen noch eine der Größe und Richtung nach bekannte Bewegung zu seiner auf der ersten Aufnahme festgehaltenen Bewegung in der Flüssigkeit hinzuerhalten hat. Die Bewegungen auf den beiden Bildern und die Bewegung der Bildkammer müssen also zusammen ein Geschwindigkeitsdreieck bilden; von diesem Dreieck sind zwei Winkel und eine Seite, nämlich die zwei Richtungen der Bahnlinie und der Stromlinie und die Größe der Bildkammergeschwindigkeit bekannt; dadurch läßt sich die Geschwindigkeit der Teilchen auch ihrer Größe nach bestimmen und somit das ganze Strömungsfeld.

Die Aufnahmen einer stationären, d. i. in jedem Raumpunkt verschiedenen, aber nicht von der Zeit abhängigen Strömung, dürften beliebig lange exponiert sein; um solche Bewegungen handelt es sich aber bei den Strömungen um feste Körper im allgemeinen nicht. Die Expositionszeit muß also, wenn klare Bilder erzeugt werden sollen, kurz sein; noch mehr ist durch kinematographische Aufnahmen zu erreichen. Die ganze Apparatur erfordert äußerste Präzision und feine Meßtechnik. Auch muß der Kanal recht lang sein, da zur Beschleunigung am Anfang und zur Verzögerung am Ende eine gewisse Zeit nötig ist und in erster Linie gleichförmige Bewegungen von Interesse sind.

Abb. 2. Rundlauf.

Zur Kraftmessung sind die Schleppversuche in Wasserkanälen für das Flugproblem noch nicht herangezogen worden, in erster Linie wohl, weil die Photographie der Strömung ergiebigere Ausbeute versprach, dann wohl auch, weil in dieser Hinsicht die Abtrennung der Oberflächenwellen nicht so leicht zu bewerkstelligen ist und auch die sonstigen Fehlerquellen (Erschütterungen, Mitschleppen einer großen störenden Apparatur) sich nur sehr schwer eliminieren lassen; die Ergebnisse können doch in dieser Hinsicht nicht denen der großen Modellversuchsanstalten ebenbürtig sein.

Experimentell einfacher ist eine seit Lilienthal, Langley und Dines sehr verbreitete Schleppanordnung, bei welcher auf die Geradlinigkeit der Bewegung verzichtet wird, der Rundlauf. Um eine feste Säule wird ein möglichst weit hinausragender Arm gedreht, an dessen Spitze der zu untersuchende Körper befestigt ist. Die Kraftmessung geschieht mit Hilfe einer Feder und einer Registriervorrichtung. Abb. 2 ist eine schematische Darstellung des Apparates nach Lilienthal. Dines hat noch den besonderen Kunstgriff eingeführt, die Luftkräfte durch ein Gewicht, auf welches die Zentrifugalkraft wirkt, ins Gleichgewicht zu setzen; da beide Kräfte dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sind, wird bei dieser Anordnung der Einfluß der Geschwindigkeit eliminiert. Man kann beim Rundlauf die Geschwindigkeit sehr hoch steigern (Langley gibt 30 m/s an) und durch einen Drehzähler leicht messen. Die Ergebnisse sind zur Orientierung recht brauchbar; am

Rundlauf sind auch die wichtigsten Tatsachen über den Auftrieb von Tragflügeln (Bedeutung der Krümmung, Auftriebsmaximum usw.) gefunden worden; aber für zuverlässige Zahlenwerte sind die Fehler doch viel zu groß. Vor allem bewegt sich der geschleppte Körper nicht in ruhender Luft; es werden immer dieselben Luftteile durchstrichen, die dadurch immer mehr von Wirbeln durchsetzt werden und Eigenbewegungen von der Ordnung der Bewegung des Körpers erhalten; da die Flügelkräfte von der Richtung des Luftstroms gegen den Flügel sehr empfindlich abhängen, wird durch diese Unruhe jede Genauigkeit unmöglich gemacht; man kann die Fehler auf 30 v H schätzen. Als Fehler des Rundlaufs ist, obwohl weniger ins Gewicht fallend, noch der Mitwind zu erwähnen, d. i. die der Luft beim Durchstreichen mitgeteilte Geschwindigkeit, durch welche sie, wie das untersuchte Objekt, in leichte Drehung um die Säule versetzt wird, und derzufolge die Geschwindigkeit des Objekts gegen die Luft kleiner ist, als aus der Umlaufszahl des Rundlaufs folgt. Auch die Ungleichheit der Geschwindigkeit am inneren und äußeren Ende des Objekts verursacht einen Fehler; dieser würde verschwinden, wenn die Luftkräfte der Geschwindigkeit proportional wären, da dann der Kraftüberschuß der äußeren Objekthälfte durch den Ausfall der inneren gerade aufgehoben würde; da aber die Luftkräfte mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachsen, ist der Überschuß größer als der Ausfall; die Kräfte werden daher etwas zu groß gemessen. Eine Aufgabe für den Rundlauf, die unseres Wissens noch nicht in Angriff genommen ist und die wichtige Aufklärungen verspricht, ist die Untersuchung der beim Kurvenflug auftretenden Kräfte. Dabei ist der letzterwähnte Fehler des Rundlaufs gerade ein Vorzug. Da es dabei auch mehr auf Vergleichsmessungen als auf absolute Bestimmung ankäme, könnte man sich über die großen Fehlerquellen des Rundlaufs für dieses Problem hinwegsetzen, besonders da andere Einrichtungen für diesen Zweck kaum herzustellen sein dürften. Welche Fragen der Kurvenflug aufwirft, wird unten genau besprochen werden.

Die feinste Schleppvorrichtung zum Zwecke der Kraftmessung war die Anordnung von Eiffel an seinem 300 m hohen Turm in Paris. An einem Drahtseil durchfiel der Versuchskörper die große Höhe, so daß noch auf einer reichlich großen Strecke gleichförmige Bewegung zu erwarten war. Die Kraft wurde mit einer Feder gemessen und auf einer Trommel aufgezeichnet, die von einem am Drahtseil gleitenden Rädchen angetrieben war. Die Geschwindigkeit der Bewegung wurde dadurch ermittelt, daß eine Stimmgabel ihre Schwingungen auf die Trommel aufzeichnete. War die Bewegung noch keine gleichförmige, so brachte man eine Korrektur durch Berücksichtigung der Trägheitskräfte an; Luftkräfte infolge von Beschleunigung wurden nicht angenommen — man weiß heute noch nichts von solchen Kräften. Die Resultate, welche Eiffel mit dieser Anordnung erhielt, waren recht genau; sie stimmen mit den später durch feinere Messungen erhaltenen recht gut überein. Allerdings beschränkten sich die Versuche auf die einfachen Widerstandsmessungen; die Flügelkräfte, welche nicht nur ihrem absoluten Betrag, sondern auch ihrer Richtung nach, also wenigstens in zwei Komponenten gemessen werden müssen, wurden nicht untersucht.

Luftkraftmessungen an Pendeln u. dgl. Anordnungen haben keine Erfolge gezeitigt.

2. Luftstromanordnungen. Ungleich größere Bedeutung als alle Schleppversuche haben heute die Anordnungen, bei welchen der Versuchskörper ruht und die Luft mit einem Ventilator dagegen geblasen wird. Man unterscheidet da vor allem zwei Haupttypen von solchen Anordnungen: Kanäle, bei welchen der Luftstrom zwischen festen Wänden geführt wird, und Freistrahlen, welche offen durch die ruhende Luft hindurchschießen. Erstere Anordnung ist zuerst von Prandtl in Göttingen ausgebaut worden, letztere von Eiffel in Paris.

In der jüngsten Zeit hat man meist die letztere bevorzugt; sie bietet den großen Vorteil, daß der Experimentator von den Versuchsobjekten durch keine

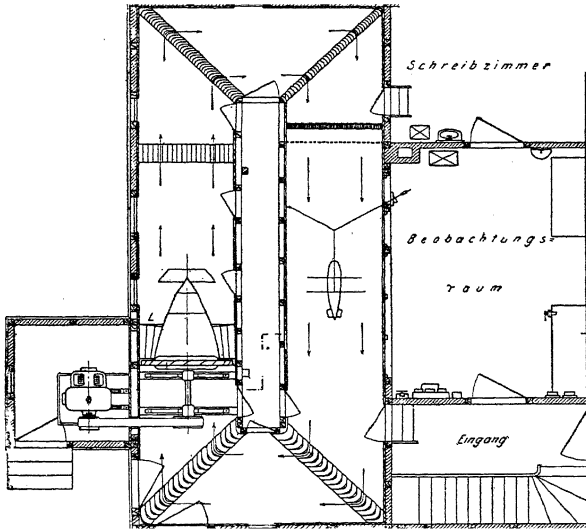



Abb. 3. Göttinger geschlossener Luftstrom.

Wände getrennt ist und darum bequem an die Anordnungen heran kann. Wenn der Raum, durch welchen der Freistrahl geführt ist, gut gegen die äußere Luft abgedichtet ist, so hat man auch keine Schwierigkeiten durch Ungleichmäßigkeit der Strömung; freilich muß diese Dichtung gut sein; denn der Freistrahl wirkt wie eine Strahlluftpumpe und zieht so lange Luft aus dem Raum in sich hinein, bis sich in dem ganzen Raum ein der Strahlgeschwindigkeit entsprechender Unterdruck hergestellt hat. Die in den Strahl hineinragenden Instrumente und Objektträger scheinen keine großen Störungen zu verursachen. Andererseits hat man bei festen Kanälen vielleicht die Einzelheiten der Strömung besser in der Hand; so konnte z. B. am ersten Göttinger Kanal die ursprüngliche starke Ungleichmäßig-

keit der Strömung an verschiedenen Stellen des Kanals durch eingebaute Gleichrichter, die mit der Hand zurechtgebogen wurden, bis ins feinste ausgeglichen werden. Das Kanalsystem ist außer in Göttingen in Teddington und Boston (Hunsaker) verwendet worden, Freistrahlen in größtem Maßstab haben Eiffel und Prandtl gebaut. Die Dimensionen und Stärken der Ventilatoren sind dabei so gesteigert worden, daß man ganze Flugzeugteile — wie Fahrgestelle, Streben, Spanntürme u. dgl. — auch von sehr großen Flugzeugen in wirklicher Größe mit wirklicher Fluggeschwindigkeit untersuchen kann.

Der Energieverbrauch sowie die gesamte Energiebilanz einer Luftstromanordnung sind in der neuen Göttinger Veröffentlichung ausführlich behandelt; danach beträgt die erforderliche Motorleistung $0{,}68 \frac{\gamma}{2g} F v^3$ $\left(\frac{\gamma}{g}\right.$ Luftdichte, F Düsenquerschnitt, v Luftgeschwindigkeit), also etwa $^2/_3$ der lebendigen Kraft, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Kanals gefördert wird.

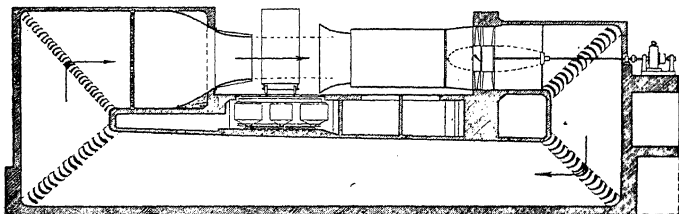



Abb. 4. Göttinger Freistrahl.

Weiterhin ist die Art und Weise des Ansaugens und Anblasens von Anordnung zu Anordnung verschieden. Das Ansaugen aus der freien Atmosphäre empfiehlt sich für feinere Anordnungen nicht; vor allem bei Kanälen gibt es Anlaß zu vielen Fehlern. Muß die Luft gegen die ruhende Atmosphäre beschleunigt werden, so wird der Druck im Innern des Kanals gegen den Atmosphärendruck erniedrigt sein; man muß also entweder die neben dem Kanal angeordnete Meßkammer sehr gut gegen den Außenraum abdichten oder jedes einzelne Loch in der Kanalwand, durch welches Objektträger oder Meßinstrumente eingeführt werden, sehr dicht halten, da sonst Luft gerade an den Stellen störend einströmt, auf die es am meisten ankommt. Außerdem ist man bei freiem Ansaugen vom Wetter sehr abhängig und erhält nur bei Windstille klare Ergebnisse. In einfacher und bequemer Weise sind diese Schwierigkeiten bei dem Göttinger Kanal vermieden, indem die Luft dort in einem geschlossenen viereckigen Kanal (Abb. 3) geführt wird. Dadurch ist der Druck von allen äußeren Einwirkungen ganz unabhängig. Ein Nachteil ist freilich, daß immer dieselbe Luft mit den Objekten in Berührung kommt, infolgedessen die starke Durchwirbelung, wie wir sie beim Rundlauf besprachen, auch hier Störungen hervorbringen kann; doch läßt sich diese Wirkung durch Gleichrichter und Leitschaufeln so weit herabsetzen, daß man sie kaum als wesentliche Fehlerquelle ansehen muß. In irgend einer Form zeigen

alle modernen Luftstromanlagen diese Rundführung der Luft. Bei Prandtls Freistrahl in Göttingen wird die Luft unter der Erde in einem breiten Kanal an die Einströmungsstelle zurückgeführt, bei Eiffel in eine große Halle geleitet, aus welcher sie von neuem angesaugt wird. Die Gesamtanordnungen sind in den Abb. 4 und 5, welche in den Veröffentlichungen von Prandtl und Eiffel ausführlich erläutert sind, zu erkennen. Besonders erwähnt sei hier nur noch, daß bei der Göttinger Anordnung das Objekt auf Schwimmern montiert ist; die Wassergefäße, auf welchen diese ruhen, sind in Abb. 4 zu sehen.

Die räumliche Ungleichförmigkeit wird durch Gleichrichter ausgeglichen; ohne solche, besonders an der Einströmungsstelle, kann keine Luftstromanlage arbeiten. Aber auch zeitliche Ungleichmäßigkeit infolge verschiedener Wirkung des Ventilators läßt sich nicht vermeiden. Eine sehr sinnreiche Einrichtung zur

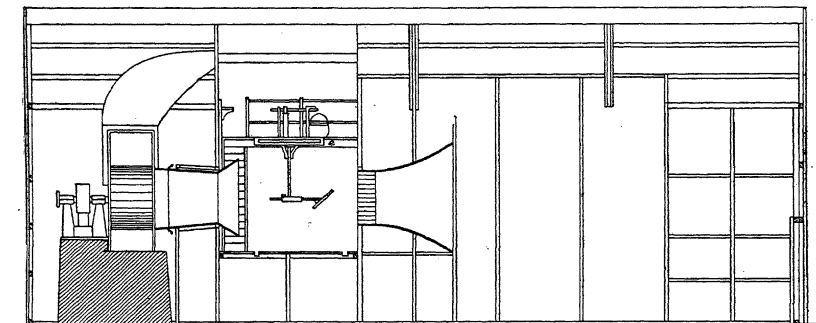



Abb. 5. Eiffels Freistrahl.

Behebung dieser Schwierigkeit ist der Prandtlsche Druckregler, der in Göttingen verwendet wird. Der Hauptbestandteil dieses Apparates ist eine manometrische Wage, die an den Raum vor und hinter dem Ventilator angeschlossen ist und bei einer einstellbaren Druckdifferenz, also bei einer bestimmten Geschwindigkeit, einspielt. Ändert sich nun diese, so betätigt der Druckregler durch elektrische Kontakte einen automatischen Nebenschlußregulator am Ventilator und stellt dadurch die alte Luftgeschwindigkeit wieder her. Einzelheiten läßt Abb. 6 erkennen; genauere Beschreibungen dieses und eines noch feineren Apparates sind in Prandtls Veröffentlichungen zu finden. Die Geschwindigkeitsschwankungen werden durch diesen Apparat auf weniger als $^1/_2$ vH heruntergedrückt.

Die Geschwindigkeitsmessung im Luftstrom beruht auf der Bernouillischen Druckgleichung, welche den Druck p und die Geschwindigkeit v in den Zusammenhang bringt (γ spezifisches Gewicht der Luft, g Schwerebeschleunigung):

$$p + \frac{\gamma}{2g} v^2 = \text{const.}$$

Diese Beziehung folgt (vgl. S. 41) aus den Grundgesetzen der Hydrodynamik, wenn von Zusammendrückbarkeit und Reibung abgesehen werden kann und äußere Kräfte nicht vorhanden sind; für die Geschwindigkeitsmessung im Luftstrom sind diese Vernachlässigungen bedeutungslos. Strömt die Luft von einem Ort vom Druck p_0 zu einem Ort vom kleineren Druck p_1, so setzt sich die Druckenergie $p_0 - p_1$ in lebendige Kraft der Luft um; war also z. B. an der ersten Stelle die Luft in Ruhe, so wird an der zweiten Stelle ihre lebendige Kraft $\frac{\gamma}{2g} v^2 = p_0 - p_1$

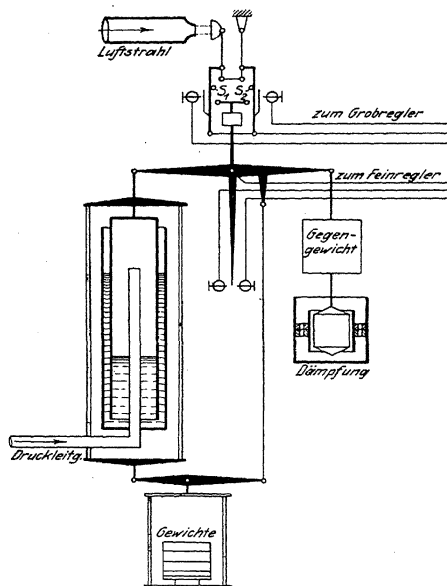



Abb. 6. Druckregler nach Prandtl.

nach obiger Gleichung sein. Wird ein Freistrahl aus der Atmosphäre oder aus einem großen Raum von Atmosphärendruck, in welchem keine Bewegung herrscht, angesaugt, so ist im Strahl der Druck gegen den Atmosphärendruck erniedrigt; es genügt, den Druck im Strahl zu messen, um seine Geschwindigkeit zu kennen. Diese Aufgabe ist nun im allgemeinen sehr schwer; denn jedes Meßgerät, das in den Luftstrahl eingeführt wird, stört die Strömung und damit die Druckverhältnisse. Im speziellen Fall sind aber die Schwierigkeiten leicht zu umgehen; denn in der ganzen gut gedichteten Meßkammer muß ja der Druck derselbe sein wie im Strahl, da sonst ständig Luft aus der Meßkammer in den Strahl einströmen müßte. Ein empfindliches Barometer an irgendeiner Stelle der Meßkammer, wo die Luft in

Ruhe ist, liefert, verglichen mit dem äußeren Luftdruck, das gesuchte Maß für die Luftstromgeschwindigkeit. In der Tat wird so gemessen, wenn man die mittlere Geschwindigkeit kennen will und die örtlichen Veränderungen außer Betracht bleiben. Die Luftdruckunterschiede sind mit einem Mikromanometer leicht festzustellen; aber sie sind natürlich im Vergleich mit dem Atmosphärendruck selbst außerordentlich klein. Die höchste Luftstromgeschwindigkeit, welche man bis 1919 erzeugt hat, ist etwa 60 m/s, die Luftdichte $\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{8}\left[\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}\right]$; also beträgt die Luftdruckerniedrigung in der Meßkammer gegen die Atmosphäre etwa 230 kg/m², während der Atmosphärendruck selbst 10000 kg/m² beträgt. 230 kg/m² entsprechen 23 cm Wassersäule oder 6,4 cm Quecksilbersäule.

Eine derartige Mittelwertsmessung genügt nicht für alle Fälle; man muß unter Umständen die Geschwindigkeit von Punkt zu Punkt im Luftstrom kennen; auch ist das besprochene einfache Verfahren bei Kanälen nicht anwendbar; man braucht besondere Geschwindigkeitsmeßinstrumente. Auch diese dienen fast alle zur Druckmessung; Schalenkreuzanemometer und ähnliche Geräte, wie sie auf Flugzeugen bevorzugt werden, stören im Luftstrom durch ihre Größe und sind für feine Messungen zu ungenau. Auch Hitzdrahtinstrumente, bei welchen die Geschwindigkeit durch die Temperaturerniedrigung eines Platindrahts gemessen wird, und welche sehr empfindlich anzeigen, haben bis heute keine sehr große Bedeutung gewonnen. Vielleicht wird man diese letzteren mit Vorteil benutzen, wenn es sich um sehr exakte Messungen an einzelnen Stellen oder um Untersuchung zeitlicher Geschwindigkeitsschwankungen handelt.

Die Druckmeßinstrumente beruhen alle darauf, daß an einer Stelle die Geschwindigkeit gestaut, d. i. zu Null gemacht wird; an dieser Stelle erhöht sich der Druck gegenüber den Stellen der Strömung, an welchen die Flüssigkeit ungestört weiterströmt, um den Betrag des sog. „Staudrucks“ $q = \frac{\gamma}{2g} v^2$. Die Stauung ist leicht ausführbar; an jedem der Strömung entgegenstehenden Hindernis wird Geschwindigkeit vernichtet; in der Mitte einer Scheibe, welche senkrecht zur Stromrichtung steht, ist sie gewiß Null, ebenso in einer hinten geschlossenen Röhre, in deren vordere Öffnung der Strom hereinbläst (Pitotröhre). Die Schwierigkeit liegt in der Messung des „statischen“ Druckes in der ungestörten Strömung. Von diesem weicht, wie oben dargelegt, der Druck außerhalb des Luftstroms im Mittel um den Betrag des Staudrucks ab; er kommt also als Vergleichsdruck nicht in Frage. Auch hinter einer stauenden Scheibe entsteht nicht der statische Druck, da dort durch Wirbelbildung erfahrungsgemäß die Geschwindigkeit stark vermehrt und infolgedessen der Druck gegenüber der ungestörten Strömung erniedrigt ist; an dieser Stelle entsteht ein „Saugdruck“, der, nach Messungen von Krell, etwa 0,37 mal dem Staudruck gleich ist. Man gibt daher dem Meßgerät eine Gestalt, welcher sich die Strömung gut anpaßt, und nimmt den Vergleichsdruck an Stellen ab, wo der Verlauf der Strömung erfahrungsgemäß glatt und ungestört verläuft; seitliche Anbohrungen an einem Rohr, welches wie der vordere Teil eines Luftschiffs gestaltet ist, entsprechen diesen Anforderungen sehr gut (Abb. 7). Wenn man also den Druck in der dem Winde zugekehrten Öffnung gegen den in einem seitlichen Schlitz ent-

stehenden Druck an den beiden Schenkeln eines Manometers wirken läßt, so gibt die Differenz den Staudruck und somit die Geschwindigkeit mit genügender Genauigkeit an.

Anstatt des Staudrucks kann man zur Geschwindigkeitsmessung auch den Unterdruck verwenden, der in einem sich stark verengenden sog. Venturirohr

Abb. 7. Staurohr.

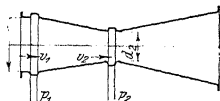



Abb. 8. Venturirohr.

(auch Saugdüse genannt), in welches der Luftstrom hineinbläst, infolge der großen Geschwindigkeitserhöhung entsteht. Man mißt den Unterdruck an der engsten Stelle gegenüber dem Druck an der unverengten vorderen Öffnung. Die Druckdifferenz ist mit den Bezeichnungen der Abb. 8:

$$p_1 - p_2 =$$

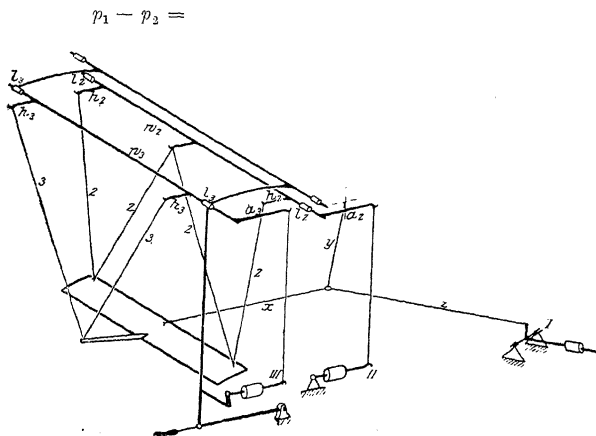



Abb. 9. Dreikomponentenwage.

Die Anzeige des Instruments ist also dem Staudruck proportional; aber der Proportionalitätsfaktor ist sehr groß, in der Regel 12—16. Die Empfindlichkeit wird noch erhöht, wenn man in die engste Stelle des Rohres die Austrittsmündung eines kleinen, ebenso gestalteten Rohres einfügt und an dessen engster Stelle mißt. Diese Instrumente wie auch die Staurohre sind sehr unempfindlich gegen Änderungen der Luftstromrichtung; strömt die Luft unter einem Winkel von 20° gegen die Röhrenachse, so wird die Druckanzeige nur um 3 v H geändert.

Die Einrichtungen zur Kraftmessung sind wesentlich durch technische Gesichtspunkte bestimmt; die Wagen müssen weit vom untersuchten Körper abstehen, da sie nicht im Luftstrom sein können; die Übertragung muß mit möglichst feinen Mitteln geschehen, damit die Luftbewegung in keiner Weise gestört ist; man muß auf Druckübertragung verzichten und darf nur dünne Drähte zur Aufhängung und Kraftübertragung verwenden. Schon diese nehmen oft Luftkräfte auf, welche die zu messenden übersteigen. Als Beispiel für die Aufhängung eines Objektes im Luftkanal stellt Abb. 9 schematisch die Göttinger Anordnung dar. Die Drähte 2 und 3 übertragen die Auftriebskraft in zwei Komponenten auf die Hebelarme h_2 und h_3, welche die Wellen w_2 und w_3 um die Lager l_2 und l_3 zu drehen suchen. Durch die Hebelarme a_2 und a_3 werden diese Kräfte auf die Wagen II und III übertragen, an welchen so Auftrieb und Moment gemessen werden kann. Der Draht x überträgt den Widerstand auf eine Wage I; er stößt mit dem an der Decke festen Draht y und dem zur Wage laufenden Draht z unter 120^0 zusammen.

4. Versuche im Fluge.

Die Modellversuche geben eine schöne allgemeine Grundlage für die aerodynamische Berechnung eines Flugzeugs; aber sie reichen doch nicht aus, um einen restlos klaren Überblick über die Verhältnisse im Fluge zu geben. Beim Modellversuch werden die Luftkräfte in Abhängigkeit von der vorgegebenen Lage des Flugzeugs zum Fahrtwind gemessen, im wirklichen Flug hat man diese Lage nicht unmittelbar in der Hand, sie stellt sich erst infolge des Kräfte- und Momentenausgleichs ein. Beim Modellversuch werden wohl die Hauptzüge des Flugzeugs nachgebildet, aber die Wirkungen der Einzelheiten können nicht zur Anschauung kommen; beim Flugzeug ist das Zusammenwirken der Kräfte auf empfindliche Weise gerade durch solche Einzelheiten beeinflußt, wie verschiedene Stellung der Steuerorgane, Wirkung des Schraubenstrahls u. dgl. Zudem ist, wie auf S. 10 hervorgehoben, die Übertragbarkeit der Modellversuche doch nicht so klar, daß man nicht mit einer erheblichen Unsicherheit rechnen müßte, und die vom Motor und der Schraube herrührenden Kräfte sind nur sehr ungenau bekannt. Andererseits kommt es aber beim ausgeführten Flugzeug gerade auf die Feinheiten sehr an; man arbeitet ständig an der Verbesserung eines Typs; gerade die kleinen Unterschiede des einen Typs vom anderen oder die kleinen Änderungen, welche man zur Verbesserung angebracht hat, sollen in ihrer Wirkung beobachtet werden. Dazu treten aber noch Probleme, die im Modellversuch überhaupt nicht untersucht werden können, nämlich alle räumlich oder zeitlich ungleichförmigen Bewegungen, Kurvenflug und nichtstationäre Bewegung, Wirkung der Steuerung und somit fast alle Stabilitätsprobleme. Das alles fordert gebieterisch den systematischen Versuch am Flugzeug, der allein zu einer sicheren Basis der aerodynamischen Vorausberechnung führen kann.

Leider ist dies der wundeste Punkt der ganzen flugtechnischen Aerodynamik; denn von einem systematischen und ergiebigen Ausbau der Flugversuche kann noch keine Rede sein. Zwar gründet sich die fertige Gestalt, welche ein Flugzeug in der Fabrik bekommt, immer auf Flugversuche; es wird zur Probe geflogen,

verändert, wieder geflogen und so fort, bis man das Beste aus dem Material herausgeholt zu haben meint. Auf diese Weise hat sich ein umfangreiches Versuchsmaterial angehäuft, meist allerdings nur in den Köpfen der erfahrenen Führer und Konstrukteure; der Wert dieses Materials für die Praxis soll auch nicht geleugnet werden; dem Ingenieur helfen seine Erfahrung und sein „Gefühl" durch die regellose Fülle der Beobachtungen hindurch, auch wenn er die Richtigkeit und Tragweite eines einzelnen Versuchs nicht mit Sicherheit beurteilen kann. Aber die Allgemeinheit und die Wissenschaft können noch sehr wenig Förderung von diesen Versuchen erhalten. Abgesehen davon, daß im Konkurrenzkampf die Angaben der Firmen und der Führer oft ein wenig „korrigiert" sind, werden die Versuche meist mit sehr eng begrenzten Zielen ausgeführt und vor allem ohne die — für wissenschaftliche Verwendung unerläßliche — Kritik gegenüber den Fehlerquellen. Zudem hat der Krieg sehr einseitige Forderungen gestellt, so daß gerade der vom aerodynamischen Standpunkt unergiebigste Versuch, nämlich der rasche Anstieg, weitaus am meisten gepflegt wurde, auch dieser meist ohne tieferes Eindringen. Was Momentenausgleich, Stabilität und Wendigkeit betrifft, so sind objektive Aufzeichnungen gar nicht vorhanden, und die Urteile der Flugzeugführer gehen oft sehr weit auseinander.

Zu wissenschaftlichen Zwecken und mit wissenschaftlicher Kritik sind in Deutschland nur sehr wenig Versuche im Fluge ausgeführt worden. Die Schwierigkeiten und selbst die Gefahren sind natürlich nicht unerheblich, aber beim heutigen Stand der Technik überwindbar, besonders wenn von einfachsten Beobachtungen ausgegangen wird; es ist zu hoffen, daß die nächste Zukunft durch Ausbildung von systematischen Versuchen im Fluge manche Lücken in unseren aerodynamischen Kenntnissen ausfüllen wird; auf Probleme und Möglichkeiten soll in den späteren Kapiteln öfters hingewiesen werden.

Zur Ausführung von Flugversuchen gibt es zwei Möglichkeiten: entweder werden im Flugzeug Meßgeräte mitgeführt und die Lage und Bewegung des Flugzeugs gegen die Luft und die Richtung der Schwerkraft bestimmt, oder die Lage und Bewegung des Flugzeuges werden gegenüber festen Punkten auf dem Erdboden gemessen, wobei der Beobachtungsapparat (etwa eine photographische Kammer) prinzipiell im Flugzeug oder auf der Erde angebracht werden kann. Bei der ersten Methode erhält man unmittelbar die Größen, welche vom flugtechnischen Standpunkt aus interessant sind, bei der zweiten muß man den Einfluß der willkürlich gewählten Erdpunkte meist durch umständliche Rechnungen eliminieren; dafür hat man ruhig und sicher arbeitende Meßgeräte. In der Tat sind die Störungen der im Flugzeug angebrachten Apparate sehr bedeutend. Zunächst stehen die verschiedenen Punkte im Flugzeug unter recht verschiedenen Verhältnissen; somit ist der richtige Ort für die Instrumente nicht immer leicht auszuwählen. Diese Schwierigkeit fällt für den Barographen („Höhenschreiber") wie auch für alle anderen Instrumente der Luftdruckmessung fort, da gegenüber der Änderung des Luftdrucks mit der Höhe der Einfluß der Luftgeschwindigkeitsschwankungen gar nicht in Betracht kommt. Barographen sind sehr brauchbar zur Messung des Luftdrucks, der Höhe und des Winkels der Flugbahn gegen die Horizontale. Doch wird lange nicht genug beachtet, daß die Umrechnung der Druckwerte auf die richtigen Dichte-

werte und Höhenwerte nur möglich ist, wenn die Temperatur gemessen wird. Dazu sind fast ausschließlich gewöhnliche Thermometer verwendet worden, Thermographen haben sich noch nicht bewährt. Das Thermometer darf natürlich nicht beim Sitz des Führers oder Beobachters angebracht sein, da dort der warme Luftstrom vom Motor und Kühler vorüberstreicht. Anstatt Druck und Temperatur kann man auch Druck und Dichte messen; diese drei Größen hängen ja durch die Gasgleichung zusammen. In der Praxis der Firmen ist die Dichtemessung nicht eingeführt, für wissenschaftliche Messungen dürfte sie sich empfehlen[1]); ein handliches Gerät für diesen Zweck hat Blasius angegeben. Die Dichte wird gemessen durch das Volumen einer bestimmten Gasmenge, welche unter demselben Druck steht und dieselbe Temperatur hat wie die äußere Luft. Diese Gasmenge

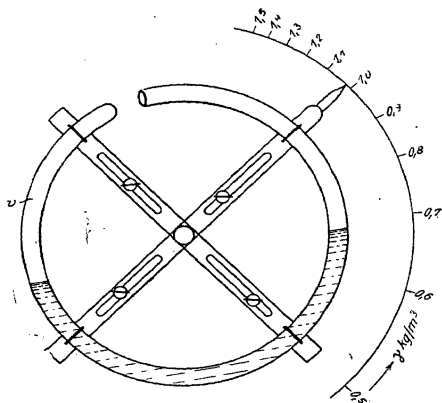



Abb. 10. Dichteschreiber nach Blasius.

ist durch einen Quecksilberfaden in dem geschlossenen einen Schenkel eines kreisförmig gebogenen Glasrohrs abgesperrt, welches auf einem leichten Gestell befestigt und drehbar aufgehängt ist (Abb. 10). Der Quecksilberfaden stellt sich immer so ein, daß sein Schwerpunkt möglichst tief liegt; das Rohr stellt sich entsprechend so ein, daß die abgesperrte Gasmenge gerade das richtige Volumen hat. Um fehlerhafte Anzeige infolge Neigung des Geräts gegen die Richtung der resultierenden äußeren Kraft zu vermeiden, verwendet man zwei Kreisrohre von entgegengesetztem Drehungssinn, welche durch Zahnräder verbunden sind; dabei wird der Einfluß der Neigung kinematisch eliminiert.

Die Steiggeschwindigkeit kann auch mit dem Variometer gemessen werden,

[1]) Hier soll auf Meßgeräte der Praxis nicht weiter eingegangen werden, da diese in einem anderen Band behandelt werden, nur auf einige Instrumente für rein wissenschaftliche Versuche wird hingewiesen.

bei welchem auf der einen Seite einer Membran sich der Luftdruck beim Steigen oder Fallen rasch ausgleicht, während er auf der anderen Seite durch eine enge Kapillare sich erst allmählich ausgleichen kann.

Die Fluggeschwindigkeit wird durch Windräder oder Stau- und Saugdüsen gemessen; letztere zeigen feiner an; in der Praxis werden die ersteren wohl nur deshalb bevorzugt, weil sie nicht so empfindlich gegen Beschädigungen sind. Bei der Geschwindigkeitsmessung kommt es sehr genau auf den Ort des Instrumentes an, denn die Luftgeschwindigkeit wird sehr stark von den Flügeln, von stauenden Flugzeugteilen und von der Luftschraube beeinflußt. Ahlborn hat durch Photographien im Wasserkanal festgestellt, daß zwischen den Flügeln eines Doppeldeckers in etwa zwei Drittel Flügelabstand über dem Unterflügel außerhalb des Schraubenstrahls

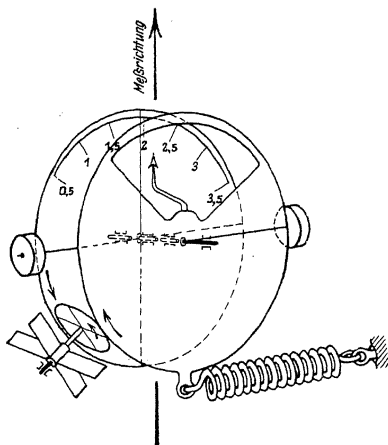



Abb. 11. Flügelbeanspruchungsmesser nach Klemperer.

diese Wirkungen sich gerade aufheben. Dies ist theoretisch auch zu erwarten, aber von Einzelfall zu Einzelfall verschieden. Man kann auch das Meßgerät in einer Höhe etwa gleich der Flügeltiefe über dem Oberflügel anbringen und den Fehler nach der Zirkulationstheorie (s. unten) abschätzen und verbessern. Dasselbe gilt von Instrumenten, welche die Richtung des Luftstroms im Flugzeug, also die Lage des Flugzeugs in seiner Bahn messen. Zu diesem Zweck sind bisher nur einfache Windfahnen verwendet worden; man kann aber diese Größe auch indirekt ermitteln, wenn man aus dem Barogramm und der Temperatur- oder Dichtemessung den Anstiegwinkel entnimmt und ihn mit der Lage des Flugzeugs zur Schwerkraftrichtung bzw. zur resultierenden Kraftrichtung kombiniert; diese wird mit Pendel oder durch Niveaueinstellung einer Flüssigkeit in einem U-Rohr gemessen. Solche Flüssigkeitsneigungsmesser lassen sich sehr empfindlich herstellen, wenn man auf eine schwere Flüssigkeit (Quecksilber) in weitem Rohr eine leichte

Flüssigkeit in engem Rohr schichtet; dann entspricht der hauptsächlich maßgebenden kleinen Verschiebung der schweren Flüssigkeit eine starke Verschiebung der leichten. Die Anzeige der Neigungsmesser ist natürlich unabhängig von ihrem Anbringungsort; aber sie reagieren immer nur auf die Resultierende von Schwere und Fliehkraft; wenn ein Flugzeug richtig in der Kurve liegt, zeigt der Seitenneigungsmesser also keinen Ausschlag. Für die Messungen der Lage im Raum ist auch der Kreisel verwendbar; doch ist bisher über Erfolge damit nichts bekanntgeworden, vermutlich weil der Kreisel ein sehr empfindlicher Apparat ist, der sehr vorsichtig behandelt werden muß.

Die Beschleunigung eines Flugzeugs kann nicht für sich gemessen werden, sondern nur die Resultierende aus der Beschleunigung des Flugzeugs gegen die

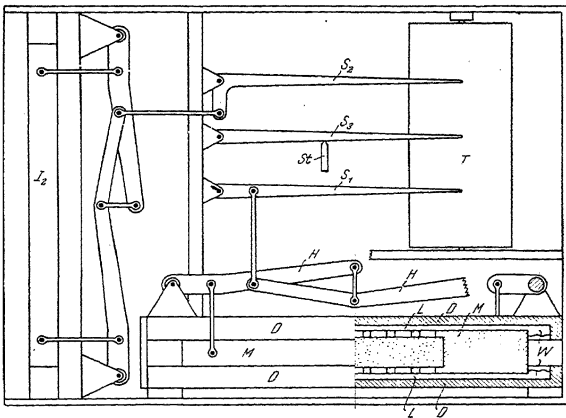



Abb. 12. Beschleunigungsmesser nach Betz.

Erde und der Erdbeschleunigung. Diese Größe ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil sie die Beanspruchung des fliegenden Flugzeugs angibt und daher der statischen Berechnung zugrunde liegen muß. Häufiger verwendet sind in Deutschland zwei Meßgeräte. Bei dem Instrument von Klemperer (Abb. 11), das als leichtes Bordinstrument für Flugzeugführer ausgebildet ist, werden zwei Scheiben durch die Trägheit von zwei exzentrisch angebrachten Massen gegeneinander verdreht, wenn die Gesamtkraft in der Meßrichtung (senkrecht zum Tragflügel) geändert wird. Die eine Scheibe ist durch eine Feder gehalten und durch ein Zahnrad (mit Luftdämpfung) zwangläufig mit der anderen verbunden. Der an der einen Scheibe feste Zeiger zeigt auf der Skala der anderen Scheibe die gesamte Beanspruchung an. Beim Instrument von Betz (Abb. 12) überträgt eine an einer (in der Abbildung nicht gezeichneten) Feder mit $\frac{1}{50}\,\frac{1}{s}$ Eigenfrequenz schwin-

gende Masse M ihre Bewegung mittels der Hebel H auf einen Schreibhebel S_1. Durch die Verbindung mit den Hebeln H und die Metallmembranen W ist die Masse so geführt, daß sie sich nur in einer Richtung bewegen kann. Die Dämpfung wird dadurch erzeugt, daß bei dieser Bewegung das durch den Deckel D abgeschlossene Luftvolumen L ständig durch eine poröse Masse P hin und her gepreßt wird. In der Abbildung ist die Anordnung eines zweiten senkrecht zum ersten messenden Instruments J_2 mit Schreibhebel S_2 und eine Zeitmarkenregistrierung St mit Schreibhebel S_3 eingezeichnet.[1])

Man kann die Frage der Beanspruchung auch eingehender mit Hilfe von Versuchen im Fluge verfolgen, indem man nach dem Vorgang von Hoff die Spannungen in den Kabeln und Seilen, welche die Flügelkräfte auf den Rumpf übertragen, mißt. Abb. 13 zeigt die Versuchsanordnung. Da das Seil

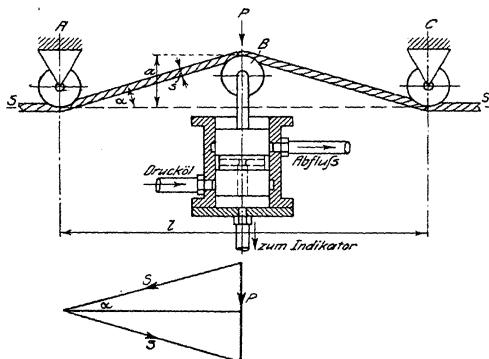



Abb. 13. Seilkraftmessung nach Hoff.

keinesfalls durch Meßgeräte unterbrochen werden darf, wird es nur mit leichtem Knick über drei Rollen (A, B, C) geführt und die Seilkraft S aus der am Indikator gemessenen Kraft P und Ausbiegung a des Seils bestimmt. Es ist

$$P = 2S \sin \alpha$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(a+s)}{l}.$$

Der Meßkolben ist dabei (nach Bendemann) als Schieber ausgebildet und eröffnet dadurch den Zufluß oder Abfluß der Druckflüssigkeit im einen oder anderen Sinne, sobald er bei gestörtem Gleichgewicht eine Bewegung macht. Er wird dadurch immer wieder in seine mittlere Lage zurückgeführt und in dieser im Gleichgewicht erhalten.

[1]) Die Abbildungen sind uns freundlichst von den Herren Klemperer und Betz zur Verfügung gestellt worden.

Auch hat man an kleinen Anbohrungen die Druckverteilung auf Flügel und Flossen gemessen.

Schließlich muß noch eine Einrichtung erwähnt werden, welche das vom Motor auf die Schraube übertragene Drehmoment und die von der Schraube auf das Flugzeug übertragene Kraft direkt zu messen gestattet, die Meßnabe. Die Ausführung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt zeigt Abb. 14. Das Konusstück *a*, das auf das Ende der Motorwelle aufgekeilt und durch eine Mutter festgehalten wird, ist dort, wo sonst die Luftschraubennabe sitzt, zylindrisch bearbeitet und trägt hier lose das Nabenstück *b*, das statt der üblichen Nabe die Luftschraube aufnimmt. Die Fortsetzung des Konusstückes nach vorn über das Nabenstück hinaus trägt die Zylinder für die Meßdosen. Die Achsen der Zugdosen *c* liegen parallel zur Drehachse; die Drehmomentdosen *d* sind so angeordnet, daß ihre Achsen einen senkrecht zur Achse liegenden Kreis, dessen Mitte in der Drehachse liegt, berühren. Das Nabenstück *b* trägt zwei Böcke *e*, die den Drehmomentdosen

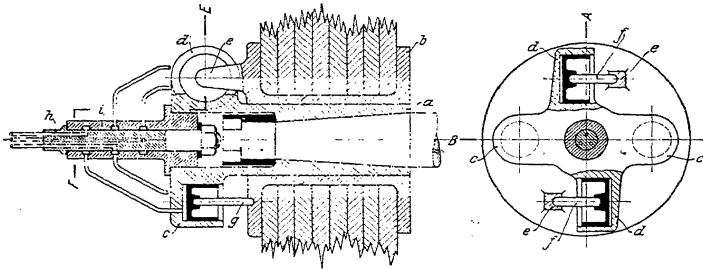



Abb. 14. Meßnabe der DVL.

gegenüberliegen und auf welche die Drehmomentdosen die Kräfte mittels der Stößel *f* übertragen. Die Zugkraft wird vom Nabenstück auf die Zugdosen durch die Stößel *g* übertragen.

Die Anzeige aller auf dem Flugzeug angebrachten Meßgeräte ist sehr schwankend. Das dürfte zum geringsten Teil an den zufälligen Erschütterungen des Flugzeugs liegen; die einzelnen den Flugzustand charakterisierenden Größen zeigen wirklich diese großen Schwankungen; Lage, Geschwindigkeit usw. eines Flugzeugs wechseln während des gleichmäßigsten Fluges ständig. Die Verfolgung dieser Bewegung im einzelnen verspricht sicher eine Fülle wichtiger Aufklärungen; bei der geringen Entwicklung der Versuche im Fluge kann man aber auf so schwierige Probleme noch nicht eingehen, sondern muß sich zunächst auf die Feststellung der Mittelwerte beschränken. Demnach empfiehlt es sich nur für die erste Orientierung, die Instrumente abzulesen; für feine Versuche müssen die Apparate mit Schreibvorrichtungen versehen werden. Dies bringt sehr viel technische Schwierigkeiten mit sich, da alle derartigen Vorrichtungen auf dem Flugzeug mit seinen vielen Erschütterungen schlecht arbeiten. Für Mittelwertmessungen hat sich Hoff mit Zählerwerken an Stelle der Aufzeichnungen zu helfen gesucht.

Ganz auf Mittelwertermittlung eingeschränkt ist man bei der zweiten Methode der Flugversuche, bei welchen das Flugzeug in seiner Orientierung zur Erde aufgenommen wird. Diese ist bisher nur zur Geschwindigkeitsmessung verwendet worden. Mißt man mittels einer Stoppuhr die Zeit, innerhalb welcher eine Strecke von bekannter Länge auf der Erde durchflogen wird, erhält man noch nicht die aerodynamisch allein wichtige Geschwindigkelt des Flugzeugs gegen die Luft; denn der Wind nimmt ja das Flugzeug mit, und was man von der Erde aus mißt, ist die vektorielle Summe der Fluggeschwindigkeit und der Windgeschwindigkeit. Man kann diesen Einfluß ausschalten, wenn man eine Strecke hin- und zurückfliegt, aber nur, wenn gerade mit und entgegen dem Wind geflogen wird; da dies nicht leicht sicher zu erreichen ist, muß man ein sog. „Stoppdreieck" durchfliegen. Wenn die drei beobachteten Geschwindigkeiten auf den drei Seiten a, b, c des Dreiecks zwischen den drei erdfesten Punkten A, B, C (Abb. 15) mit der gleichen Fluggeschwindigkeit und bei gleicher Windgeschwindigkeit durchflogen werden, so lassen sich aus den Beobachtungen diese beiden Größen mit Hilfe einer einfachen Kon-

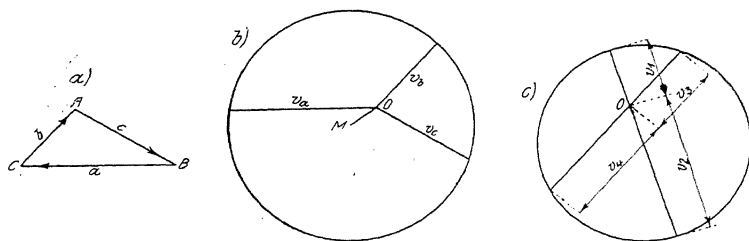



Abb. 15. Stoppdreieck.

struktion entnehmen. Sei die Windgeschwindigkeit der Größe und Richtung nach durch eine Strecke OM dargestellt und die Fluggeschwindigkeit durch eine Strecke v, deren Richtung beliebig sein kann, so werden die resultierenden Geschwindigkeiten bei jeder Flugrichtung durch Strecken dargestellt, welche vom Punkt O aus zum Umfang eines Kreises um M mit dem Radius v führen; denn diese Strecken sind die Vektorsummen der Windgeschwindigkeit und der Fluggeschwindigkeit. Trägt man also umgekehrt von einem Punkte O aus die drei beobachteten Geschwindigkeiten der Größe und Richtung nach auf und legt durch die Endpunkte einen Kreis, so ist der Radius dieses Kreises die gesuchte Fluggeschwindigkeit, der Abstand des Mittelpunktes von O der Größe und Richtung nach die Windgeschwindigkeit. Ein Dreieck muß durchflogen werden, da man drei Punkte zur Konstruktion des Kreises nötig hat; durchfliegt man ein Vier-, Fünf- usw. Eck, so erhält man eine feine Kontrolle der Messung; denn die Endpunkte der von O aus abgetragenen Strecken müssen alle auf einem Kreise liegen. Hin- und Rückflug auf einer Strecke genügen, wenn man sicher ist, daß die Windrichtung keinen Winkel mit der Flugrichtung bildet, also M auf einer der von O abgetragenen Strecken liegt (v_1, v_2 in der Abb. 15c); ist dies nicht der Fall, wie bei v_3, v_4 in der Abb. 15c, so wird der

Mittelwert der Hin- und Rückfluggeschwindigkeit kleiner als die wirkliche Fluggeschwindigkeit.

Zur Ermittlung der Geschwindigkeiten v_a, v_b, v_c über Grund muß man den Ort des Flugzeugs in Abhängigkeit von der Zeit gut feststellen können. Besonders kommt es auf eine genaue Ermittlung der Höhenänderung während der Beobachtungszeit an; denn die Geschwindigkeit hängt natürlich sehr stark davon ab, ob die Horizontale eingehalten wird, oder ob man steigt oder fällt. Mit Hilfe eines Theodoliten kann man zwei Winkel messen; der Ort des Flugzeugs ist dann bestimmt, wenn man gleichzeitig die Höhe über Grund einem Barographen entnimmt; doch ist diese Messung nicht genau, da man außer dem vom Barographen angezeigten Luftdruck noch die Dichte- oder Temperaturverteilung vom Boden an kennen muß. Für gut horizontale Bahn fallen die Fehler allerdings zum größten Teil heraus. Besser mißt man mit zwei Theodoliten, die in bestimmtem Abstand voneinander stehen; aus den Angaben der beiden Instrumente folgt der Standort des Flugzeugs in jedem Augenblick mit Hilfe einfacher geometrischer Rechnung. Die Schwierigkeit ist dabei, das Flugzeug schön im Fadenkreuz der Fernrohre zu halten oder wenigstens oft genug ins Fadenkreuz zu bekommen und in diesem Augenblick abzulesen. Die Meßgeräte müssen daher entweder von drei Mann bedient werden oder photographisch registrieren.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß dies Verfahren auch zur Messung anderer Größen, wie der Fluggeschwindigkeit, noch Verwendung finden wird; z. B. die Steiggeschwindigkeit läßt sich ohne weiteres so ermitteln. Doch bedürfen für aerodynamische Zwecke diese Messungen doch der Ergänzung durch Angaben der Dichte usw. in den verschiedenen Höhen, die nur durch Instrumente im Flugzeug festgestellt werden können. Die Lage des Flugzeugs in der Luft wird sich schwerlich von der Erde aus klar bestimmen lassen; diese könnte man aber, wie schon angeregt worden ist, durch Aufnahme bekannter Punkte vom Flugzeug aus, recht gut erhalten. Die Auflösung solcher Aufnahmen ist eine rein geometrische Aufgabe, welche für die Zwecke der Photographie feindlicher Stellungen vom Flugzeug aus bereits sehr gut durchgearbeitet ist. Auch die Technik dieser Aufnahmen ist bekanntlich im Krieg auf eine sehr hohe Stufe gebracht worden. Zur Aufklärung komplizierter Flugzeugbewegungen, besonders im Kurvenflug, kann die Methode wohl eine Zukunft haben. Im ganzen scheinen aber doch Versuche mit Meßinstrumenten auf dem Flugzeug einfacher, billiger und ergebnisreicher.

5. Theorie.

Die Theorie findet im Gebiet der flugtechnischen Aerodynamik zwei große Aufgaben vor, die mit ganz verschiedenen Methoden in Angriff zu nehmen sind. Die mechanischen Vorgänge im Flug beruhen auf den Luftkräften, deren Art und Größe durch Versuche bestimmt werden muß. Die Theorie hat nun einerseits klarzustellen, welche besonderen mechanischen Zusammenhänge gerade diese Luftkräfte zustande bringen und mit welchen Mitteln sie zu beeinflussen sind, andererseits mit Hilfe allgemeiner mechanischer Prinzipien zu berechnen, welche Gleichgewichts- und Bewegungsumstände die empirisch gegebenen Luftkräfte am Flugzeug hervorrufen.

Die Theorie hat auch hier, wie in jedem praktisch orientierten Gebiet, die Hauptaufgabe, Versuche zu ersparen durch rechte Ausnutzung und Klarstellung der Tragweite der fertigen Versuche, durch Richtlinien für neue Versuche und durch sichere Rechnung an Stellen, wo der Versuch unmöglich ist. „Versuche ersparen" heißt in der Flugtechnik mehr wie in anderen Gebieten; da handelt es sich nicht nur um Kosten, sondern auch um Menschenleben; denn in allen Fragen des richtigen Ausgleichs und der Stabilität gibt es ja keine anderen Versuche als den Flug, und noch dazu ist ein einzelner Flug unter ganz ungestörten Verhältnissen gar nicht immer maßgebend für die Sicherheit. Das Ziel der praktisch gerichteten Theorie muß es sein, Prinzipien aufzustellen und Vorschriften zu geben, nach denen schon in der Konstruktionszeichnung die Leistungsfähigkeit und Sicherheit eines Flugzeugs einigermaßen beurteilt werden kann, oder aus denen wenigstens die Richtlinien zur Verbesserung eines fertigen Flugzeugs entnommen werden können, wenn daran unbefriedigende Verhältnisse beobachtet worden sind.

Die Aufgabe, eine Erklärung der Luftkräfte zu geben, ist eine hydrodynamische, das Problem der Bewegung eines festen Körpers in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Dies ist bekanntlich eines der schwersten und ungeklärtesten der Mechanik überhaupt, und gerade seiner großen Bedeutung für die Flugtechnik ist es in erster Linie zu danken, daß man der Lösung in den letzten Jahren in engem Anschluß an die Modellversuche nähergekommen ist. Der eingeschlagene Weg ist für die Hydrodynamik charakteristisch. Die Kleinheit der Reibungskräfte im allgemeinen legt es nahe, daß man die unüberwindlich schweren Differentialgleichungen der reibenden Flüssigkeiten durch die einfacheren der reibungslosen ersetzt. Die Lösungen dieser Gleichungen sind aber nicht eindeutig, sondern werden dies erst durch die weitere Annahme der Wirbellosigkeit. In dieser Gestalt jedoch führen sie zu Lösungen, welche mit der Erfahrung nicht im Einklang stehen; andererseits können Wirbel nur unter Einfluß der vernachlässigten Reibung entstehen. Man sucht nun erstens Lösungen der Gleichungen ohne Reibungsglieder, d. i. Strömungen reibungsloser Flüssigkeiten, mit solchen Wirbeln darin, daß die Luftkräfte in Übereinstimmung mit der Erfahrung herausgerechnet werden können, zweitens benutzt man die Gleichungen mit Reibungsgliedern, um zu zeigen, daß gerade diese charakteristischen Wirbelerscheinungen an Stellen, wo die Reibung nicht klein bleibt, nämlich am festen Körper entstehen. Der erste Teil dieser Aufgabe ist heute schon sehr weitgehend gelöst; der Auftrieb ist quantitativ auch in nicht einfachen Fällen (endliche Tragfläche, Mehrdecker) klargestellt, der Widerstand in den einfachsten Fällen; die Bearbeitung des zweiten Teils ist über die Ansätze und das allgemeine physikalische Verständnis noch wenig hinausgekommen und noch keineswegs bis zur quantitativen Durchdringung gediehen.

Primitiver sind die Hilfsmittel der Theorie, welche sich mit der Bewegung des Flugzeugs befaßt und welche rein praktische Ziele verfolgt. Hier werden die Luftkräfte so eingesetzt, wie der Versuch sie liefert, entweder in rein empirischer Abhängigkeit voneinander und von den geometrischen Verhältnissen oder angenähert durch einfache Beziehungen. Die hydrodynamischen Fragen scheiden dabei ganz aus, und es bleibt nur das Flugzeug als starrer Körper unter dem Einfluß bestimmter gegebener Kräfte zu betrachten. Für die Konstruktion haupt-

sächlich maßgebend sind die Beziehungen, zu welchen die Berechnung des stationären Zustands führt, bei welchen also die Massenträgheit nicht berücksichtigt wird; zur Beurteilung der Stabilitätsverhältnisse betrachtet man unendlich kleine Abweichungen von diesem Zustand; für die im einfachen symmetrischen Fall auch schon durchgeführte Berechnung der Steuerwirkung und des Ablaufs von Störungen kann man sich auch von der Beschränkung auf unendliche kleine Beschleunigungen freimachen.

Erster Teil.

Die Luftkräfte.

Einleitung.

Definitionen.

Wenn ein Tragflügel mit der Geschwindigkeit v durch die Luft bewegt wird, so zeigt die Erfahrung, daß auf ihn infolge dieser Bewegung von der Luft Kräfte

Abb. 16. Profilform.

ausgeübt werden, welche in allen Punkten seiner Fläche angreifen. Wir wollen uns die Gesamtheit aller dieser Kräfte zu einer Resultierenden vereinigt denken, die in einem bestimmten Punkte angreift. Handelt es sich um eine reine Längsbewegung in einer Ebene senkrecht zur Erdoberfläche, so daß also auch keine Seitenneigung

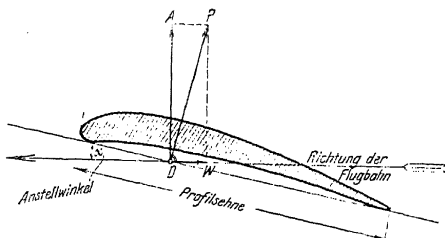



Abb. 17. Luftkraft und Anstellwinkel.

des Flugzeuges vorhanden ist, so wird der Angriffspunkt der Resultierenden in der Symmetrieebene, die den Flügel halbiert und auf ihm senkrecht steht, liegen. Unter dem *Flügelprofil* verstehen wir einen Querschnitt parallel zur Symmetrieebene. Alle gebräuchlichen Flügelprofile haben etwa die in Abb. 16 angegebene Gestalt. Das von der Vorder- und Hinterkante begrenzte Stück der Tangente an die Profilunterseite wollen wir die *Profilsehne* nennen. Den Angriffspunkt der Resultierenden der Luftkräfte denken wir uns dann in einen Punkt dieser Profilsehne, den sog. *Druckpunkt*, verlegt und messen seine jeweilige Lage durch die Entfernung VD von der Vorderkante. Infolge der Bewegung des Flugzeuges wird unser Tragflügel von einem die Luftkräfte hervorrufenden Luftstrom getroffen, *dessen Richtung immer der Richtung der Flugbahn entgegengesetzt* ist. Den Winkel,

den die Flügelsehne mit der Flugbahn bildet, d. h. also den Winkel, unter dem der Luftstrom die Flügelsehne trifft, nennen wir den Anstellwinkel unseres Flügels. Die Resultierende DP der Luftkraft (Abb. 17) zerlegen wir in zwei Komponenten, von denen die eine DA auf der Richtung der Flugbahn senkrecht steht, während die andere senkrecht dazu, also in der Richtung des Luftstroms liegt. Die erste Komponente nennen wir den Auftrieb, die zweite den Widerstand. Auftrieb

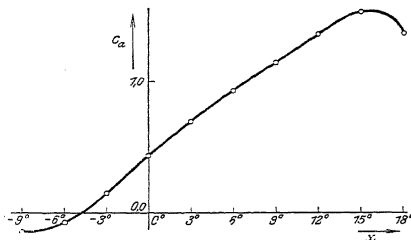



Abb. 18. Auftriebsbeiwert als Funktion des Anstellwinkels.

und Widerstand hängen, wie die Erfahrung lehrt, wesentlich von der Größe der Tragfläche F (Dimension m^2), dem spezifischen Gewicht der Luft γ (Gewicht pro Raumeinheit, Dimension kg/m^3) und der Fluggeschwindigkeit v (Dimension m/s) ab.

Der Ansatz für den Auftrieb und den Widerstand, wie er entsprechend den

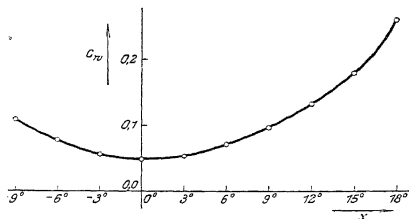



Abb. 19. Widerstandsbeiwert als Funktion des Anstellwinkels.

Dimensionsbetrachtungen der allgemeinen Einleitung [vgl. Gleichung (1) S. 5] gemacht werden muß, lautet in der jetzt üblichen Form:

$$A = \frac{1}{2}\, c_a \frac{\gamma}{g} F v^2 = c_a F q \quad \text{(A)}$$

$$W = \frac{1}{2}\, c_w \frac{\gamma}{g} F v^2 = c_w F q \quad \text{(W)}$$

wenn mit g die Beschleunigung der Erdschwere (9,81 m/s^2) bezeichnet wird und $q = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} v^2$ den sog. Staudruck (Dimension kg/m^2) bedeutet. Die dimensions-

losen Beiwerte c_a und c_w (reine Zahlenwerte) hängen dann noch außer von der Profilform und der Umrißform des Tragflügels vom Anstellwinkel ab. Diese Abhängigkeit vom Anstellwinkel wird durch Modellmessungen gegeben, wie sie in den Versuchsanstalten (vgl. die allgemeine Einleitung) ausgeführt werden, ist also durch empirisch gegebene Kurven darstellbar, die natürlich für jede Profil- und Umrißform des Flügels andere sind. In den Abb. 18 und 19 sind zwei solche Kurven dargestellt, wie sie in ähnlicher Weise immer wiederkehren, und zwar für einen Bereich der Anstellwinkel, der in der Praxis des Fluges hauptsächlich von Bedeutung ist, $\alpha = -9^0$ bis $\alpha = +18^0$. Die Abb. 18 für die c_a-Werte zeigt, daß c_a für die kleinsten

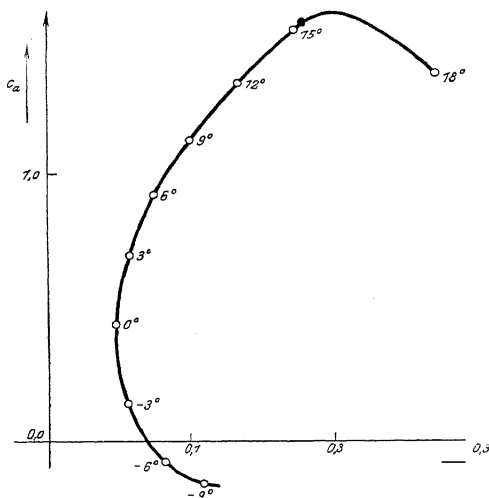



Abb. 20. Polardiagramm: c_a als Funktion von c_w.

vorkommenden Anstellwinkel ungefähr einem linearen Gesetz gehorcht, dann aber einem, etwa bei $\alpha = 15^0$ liegenden, Maximum zustrebt, um dann rasch wieder abzunehmen. Abb. 19 für die c_w-Werte zeigt, daß ihre Größenordnung gegenüber den c_a-Werten klein ist und nur etwa 10 vH derselben beträgt. Die zugehörige Kurve hat ein nicht weit von $\alpha = 0^0$ entfernt liegendes Minimum. Mit wachsendem Anstellwinkel nehmen die c_w-Werte zunächst nur langsam und erst bei größeren Winkeln rascher zu. Ein sehr anschauliches Bild zum Vergleiche der c_a- und c_w-Werte, das bei den verschiedensten Gelegenheiten besonders gute Dienste leisten wird, erhält man, wenn man sich, wie es in Abb. 20 geschehen ist, c_a als Funktion von c_w aufträgt und die zugehörigen Anstellwinkel auf der Kurve einzeichnet. Es ist dabei üblich, den Maßstab der c_w-Werte fünfmal so groß wie den der c_a-Werte zu wählen.

Außer den Beiwerten c_a und c_w liefern die Modellversuchsanstalten auch noch das **Moment** der Luftkraft. Man pflegt dabei bisher das Moment um die Vorderkante anzugeben, d. h. also das Produkt der Luftkraft mit der Entfernung ihrer

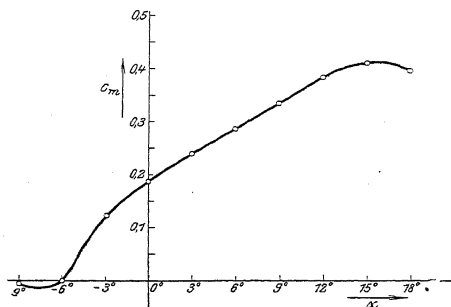



Abb. 21. Momentbeiwert als Funktion des Anstellwinkels.

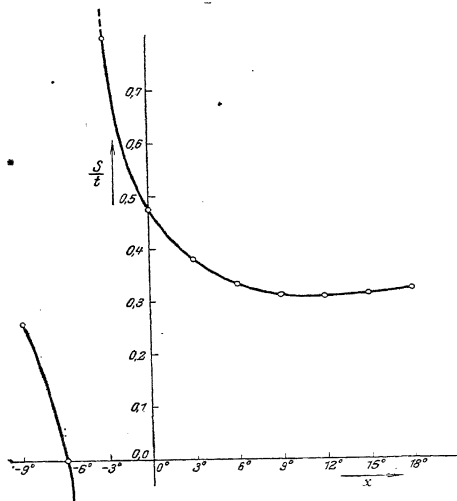



Abb. 22. Druckpunktswanderung bei Veränderung des Anstellwinkels.

Richtung von der Vorderkante. Bezeichnet man mit t die Profiltiefe, d. h. die Länge der Profilsehne, so wird das Moment in der Form

$$M = c_m\, t\, F\, q \quad \text{(M)}$$

angegeben, wobei die dimensionslose Zahl c_m nun ebenfalls als Funktion des Anstellwinkels zu betrachten ist. Abb. 21 gibt eine solche empirische Abhängigkeit c_m als

Funktion von α und Abb. 22 die sich daraus ergebende Abhängigkeit der Druckpunktslage. Man pflegt die Druckpunktswanderung in Abhängigkeit vom Anstellwinkel so aufzutragen, daß man das Verhältnis von $VD = s$ zur Flügeltiefe t angibt. Der Wert s/t wird da unendlich groß, wo der Auftrieb verschwindet.

Wir werden im 6. Kapitel auf die Meßergebnisse ausführlich zurückkommen. Vorher wollen wir in den ersten Kapiteln einen Überblick darüber geben, wieweit es der theoretischen Erkenntnis bisher schon gelungen ist, einen Einblick in die Natur der Luftkräfte zu gewinnen.

I. Kapitel.

Ergebnisse der klassischen Hydrodynamik.

§ 1. Grundbegriffe.

In der allgemeinen Einleitung wurde ausgeführt, daß und warum wir die Luft als eine inkompressible Flüssigkeit ansehen können, und wir erkannten, daß die innere Reibung dieser Flüssigkeit verhältnismäßig nur klein ist; sie macht sich nur in einem sehr kleinen Gebiet in der unmittelbaren Umgebung des Tragflügels, in der sogenannten Grenzschicht, von der später die Rede sein soll, bemerkbar. Die Vorgänge in der Grenzschicht werden für einen Teil des Widerstandes, den sog. Profilwiderstand, von ausschlaggebender Bedeutung werden. Für den Auftrieb dagegen und für den anderen Teil des Widerstandes, den sog. induzierten Widerstand, kommt man bei Vernachlässigung der Reibung an die wirklichen Vorgänge in recht befriedigender Weise heran. Wir werden also in den ersten Kapiteln unserer Betrachtungen über die Luftkräfte von der i Reibung der Flüssigkeit ganz absehen. Dieser erste Teil der Theorie gestaltet sich dann darum so einfach, weil wir es mit einer sog. idealen Flüssigkeit, d. h. einer inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit zu tun haben, bei der wir die Ergebnisse der klassischen Hydrodynamik mit Erfolg heranziehen können.

In jedem Punkte einer strömenden Flüssigkeit hat die Geschwindigkeit des sich gerade dort befindenden Teilchens eine bestimmte Größe und eine bestimmte Richtung, sie ist also ein Vektor, den wir mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen wollen. Die Komponenten dieses Vektors nach den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems seien v_x, v_y, v_z. Von einem beliebigen Punkte des Raumes mit den Koordinaten x, y, z aus folgen wir nun der Richtung des Vektors $\mathfrak{v}$ bis zu einem unendlich benachbarten Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Von diesem aus wiederum dem dortigen Vektor bis zu einem unendlich benachbarten Punkte usw. Auf diese Weise erhalten wir eine Linie, die wir als Stromlinie bezeichnen wollen. Wenn wir den Ausgangspunkt unserer Kurvenkonstruktion verändern, so erhalten wir andere Stromlinien, die den ganzen Strömungsraum erfüllen, also eine doppelt unendliche Kurvenschar. Die Gleichungen der Geraden, in der der Vektor $\mathfrak{v}$ liegt, sind, wenn ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten dieser Geraden bedeuten

$$\frac{\xi - x}{v_x} = \frac{\eta - y}{v_y} = \frac{\zeta - z}{v_z},$$

und weil auf dieser Geraden $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ liegt, so erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

die offenbar die doppelt unendliche Schar von Stromlinien, entsprechend den beiden bei der Integration auftretenden willkürlichen Konstanten, darstellen. Diese Stromlinien werden in einem bestimmten Augenblick in jedem ihrer Punkte die Richtung der Strömung angeben; aber dieses Bild wird im allgemeinen mit der Zeit veränderlich sein. Wir werden also nicht sagen können, daß die Stromlinien die Bahnen angeben, welche die Flüssigkeitsteilchen wirklich beschreiben. Nur wenn der ganze Strömungsvorgang mit der Zeit nicht mehr veränderlich ist, wenn also der Geschwindigkeitsvektor sich zwar von Punkt zu Punkt durch den Strömungsraum ändert, in jedem Punkte aber immer unverändert bleibt — wir wollen diesen Zustand als stationär bezeichnen — haben die Stromlinien eine dauernde Gestalt und geben somit die wirklichen Bahnen der Flüssigkeitsteilchen an. Wir werden uns meist mit stationären Strömungen zu beschäftigen haben.

Wir greifen nun irgendeine Stromlinie heraus und legen durch einen ihrer Punkte ein unendlich kleines Flächenelement do senkrecht zur Tangente an die Stromlinie. Durch alle Punkte von do legen wir dann die zugehörigen Stromlinien, so werden sich alle diese Stromlinien nur unendlich wenig von der Ausgangslinie unterscheiden und, solange $\mathfrak{v}$ endlich bleibt, werden sich auch nicht zwei von ihnen schneiden können. Die Gesamtheit der durch do hindurchgehenden Stromlinien bildet eine Stromröhre, ihr Inhalt einen Stromfaden. Da die Flüssigkeit ja überall der Stromlinie in ihrer Geschwindigkeitsrichtung folgt, kann durch die Wand der Stromröhre Flüssigkeit weder ein- noch austreten; die Flüssigkeit fließt in der Röhre also wie in einem festen Kanal. Denkt man sich nun den Strömungsraum in solche Stromröhren eingeteilt, so erhält man ein anschauliches Momentbild des ganzen Strömungsverlaufes, das für die stationäre Strömung zu einem dauernden wird.

Es muß aber bemerkt werden, daß sich diese Darstellung der Strömung nicht um die Fortbewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen kümmert, sondern daß sie nur den Strömungsverlauf in jedem Raumpunkte wiedergibt. Wir werden aber mit dieser Darstellung fast bei allen unseren Betrachtungen auskommen.

Der in der Flüssigkeit herrschende Druck, der im allgemeinen eine Funktion von x, y, z und t sein wird, hat in einer idealen Flüssigkeit eine bestimmte Größe, ist aber in jedem Punkte nach allen Richtungen hin der gleiche. Eine solche Funktion des Ortes ohne Richtungsangabe heißt ein Skalar. Um die Differentialgleichungen der Bewegung zu erhalten, greifen wir ein den Punkt x, y, z enthaltendes Raumelement mit den Kanten dx, dy, dz heraus und setzen für dieses Element die Newtonsche Gleichung für jede der drei Koordinatenrichtungen an. Von dem Gewicht der Flüssigkeitsteilchen können wir in der Flugtechnik absehen, da es ja gegenüber dem unvergleichlich viel größeren Gewicht der Flugzeugteile nicht in Betracht kommt. Dann bleibt an Kräften, die auf das Raumelement wirken, nur noch der Druck übrig. Bezeichnet p den Druck pro Quadrateinheit, so ist der

nach dem Inneren des Elementes gerichtete Drucküberschuß in Richtung der drei Achsen bzw. $-\frac{\partial p}{\partial x}dx$, $-\frac{\partial p}{\partial y}dy$, $-\frac{\partial p}{\partial z}dz$. Ist also ρ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, d. h. das Gewicht der Flüssigkeit pro Raumeinheit, so lauten die Newtonschen Gleichungen im vorliegenden Falle

$$\rho\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x},\ \rho\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y},\ \rho\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad \ldots\ldots (2)$$

die man als die Eulerschen Differentialgleichungen der Bewegung bezeichnet. $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ bilden die Komponenten eines Vektors, den man als Gradienten von p zu bezeichnen pflegt

$$\operatorname{grad} p = \left\{\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Mit Benutzung dieser Bezeichnung lassen sich die drei Gleichungen (2) in eine Vektorgleichung

$$\rho\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p \quad \ldots\ldots (2a)$$

zusammenfassen.

Für $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ haben wir im allgemeinen

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial z}v_z.$$

Ist insbesondere der Zustand stationär, so wird $\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} = 0$.

Zu den Eulerschen Gleichungen tritt noch eine weitere Gleichung hinzu, welche die Konstanz der Masse und die Inkompressibilität der Flüssigkeit zum Ausdruck bringt. Betrachtet man die durch alle Begrenzungsflächen unseres Raumelementes ein- und austretenden Flüssigkeitsmengen, so muß der Überschuß der austretenden über die eintretenden Mengen $\rho\,dy\,dz\,(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx) - dy\,dz\,v_x \ldots$ gleich Null sein; wir erhalten also die sog. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Der Ausdruck $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ wird die Divergenz des Geschwindigkeitsvektors genannt. Bei Benutzung dieser Bezeichnung lautet die Gleichung (4)

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \quad \ldots\ldots (4a)$$

An solchen Stellen, wo die Flüssigkeit mit einer Wand oder mit einem eingetauchten festen Körper in Berührung kommt, haben wir noch eine Grenzbedingung für die Flüssigkeit aufzustellen.

Ist (Abb. 23) N die nach dem Innern gerichtete Normalkomponente der Geschwindigkeit des eingetauchten Körpers oder der Wand und v_n die Komponente von $\mathfrak{v}$ senkrecht zur Körperoberfläche, so muß offenbar, wenn keine Unstetigkeiten auftreten sollen,

$$v_n = N \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

sein. Insbesondere also, wenn $N = 0$ ist, haben wir

$$v_n = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5a)$$

Wir wollen uns nun zunächst mit einer wichtigen Klasse von Strömungsvorgängen beschäftigen, bei denen die Eulerschen Differentialgleichungen eine besonders einfache Lösung zulassen. Zu dem Zwecke wollen wir um den Punkt x, y, z einen kleinen Flüssigkeitsteil abgrenzen, z. B. eine kleine Kugel, und wollen uns fragen, welche Veränderung er in der Zeit dt erfährt.

Abb. 23. Grenzfläche zwischen festem Körpe[r und] Flüssigkeit.

Der Punkt x, y, z ist nach Verlauf der Zeit dt in $x + v_x\,dt$, $y + v_y\,dt$, $z + v_z\,dt$ übergangen. Ein benachbarter Punkt, der anfangs die Lage $x + dx, y + dy, z + dz$ hatte, ist nach der Zeit dt in $x + dx + (v_x + dv_x)\,dt$, $y + dy + (v_y + dv_y)\,dt$, $z + dz + (v_z + dv_z)\,dt$ übergangen. Aus den relativen Entfernungen dx, dy, dz ist also $d'x = dx + dv_x\,dt$, $d'y = dy + dv_y\,dt$, $d'z = dz + dv_z\,dt$ geworden, oder:

$$\begin{aligned}
d'x &= dx\left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x}dt\right) + dy\,\frac{\partial v_x}{\partial y}dt + dz\,\frac{\partial v_x}{\partial z}dt,\\
d'y &= dx\,\frac{\partial v_y}{\partial x}\,dt + dy\left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y}dt\right) + dz\,\frac{\partial v_y}{\partial z}dt,\\
d'z &= dx\,\frac{\partial v_z}{\partial x}\,dt + dy\,\frac{\partial v_z}{\partial y}dt + dz\left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z}dt\right).
\end{aligned}$$

Man kann beweisen, worauf wir hier nicht eingehen wollen, daß eine solche sog. infinitesimale Transformation, in die Summe von zwei Transformationen zerlegt werden kann. Die erste stellt eine Bewegung des Flüssigkeitsteilchens dar, die man als reine Gestaltsveränderung (Deformation) ansehen kann; es bleiben dabei drei aufeinander senkrechte Achsen, die Achsen der Deformation, in ihrer Richtung ungeändert, so daß z. B. eine Kugel in ein Ellipsoid übergeht. Wegen der Volumenbeständigkeit unserer Flüssigkeit ist hier die im allgemeinen mit der Deformation verbundene Volumenänderung gleich Null. Die zweite Transformation stellt eine Drehung um eine Achse mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit dar; diese Drehung kann auch als das Ergebnis von drei Drehungen aufgefaßt werden:

um die x-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$,

„ „ y- „ „ „ „ $\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$,

„ „ z- „ „ „ „ $\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$

Eine solche Drehung können wir als Vektor auffassen; und zwar wollen wir die Drehachse als Richtung und den doppelten Wert der Winkelgeschwindigkeit als Größe des Vektors nehmen. Wir führen also einen Vektor $\mathfrak{c}$ mit den Komponenten

$$c_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad c_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad c_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad (6)$$

ein und nennen ihn die Rotation des Geschwindigkeitsvektors

$$\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

§ 2. Die Potentialströmung.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß bei der Flüssigkeitsbewegung keine Drehungen der kleinsten Teile auftreten. Das würde natürlich nicht ausschließen, daß die Flüssigkeit als Ganzes eine drehende Bewegung ausführt. Wenn bei den Elementarteilen der Flüssigkeit also nur Gestaltsänderungen, aber keine vorkommen, so heißt das:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0, \text{ d. h. } \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad (7)$$

Diese Gleichungen drücken aber nichts anderes als die Bedingung dafür aus, daß $v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$ ein vollständiges Differential einer Funktion φ ist, $d\varphi = v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$, so daß also

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (8)$$

Die Funktion φ wollen wir Geschwindigkeitspotential nennen und sagen: Wenn die Bedingungen (7) erfüllt sind, wenn die Flüssigkeit also in den kleinsten Teilen drehungsfrei ist, so besitzt diese Flüssigkeitsbewegung ein Geschwindigkeitspotential. Wir sehen, daß φ einen nur bis auf eine Konstante bestimmten Wert besitzt, da ja noch ein beliebiger, von x, y, z unabhängiger Wert hinzugefügt werden kann, der im Falle der stationären Strömung auch von der Zeit unabhängig ist. In der Bezeichnungsweise (3) besagen die Gleichungen (8)

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9)$$

Ist s_0 irgendeine Stelle x_0, y_0, z_0 und legen wir von dort aus nach x, y, z irgendeine Kurve, so ist:

$$\varphi = \int_{s_0}^{s} d\varphi = \int_{s_0}^{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (10)$$

wenn das Integral über die betreffende Kurve genommen wird, und ds ihr Bogendifferential bedeutet.

Die Flächen $\varphi = \text{const}$ stellen eine unendliche Schar von Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials dar. Durch die Gleichung

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (11)$$

d. h. durch die Stromlinien, wird also die doppelt unendliche Schar von Kurven dargestellt, die überall auf den Flächen gleichen Potentials senkrecht stehen.

Von irgendeinem Punkte (x, y, z) zeichnen wir eine Richtung L und gehen auf ihr um ds fort, dann nennen wir $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ die Steigung von φ in Richtung L. Sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus von L, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos\gamma$, d. h. aber $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ stellt das sog. innere Produkt des Vektors grad φ und des Einheitsvektors $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ dar, so daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = |\operatorname{grad}\varphi| \cos(L, \operatorname{grad}\varphi) \tag{12}$$

wenn $|\operatorname{grad}\varphi|$ den absoluten Betrag des in (8) eingeführten Vektors bedeutet. Aus (12) folgt, daß die Steigung $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ in Richtung grad φ ein Maximum besitzt. Wir sehen also, daß die Stromlinien überall die Richtung des Gradienten von φ, d. h. die Richtung größten Anstieges von φ besitzen.

Aus der Gleichung (4a), $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$, folgt überdies

$$\triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{13}$$

die sog. Laplacesche Gleichung.

Wenn das Geschwindigkeitspotential φ existiert, so folgt aus der ersten der Eulerschen Gleichungen (2)

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z\right] = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

also wegen (7)

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_z\right] = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

d. h.

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

oder durch Integration nach x

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = -p + C(t),$$

wo $C(t)$ von x und ebenso nach den beiden anderen Eulerschen Gleichungen auch von y und z unabhängig ist. Im Falle der stationären Strömung ist also

$$p = \text{Const} - \frac{\rho}{2}v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{14}$$

wenn v den Absolutwert des Geschwindigkeitsvektors bedeutet. Die Gleichung (14) wird die Bernoullische Gleichung genannt.

Bei einer stationären Bewegung läßt sich der Verlauf des Druckes längs einer Stromlinie auch für den Fall angeben, daß kein Geschwindigkeitspotential existiert. Ist nämlich f der Querschnitt der Stromlinie und ds ihr Bogenelement, so ist die auf das Raumelement $f\,ds$ wirkende Kraft einerseits $\rho f\,ds \cdot \frac{\partial v}{\partial s}\,v$, andererseits

Wir erhalten also

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s}$$

oder

$$p = \text{Const} - \frac{\rho}{2} v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14a)$$

was formal mit (14) übereinstimmt. Es muß aber ausdrücklich bemerkt werden, daß bei (14), wo ein Geschwindigkeitspotential vorausgesetzt war, C eine absolute Konstante ist, während in (14a) C zwar für eine Stromlinie konstant ist, aber von Stromlinie zu Stromlinie andere Werte annehmen kann.

Es sei eine geschlossene Kurve C im Flüssigkeitsraum gezeichnet, die als die Begrenzung einer Fläche F angesehen werden kann, welche ganz im Flüssigkeitsraum verläuft. Dann gilt für diese Fläche F und ihre Begrenzung C der sog. Stokessche Satz:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\nu, x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\nu, y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\nu, z)\; do$$
$$= \int (v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz);$$

hierbei bedeutet do ein Element der Fläche F und ν die Normale dieses Elementes, und zwar in der Richtung, daß 1. das Bogenelement ds von C, 2. die nach dem Inneren der Fläche gerichtete Normale zu ds und 3. die Normale zu do in dieser Reihenfolge ein sog. Rechtssystem (Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand) bilden. Ist also c_ν die Komponente des Vektors $\mathfrak{c}$ in Richtung ν und v_s die Komponente des Vektors $\mathfrak{v}$ in Richtung ds, wobei ds positiv in der positiven Richtung von C (Fläche zur Linken) zu nehmen ist, dann kann die Stokessche Gleichung auch einfach so geschrieben werden:

$$\int\limits_F c_\nu\, do = \int\limits_C v_s\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Wenn die Flüssigkeit rotationslos ist, der Vektor $\mathfrak{c}$ somit den Wert Null hat, so lehrt die Stokessche Gleichung, daß $\int\limits_C v_s\, ds = \int\limits_C d\varphi = 0$ ist, d. h. φ hat denselben Wert wiedererhalten, wenn man von irgendeinem Punkte von C ausgehend auf C herumgeht und zum Ausgangspunkte zurückkehrt. Wenn alle Kurven, die man im Flüssigkeitsraum zeichnet, von der Art sind, daß sie als Begrenzungen eines ganz im Flüssigkeitsinneren verlaufenden Flächenstückes angesehen werden

können, wenn also jede geschlossene Kurve dieses Raumes in einen Punkt zusammengezogen werden kann, so sagt man, daß der Flüssigkeitsraum einfach zusammenhängend ist. Einfach zusammenhängend ist also z. B. der Luftraum außerhalb eines Flugzeuges, gleichgültig ob man sich diesen Luftraum nach allen Seiten unendlich ausgedehnt oder auf einer Seite durch die feste Erdoberfläche begrenzt denken will. Wir erhalten das Resultat: Wenn in einem einfach zusammenhängenden Raume die Flüssigkeit in den kleinsten Teilen drehungsfrei ist, so ist das daselbst existierende Geschwindigkeitspotential eine eindeutige Funktion des Ortes.

§ 3. Die Kräfte bei der Potentialströmung.

Wir lösen nunmehr die folgende Aufgabe:

Ein Körper befinde sich in einem unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsstrome, der in großer Entfernung vom Körper den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_\infty$ mit den Komponenten a, b, c besitzt, in Ruhe. Welches ist dann das Geschwindigkeitspotential und wie groß ist die Kraft, die der Flüssigkeitsstrom auf den Körper ausübt, wenn die Flüssigkeit in ihrer ganzen Ausdehnung drehungsfrei ist?

Diese Frage hat für uns ein besonderes Interesse, denn unter den Bedingungen dieses Körpers befindet sich ein Flugzeug in einem Luftstrom, da es offenbar gleichgültig ist, ob wir uns die Luft in Ruhe und das Flugzeug dagegen bewegt oder umgekehrt das Flugzeug in Ruhe und die Luft dagegen bewegt denken.

Der Einfachheit wegen wollen wir den Körper als Kugel nehmen und ihren Mittelpunkt als Koordinatenanfangspunkt wählen. Nach unserer Voraussetzung muß ein eindeutiges Geschwindigkeitspotential existieren und für dieses Potential haben wir, entsprechend (5a) die für die Oberfläche der Kugel geltende Grenzbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

zu erfüllen, wenn wieder n die nach dem Inneren der Kugel gerichtete Flächennormale bedeutet.

Unsere Aufgabe kommt darauf hinaus: Es soll diejenige Lösung der Laplaceschen Gleichung (13)

$$\triangle \varphi = 0$$

gefunden werden, die längs der Kugeloberfläche die Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ erfüllt und die überdies die Eigenschaft hat, daß im Unendlichen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a, \; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b, \; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = c$$

ist.

Die Lösung dieser Aufgabe ist:

$$\varphi = (a\,x + b\,y + c\,z)\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{R^3}{r^3}\right),$$

wenn R den Kugelradius und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Entfernung des Punktes x, y, z vom Koordinatenursprung bedeutet. Die Rechnung ergibt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \quad + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \quad \frac{3}{2} (ax + by + cz) \frac{R}{r^5}$$

$$\frac{3}{2} (ax + by + cz) \frac{R^3}{r^5} + \frac{15}{2} (ax + by + cz) \frac{R^3 x^2}{r^7}$$

und ebenso die Ableitungen nach y und z. Demnach wird

Da an der Kugeloberfläche die Richtung der Normalen der von r entgegengesetzt ist, bilden wir

$$\partial \varphi \quad 1$$

und man sieht, daß dieser Ausdruck für $r = R$, wie verlangt, den Wert Null hat.

Man kann zeigen, worauf wir hier nicht eingehen, daß unsere Lösung eindeutig bestimmt ist, d. h. daß es keine zweite Lösung derselben Aufgabe gibt.

Aus diesem Resultat lernen wir Folgendes: Die ungestörte Strömung, wie sie in großer Entfernung von der Kugel vor sich geht, ist

$$cz; \; v_{x\infty} = a, \; v_{y\infty} = b, \; v_{z\infty} = c.$$

Betrachten wir also die durch Anwesenheit der Kugel ... Störung, also die Unterschiede $\varphi - \varphi_\infty$, ... $v_{x\infty}$, $v_y -$ ... so ... r, daß diese Störung für große Werte von r bei φ von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, bei v_x, v_y, v_z von der Ordnung $\frac{1}{r^3}$ verschwindet. Man erkennt das am besten, wenn man $x = r \cos \alpha$, $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$ in obige Differenzausdrücke einsetzt.

Wir haben diese Tatsache für eine Kugel berechnet, man kann aber zeigen, daß diese Störungen, wenn sie von irgendeinem anderen Körper herrühren, im Unendlichen von genau derselben Ordnung verschwinden.

Für die folgenden Betrachtungen stützen wir uns auf den sog. Impulssatz der Mechanik. Unter dem Impuls oder der Bewegungsgröße einer Masse versteht man das Produkt aus der Masse multipliziert mit ihrer Geschwindigkeit.

Wir nehmen an, daß die Bewegung stationär geworden ist und grenzen uns in dem Flüssigkeitsraum irgendeinen bestimmten Raumteil ab; dann besagt der Impulssatz, daß die Summe aller auf die Begrenzungsflächen dieses Raumteiles wirkenden Kräfte gleich dem Überschuß der aus dem Raumteil pro Zeiteinheit austretenden Impulsmenge über die in ihn eintretende ist.

Diesen Impulssatz wollen wir auf einen Teil unseres Flüssigkeitsraumes anwenden, der einerseits von der Oberfläche des eingetauchten Körpers, andererseits von einer mit großem Radius um ihn herumgelegten Kugel, der sog. Kontrollfläche begrenzt wird. Wenn wir uns denken, daß sich die Flüssigkeit nach allen

Seiten ins Unendliche erstreckt, können wir den Radius dieser Kontrollfläche beliebig groß werden lassen.

Hätten wir nur die ungestörte Strömung, so ist klar, daß dann sowohl der Druck als auch die Impulswanderung über die ganze Kontrollfläche erstreckt, den Wert Null haben müßte. Zur Berechnung des Druckes und der Impulswanderung genügt es also, die Ausdrücke für die Störung heranzuziehen. Wir haben schon gesehen, daß diese Störung für die drei Geschwindigkeitskomponenten, wie $\frac{1}{r^3}$ mit wachsendem r verschwinden muß. Dasselbe gilt also auch für den Druck, der nach der Bernoullischen Gleichung (14) den Wert $p = \text{Const} - \frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ hat. Betrachten wir ein Flächenstück do der Kontrollfläche, so hat dieses, wenn $d\omega$ das entsprechende Stück der konzentrischen Einheitskugel bedeutet, den Wert

$$do = r^2\, d\omega.$$

Bei der Berechnung der Integrale für den Druck wie für den Impuls wird also der Wert $\frac{1}{r}$, der ja bei dieser Berechnung konstant bleibt, jedesmal vor das Integralzeichen heraustreten. Daraus folgt aber, ohne daß wir die wirklichen Werte der Integrale zu berechnen brauchen, daß ihr Grenzwert $\lim\limits_{r \to \infty}$ hier den Wert Null haben muß.

Es ist also sowohl der Gesamtdruck auf die Kontrollfläche, als auch der Impulsüberschuß gleich Null, und daraus folgt unmittelbar, daß auch die auf die Flüssigkeit längs der Körperoberfläche ausgeübte Kraft und somit auch umgekehrt die Kraft, die von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübt wird, den Wert Null haben muß.

Wir erhalten also den bemerkenswerten Satz: In einer Potentialströmung ist die Kraft, die auf irgendeinen in die Strömung eingetauchten Körper ausgeübt wird, gleich Null.

Dieses paradoxe Ergebnis hat lange Zeit der Erklärung von Auftrieb und Widerstand bei einem Flugzeug erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Wir erkennen, daß wir zur Erklärung der Kräfte, die von einer strömenden Flüssigkeit auf einen eingetauchten Körper ausgeübt werden, mit reiner Potentialströmung nicht auskommen können. Darin liegt aber eine recht erhebliche Schwierigkeit, weil ja, wie wir noch sehen werden, die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegung zeigen, daß eine Wirbelbewegung in einer Flüssigkeit nicht entstehen und nicht vergehen kann; die Wirbelbewegung müßte also von Anfang an vorhanden gewesen sein, was ebenfalls einen Widerspruch enthält. Es ist das Verdienst von Prandtl, die Aufklärung dieses Widerspruches durch die Betrachtung der Grenzschicht, die den Körper umgibt, gegeben zu haben. Wir werden sehen, daß in dieser Grenzschicht die innere Reibung der Flüssigkeit eine wesentliche Rolle spielt und daß dort also die Eulerschen Gleichungen und alle ihre Folgerungen keine Gültigkeit mehr haben. Bevor wir uns aber diesen Betrachtungen zuwenden, haben wir uns noch mit anderen Fragen zu beschäftigen.

II. Kapitel.

Der unendlich breite Tragflügel.

§ 1. Einführung der Funktionentheorie.

Der Nachweis für das Fehlen einer Kraft, welche auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper wirkt, stützte sich wesentlich darauf, daß man den Körper allseitig in eine Kontrollfläche einschließen kann. Wenn sich aber der Körper selbst ins Unendliche erstreckt, wird unsere Schlußweise hinfällig. Wir wählen also jetzt einen Zylinder mit beliebigem endlichen Querschnitt, dessen Erzeugende sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken und betrachten eine Strömung, die auf der Richtung der Erzeugenden senkrecht steht. Wenn dieser Vorgang auch nicht vollständig realisierbar ist, so wird er uns doch die Möglichkeit geben, den Strömungsverlauf an einer Stelle des Körpers zu betrachten, die sehr weit von seinen Enden entfernt liegt, und wir werden sehen, daß wir auf diese Weise in den Stand gesetzt werden, eine recht brauchbare Theorie des Auftriebs eines Tragflügels zu erhalten.

Wir verlegen die z-Achse in die Richtung der Erzeugenden unseres doppelt unendlich langen Zylinders, dann haben wir, da die Strömung senkrecht zur z-Achse erfolgt in dieser Richtung keinerlei Geschwindigkeit und auch kein Druckgefälle zu erwarten. Vielmehr verlaufen alle Stromlinien zur z-Achse senkrecht, und wir werden ein getreues Abbild des Strömungsvorganges für ein beliebiges z erhalten, wenn wir die Strömung in der xy-Ebene untersuchen. Wir haben so den Vorteil, daß nur noch zwei Variablen x und y zu betrachten sind, d. h. wir haben uns jetzt nur noch mit einem zweidimensionalen ebenen Problem zu beschäftigen.

Die früher betrachteten Flächen gleichen Potentials $\varphi = \text{Const}$ erscheinen in der xy-Ebene als Linien

$$\varphi(x, y) = \text{Const} \qquad (1)$$

gleichen Potentials. Die Stromlinien stehen überall auf diesen Linien $\varphi = \text{Const}$ senkrecht und ihre Differentialgleichung ist nach I (11)

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dy = 0 \qquad (2)$$

Da die Potentialfunktion φ nach I (13) der Laplaceschen Gleichung

$$\triangle \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

genügt, so lehrt die Funktionentheorie, daß man durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (4)$$

eine neue Funktion ψ einführen kann, mit deren Hilfe (2) in

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = 0 \qquad (2a)$$

übergeht, so daß also

$$\psi(x, y) = \text{Const} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

die Gleichungen der Stromlinien ergibt. Aus den Gleichungen (4) folgt sogleich, daß auch ψ der Laplaceschen Gleichung

genügen muß.

Die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen gibt danach die Möglichkeit, unmittelbar eine beliebige Anzahl von Linien gleichen Potentials und die dazugehörigen Stromlinien anzugeben.

Betrachtet man nämlich irgendeine analytische Funktion der komplexen Variablen

$$z = x + yi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wo i die imaginäre Einheit bedeutet,

$$w = u + iv = f(z),$$

so ist

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz},\quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{dw}{dz}$$

also

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen stimmen genau mit den Bedingungsgleichungen (4) überein, und man erkennt also, daß durch jede analytische Funktion einer komplexen Variablen eine Potentialströmung dargestellt wird. Setzt man den reellen Teil dieser Funktion gleich einer Konstanten, so erhält man die Linien gleichen Potentials durch den imaginären Teil die Stromlinien. Um die Strömung um einen gegebenen Körperumriß, eine gegebene „Kontur“ zu erhalten, hat man nur die Funktion so einzurichten, daß diese Kontur in einer Stromlinie liegt. Wir werden uns später mit der Frage zu beschäftigen haben, wie man eine solche Funktion mit beliebiger Annäherung an eine gegebene Kontur herstellen kann.

Zunächst bemerken wir folgendes: Bezeichnen wir den Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten v_x und v_y mit

$$\mathfrak{v} = v_x + iv_y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

sein Spiegelbild, das man durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ erhält, mit

$$\mathfrak{v}' = v_x - iv_y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8a)$$

so erhält man, wenn

$$w = w(z) = \varphi + i\psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

gesetzt wird,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_x - i\,v_y = \mathfrak{v}' \quad \ldots \quad (10)$$

Man nennt w den komplexen Wert des Potentials und den gespiegelten Vektor $\mathfrak{v}'$ den komplexen Wert der Geschwindigkeit. Die sog. Norm dieses Vektors ist:

Konstruiert man das zu den Linien $\varphi = c_1$ und $\psi = c_2$ gehörige Kurvennetz, indem man die Konstanten c_1 und c_2 immer um denselben Betrag zunehmen läßt (vgl. Abb. 24), so zeigt sich, weil ja der Gradient von φ in der Richtung der Stromlinien und der Gradient von ψ in Richtung der Niveaulinien gelegen ist, daß (vgl. I, 12)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big| = |\operatorname{grad} \varphi| =$$

$$= |\operatorname{grad} \psi| =$$

Wenn also $d\varphi$ und $d\psi$ einander gleich gewählt werden, so müssen auch dn_1 und dn_2 einander gleich sein, d. h. unser Kurvennetz muß quadratische Maschen haben.

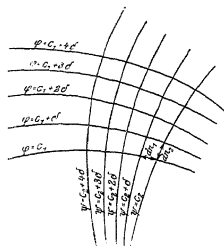



Abb. 24.

Dieses Kurvennetz gibt dann bei äquidistanten Parameterwerten (Konstanten c_1, c_2) schon ein anschauliches Bild der Strömung. Wo die Stromlinien, also auch die Niveaulinien enger aneinander liegen, ist $dn_1 = dn_2$ kleiner, also $v = \operatorname{grad} \varphi$ größer und somit nach der Bernoullischen Gleichung $p = C - \frac{1}{2}\rho v^2$ (I, 14) der Druck geringer als an solchen Stellen, wo sie weiter auseinander liegen. Wir betrachten danach den Verlauf des Druckes, wie er sich bei einer Göttinger Messung ergeben hat, längs eines Tragflügelprofils. Ist v_∞ der Wert der Geschwindigkeit in großer Entfernung von dem Tragflügel, so ist der entsprechende Druck

also

$$p - p_\infty =$$

In der Abb. 25 sind die Werte $\frac{1}{2}\rho v^2$ längs der Flügelsehne aufgetragen, und zwar so, daß der Sehne selbst der Wert $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$ entspricht. Dann ergibt sich auf der Unterseite ein Überdruck, auf der Oberseite ein Unterdruck.

Der Anblick dieser Abbildung klärt einen in Laienkreisen noch immer verbreiteten Irrtum auf. Der Auftrieb kommt **nicht** so zustande, daß der Tragflügel von einem Luftpolster größerer Dichtigkeit getragen wird, sondern es zeigt sich, daß ungefähr zwei Drittel des Auftriebes durch eine nach oben gerichtete Saugwirkung hervorgerufen wird.

Würde man in unsere Abbildung gleichzeitig die Stromlinien einzeichnen, so würde sich also ergeben, daß oberhalb des Tragflügels die Stromlinien näher aneinander liegen, weil die Geschwindigkeit vergrößert ist, unten aber ihr Abstand ein größerer ist, weil die Geschwindigkeit verringert ist. Es lagert sich also über die ungestörte Strömung, wie sie in großer Entfernung von dem Tragflügel vorhanden ist, wo die Stromlinien aus einer Schar äquidistanter Parallelen bestehen, offenbar über dem

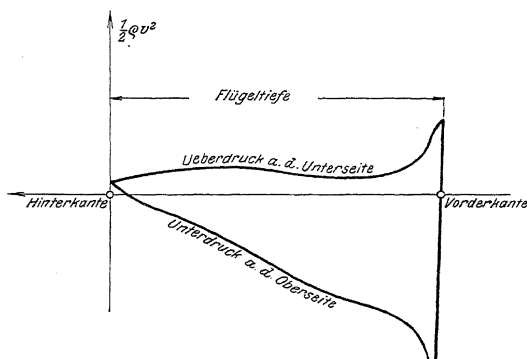



Abb. 25. Verteilung des Druckes über ein Flügelprofil.

Tragflügel eine Strömung nach hinten (die Parallelströmung vergrößernd) unter ihr eine Strömung nach vorn (die Parallelströmung verringernd). *Diese zusätzliche Strömung kann aber als eine zirkulatorische angesehen werden, wobei der Tragflügel entgegen der Richtung des Uhrzeigers umkreist wird, wenn, wie in der Abb. 25, die Vorderkante rechts vom Beschauer liegt.*

§ 2. Strömung um einen Kreiszylinder.

Ist die betrachtete Kontur ein Kreis, so ist der dazugehörige allgemeinste komplexe Wert des Potentials, d. h. also die allgemeinste Funktion $w = f(z)$, deren Imaginärteil gleich einer Konstanten gesetzt, die Kreiskontur enthält, seit langer Zeit bekannt.

Wählen wir in der xy-Ebene das Koordinatensystem so, daß die Parallelströmung v_∞ die Richtung der negativen x-Achse hat, so daß also $v_{x\infty} = -v_\infty$, $v_{y\infty} = 0$ wird, und verlegen den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt unseres Kreises mit dem Radius a, so lautet die Funktion

$$w = -v \qquad (11)$$

dabei bedeutet $ln\,z$ den natürlichen Logarithmus von z und Γ eine willkürliche Konstante. Aus (11) folgt

$$w = \varphi + i\psi = -v_\infty\left[x + iy + \frac{a^2(x - iy)}{x^2 + y^2}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi}\left[ln\sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right], \quad (12)$$

also

$$\varphi = -v_\infty\left[x + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\psi = -v_\infty\left[y - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}\right] - \frac{\Gamma}{2\pi} ln\sqrt{x^2 + y^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Wenn also $x^2 + y^2 = a^2$ in ψ eingesetzt wird, so erhält man $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln a$, also eine Konstante. Wir sehen somit, daß, wie verlangt, der Kreis in einer Stromlinie liegt.

Aus (11) folgt der komplexe Wert der Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}' = v_x - i v_y = \frac{dw}{dz} = -v_\infty + v_\infty\frac{a^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Wir erhalten also in großer Entfernung vom Kreise, für $z \to \infty$, $\mathfrak{v}' \to$ [illegible] wie es verlangt war.

Es soll hier gleich noch eine Frage beantwortet werden, die nachher von besonderer Wichtigkeit wird. Gibt es Punkte, in denen die Geschwindigkeit den Wert Null erhält? Solche Punkte wollen wir Staupunkte nennen. Zur Bestimmung der Staupunkte erhält man aus (15) die quadratische Gleichung

$$z^2 + \frac{i\Gamma}{2\pi v_\infty} z - a^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Es gibt also zwei Staupunkte z_1 und z_2, so daß

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -\frac{i\Gamma}{2\pi v_\infty} \\ z_1 - z_2 &= \frac{1}{2\pi v_\infty}\sqrt{16\pi^2 a^2 v_\infty^2 - \Gamma^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Praktisch wird uns nur der Fall interessieren, daß $\Gamma < 4\pi a v_\infty$ ist. In diesem Falle zeigen die Gleichungen (17), daß die beiden Punkte z_1 und z_2 spiegelbildlich zur y-Achse liegen, daß also

$$z_1 = x_1 - iy_1, \; z_2 = -x_1 - iy_1$$

gesetzt werden kann. Da dann $|z_1| = |z_2|$ ist, so folgt aus (16) [illegible] ist, daß also die beiden Staupunkte auf dem Kreise lie[illegible] Da für [illegible] Stromlinie $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ [illegible] $+ \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0$ ist, in den Staupunkten aber v_y [illegible] ∂x und [illegible] $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ verschwinden, so wird hier $\frac{dy}{dx}$ unbestimmt. In diesen Staupunkten findet Spaltung der Strömung statt. Wir wollen diese Punkte auch darum Spaltungspunkte nennen. Die aus dem Unendlichen kommende Stromlinie geht bis an die Kreiskontur heran, teilt sich hier in zwei die Kontur umschlingende Kreisbogen, die sich dann im zweiten Spaltungspunkt wieder vereinigen und in das

Unendliche weitergehen. In den Abb. 26—28 sind die Stromlinien in drei Fällen gezeichnet:

1. Abb. 26, $\Gamma = 0$. Die Gleichungen der Stromlinien lauten jetzt

$$y - \frac{a^2 y}{x^2} = c$$

Für $c = 0$ wird $y = 0$ oder $x^2 + y^2 = a^2$. Die Spaltungspunkte liegen auf der x-Achse. Vertauscht man y mit $-y$, so bedeutet das für die betreffende Stromlinie nur den Übergang von $+c$ zu $-c$. Die Stromlinien verlaufen symmetrisch zur x-Achse, liegen also über und unter der Kontur gleich dicht; somit ist also der Druck beiderseits gleich groß, und es kann auch keine Kraft senkrecht zur x-Achse, d. h. zur Strömungsrichtung, auftreten. Diese Strömung muß also ohne Auftrieb auf die Kontur verlaufen.

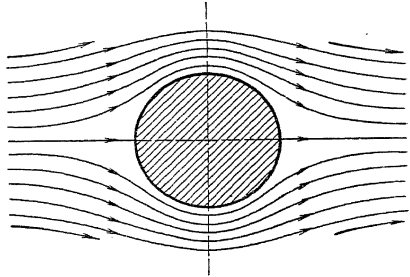



Abb. 26.
Parallelströmung um den Kreiszylinder.

2. Abb. 27, $v_\infty = 0$. Jetzt lauten die Gleichungen der Stromlinien $\ln (x^2 + y^2) = \text{Const}$, oder $x^2 + y^2 = c$. Die Stromlinien sind also Kreise, die zu dem gegebenen Kreise $x^2 + y^2 = a^2$ konzentrisch liegen. Hier herrscht demnach nach allen Seiten Symmetrie, so daß auch der Druck vollständig symmetrisch verteilt ist. Es handelt sich um eine Z i r k u l a t i o n s s t r ö m u n g, d. h. eine die Kontur umkreisende Strömung, womit natürlich keine Rotation der kleinsten Teile der Flüssigkeit verbunden ist. Man sieht, daß auch diese Zirkulationsströmung keine Kraft auf die Kontur ausüben kann.

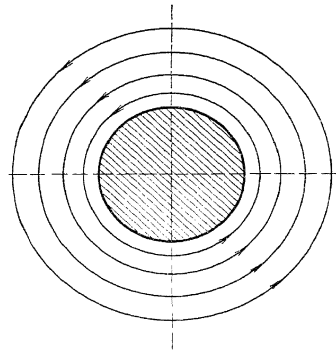



Abb. 27.
Zirkulationsströmung um den Kreiszylinder.

3. Abb. 28, sowohl Γ als auch v_∞ von Null verschieden. Diese Strömung setzt sich durch geometrische Addition der unter 1 und 2 angegebenen Strömungen zusammen. Die Abb. 28 zeigt, daß jetzt die Stromlinien oberhalb der Kontur enger aneinander rücken als unterhalb, so daß wir also nur in diesem Falle eine Kraft senkrecht zur Strömungsrichtung zu erwarten haben. Eine genauere Rechnung, die wir später wieder mit dem Impulssatz durchführen werden, wird zeigen, daß sich jetzt tatsächlich eine Kraft ergibt, die sowohl Γ als auch v_∞ proportional ist. Die Erörterung der Frage,

wie eine solche Zirkulationsströmung, deren Vorhandensein zur Entstehung einer Kraft notwendig ist, in der Flüssigkeit auftreten kann, muß einer späteren Besprechung vorbehalten bleiben. Im folgenden wollen wir eine solche Zirkulation einfach als vorhanden annehmen.

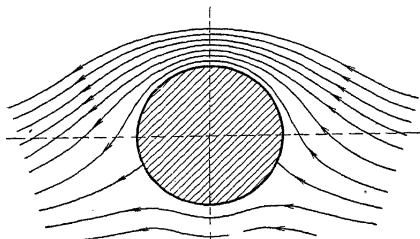



Abb. 28. Zusammengesetzte Parallel- und Zirkulationsströmung um den Kreiszylinder.

In I § 3 wurde auseinandergesetzt, daß φ eine eindeutige Funktion wird, wenn der Raum einfach zusammenhängend ist. Da die unendliche Ebene, aus der eine Kontur herausgeschnitten ist, nicht mehr einfach zusammenhängend bleibt, ist auch keine Eindeutigkeit von φ mehr zu erwarten. In der Tat zeigen ja die Gleichungen (12) und (13), daß weder das komplexe Potential w noch das Potential φ eindeutige Funktionen sind, wenn $\Gamma \neq 0$ ist.

Für zwei Funktionen v_x und v_y, die eindeutig und stetig sind, gilt, dem Stokesschen Satze (S. 42) für die Ebene entsprechend, der Integralsatz

$$\iint \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx\, dy = \int (v_x dx + v_y dy), \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

wo das Integral der linken Seite über ein begrenztes Stück der Ebene und das der rechten Seite über seine Begrenzung zu erstrecken ist. Wenn man also diese Kurve

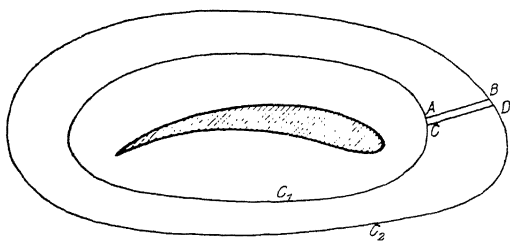



Abb. 29.

in einen Punkt zusammenziehen kann, ohne die Flüssigkeit zu verlassen, so ist das Integral

$$\int (v_x\, dx + v_y\, dy) = \int d\varphi$$

noch immer gleich Null. Wenn aber die Kurve C die Kontur umschlingt, kann das Flächenintegral von Null verschieden sein, und es ist dann $\int_C d\varphi$ ebenfalls nicht Null.

Betrachtet man aber zwei geschlossene, die Kontur umschlingende Kurven C_1 und C_2 (Abb. 29) und verbindet sie durch zwei unendlich benachbarte Strecken AB und CD, so ist dem Flächenraum, der von C_1, CD, C_2, BA begrenzt wird, das Flächenintegral und also auch das Begrenzungsintegral gleich Null, d. h.

$$d\varphi \qquad d\varphi \quad - \int_{C_2} d\varphi + \int_B^A d\varphi = 0,$$

und also, da $\int^D d\varphi = \int^B d\varphi$

$$\int_{C_1} d\varphi = \int_{C_2} d\varphi \tag{19}$$

Daraus folgt, daß das über eine beliebige, die Kontur umschlingende Kurve C erstreckte Integral ebensogroß ist, wie das Integral über die Kontur selbst.

Zur Berechnung eines solchen Integrals bemerken wir noch folgendes: Da $\mathfrak{v}' = \frac{dw}{dz}$, wenn der Raum wirbelfrei ist, eine in der ganzen Ebene eindeutige und stetige Funktion von z sein muß, so lehrt der Cauchysche Satz der Funktionentheorie, daß

$$\int_K dw = \int_C dw,$$

wenn K die Kontur und C eine sie umschließende Kurve bedeutet. Nun ist

$$\int_K dw = \int_K d\varphi + i \int_K d\psi.$$

Da aber die Kontur eine Linie $\psi = \text{Const}$ ist, muß $\int_K d\psi = 0$ sein. Also erhalten wir das Resultat:

$$\int_C d\varphi = \int_K d\varphi = \int_K dw = \int_C dw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{20}$$

Wenden wir dieses Ergebnis z. B. auf unsere Kreiskontur an, so erhalten wir

$$\int_C \quad = \int_K dw = \Big| - v_\infty z - \quad \frac{\imath^2}{z} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z \Big]^{\text{Endwert von } z}_{\text{Anfangswert von } z.}$$

Da sich beim Umlauf um die Kontur $\ln z$ um $2\pi i$ vermehrt, so erhält man

$$\int_C d\varphi = \int_C dw = \Gamma \tag{21}$$

oder auch, weil $dw = \mathfrak{v}' dz$ ist:

$$\Gamma = \tag{22}$$

Wir haben noch zu bemerken, daß der Wert dieses Integrals, den wir die Zirkulation nennen wollen, d. h. der Wert von Γ beim Kreise vollständig beliebig bleibt. In der Tat kann der Strömungsvorgang bei beliebigem v_∞ und beliebigem Γ etwa dadurch verwirklicht werden, daß ein Ball mit einer gewissen Geschwindigkeit fortgeschleudert wird, während ihm gleichzeitig eine Drehung mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit mitgegeben wird, ein Vorgang, der z. B. beim Tennisspiel Verwendung findet.

§ 3. Konforme Abbildung.

Wir wollen nunmehr dazu übergehen, den Strömungsvorgang um eine beliebig vorgeschriebene Kontur, also z. B. um ein Tragflügelprofil zu suchen. Wir denken uns diese Kontur in der Ebene der komplexen Variablen z gezeichnet und gleichzeitig in einer anderen Ebene, deren Variable wir zum Unterschied ζ nennen wollen, den Kreis mit seinem Stromlinienbild. Wenn zwischen den beiden Variablen ζ und z durch eine beliebige analytische Funktion

$$\tag{23}$$

eine Abhängigkeit festgesetzt wird, so wollen wir zeigen, daß durch diese Beziehung irgendeine Figur der z-Ebene auf die ζ-Ebene konform, d. h. in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird.

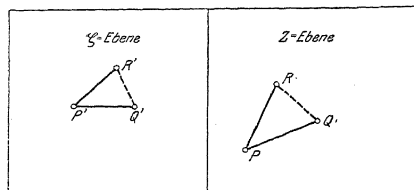



Abb. 30. Zur konformen Abbildung.

Es sei nämlich dz ein Zuwachs von z, der nach Größe und Richtung in der z-Ebene von irgendeinem Punkte P ausgehend völlig beliebig ist, und $d\zeta$ der entsprechende Zuwachs von ζ, dann ist

$$d\zeta \qquad \partial\zeta$$

da der Differentialquotient einer analytischen Funktion von der Größe und der Richtung von dz unabhängig. Ist also $PQ = dz_1$, $PR = dz_2$ in der z-Ebene (Abb. 30) und entsprechend $P'Q' = d\zeta_1$, $P'R' = d\zeta_2$ in der ζ-Ebene, so ist

$$\frac{d\zeta_1}{dz_1} = \frac{d\zeta_2}{dz_2}, \quad \frac{d\zeta_1}{d\zeta_2} = \frac{dz_1}{dz_2}.$$

Wir wollen eine komplexe Größe $x + yi$ mit dem absoluten Werte r und der Richtungsangabe φ in der Form r_φ schreiben und dem entsprechend setzen:

$$dz_1 = a_\alpha, \; dz_2 = b_\beta, \; d\zeta_1 = c_\gamma, \; d\zeta_2 = d_\delta,$$

dann erhalten wir

$$\frac{c_\gamma}{d_\delta} = \frac{a_\alpha}{b_\beta}$$

oder

$$\left(\frac{c}{d}\right)_{\gamma-\delta} = \left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}.$$

D. h. aber $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, $\qquad = \alpha - \beta$. Die beiden unendlich kleinen Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ stimmen daher im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein und sind also ähnlich. Die Funktion $\zeta = f(z)$ vermittelt also eine

in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung. Es muß aber besonders betont werden, daß die Ähnlichkeit der Abbildung an solchen Stellen aufhört, wo $\frac{d\zeta}{dz}$ gleich Null oder unendlich wird, da dann der eben gezogene Schluß nicht mehr stichhaltig ist. Diese Bemerkung wird nachher für uns von besonderer Wichtigkeit werden.

Wenn es nun gelingt, eine Funktion $\zeta = f(z)$ so aufzufinden, daß die durch sie vermittelte konforme Abbildung die beliebige in der z-Ebene gezeichnete Kontur in den Kreis der ζ-Ebene überführt, so ergibt sich folgendes: Es sei

$$w = w(\zeta) = \varphi'(\xi, \eta) + i\psi'(\xi, \eta), \; \zeta = \xi + \eta i,$$

das komplexe Potential unseres Kreises, wie wir es oben in Gleichung (11) aufgestellt haben, so geht, mittels $\zeta = f(z)$, w in eine Funktion von z

$$w = \qquad\qquad = x + yi,$$

über. Es müssen also alle Stromlinien $\psi'(\xi, \eta) =$ Const der Kreiskontur in Stromlinien $\psi(x, y) =$ Const der Strömung um die beliebige Kontur, und umgekehrt, übergehen. Mit der Auffindung der Funktion $\zeta = f(z)$, die die beliebige Kontur in den Kreis überführt, wäre also die Aufgabe der Herstellung des Stromlinienbildes, das zu einer beliebigen Kontur gehört, gelöst.

Aus der Funktionentheorie ist seit Riemann bekannt, daß man stets das Innere eines beliebigen Bereiches auf das Innere eines beliebigen Kreises abbilden kann und ebenso das Äußere des Bereiches auf das Äußere des Kreises. Wenn außerdem noch verlangt wird, daß bei dieser Abbildung sich alle Teile der z-Ebene, die unendlich weit von dem Bereiche entfernt liegen, kongruent in die ζ-Ebene abbilden sollen, so ist der Kreis der ζ-Ebene nach Größe und Lage eindeutig bestimmt. Diesen Satz ergänzt neuerdings ein Satz von Bieberbach in folgender Weise:

Es gibt stets eine und nur eine Funktion, durch die das Äußere eines einfach zusammenhängenden Bereiches, dessen Begrenzung eine geschlossene Kurve ohne Doppelpunkt ist, auf das Äußere eines Kreises schlicht, d. h. gegenseitig eindeutig, abgebildet wird, wobei das unendlich Ferne ungeändert bleibt. Diese Funktion hat folgende Entwicklung:

$$\zeta = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots \qquad (24)$$

die Konstanten $a_1, a_2, \ldots$ sind im allgemeinen beliebige komplexe Größen, und die Entwicklung ist für hinreichend große z-Werte konvergent.

Wenn z. B.

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}, \; \zeta^2 - z\zeta + a^2 = 0 \qquad (25)$$

so ist

$$\zeta = \frac{z}{2} \pm \frac{z}{2}\left(1 - \frac{4a^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{2} \pm \frac{z}{2}\left(1 - 2\frac{a^2}{z^2} - 2\frac{a^4}{z^4} - 4\frac{a^6}{z^6} + \ldots\right);$$

wenn also $z = \infty$, $\zeta = \infty$ entsprechen soll, so wird

$$\zeta = z - \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3} - 2\frac{a^6}{z^5} + \ldots \qquad (26)$$

Setzt man, um die durch diese Funktion vermittelte Abbildung zu überblicken, $\zeta = a\,e^{i\vartheta}$, so wird $\frac{a^2}{\zeta} = a\,e^{-i\vartheta}$, also $z = 2a \cos \vartheta$. Es geht also der Kreis mit dem Radius a in die beiden Seiten einer Strecke AB über (s. Abb. 31), deren Länge doppelt so groß ist wie der Durchmesser $2a$ des Kreises.

Durch diese Abbildung (25) bzw. (26) wird also die Strömung um die Kreiskontur in die Strömung um einen ebenen Tragflügel abgebildet, was uns bald von Nutzen sein wird. Wie man dasselbe Problem für beliebige Konturen zu lösen hat, werden wir später sehen.

Alle in der Flugtechnik verwendeten Tragflügel zeigen eine abgerundete Vorderkante, aber eine scharfe Hinterkante; das zugehörige Profil hat also an der Hinterseite eine Spitze. Ist $z = q$ diese Spitze und $\varkappa\pi$ der Winkel derselben (s. Abb. 32), so soll, wenn der Außenraum des Profils in den Außenraum des Kreises übergehen soll, der Winkel $2\pi - \varkappa\pi$ in den Winkel π bei demjenigen Kreispunkte p übergehen, der dem Punkte q der Kontur entspricht. Wir sehen also, daß an dieser

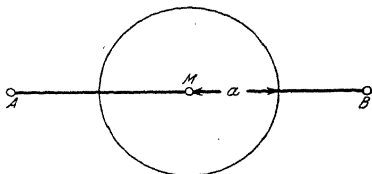



Abb. 31.
Abbildung des Kreises auf eine Strecke.

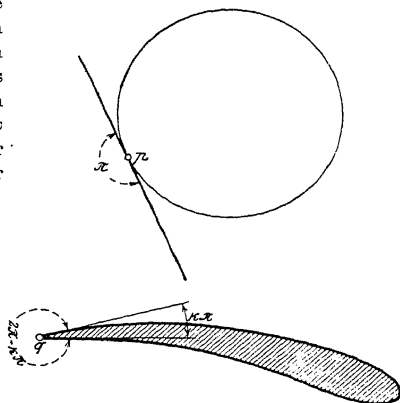



Abb. 32.
Schlichte Abbildung einer Spitze auf einen Kreis.

Stelle die Abbildung nicht konform sein kann und werden in der Tat finden, daß an einer solchen Stelle die Ableitung $\frac{d\zeta}{dz}$ unendlich wird.

Wir bilden nämlich die z-Ebene zuerst in eine z'-Ebene mittels der Funktion $z - q = z'^{\lambda}$ ab. Ist dann $z' = \rho e^{i\vartheta}$ und entsprechend $z - q = \rho^{\lambda} e^{i\lambda\vartheta}$, so beschreibt, wenn ϑ von o bis π geht, z um q einen Bogen, der von o bis $\lambda\pi$ geht. Wir haben also nur $\lambda = 2 - \varkappa$ zu wählen und erkennen, daß durch $z - q = z'^{2-\varkappa}$ die Spitze um q in der z-Ebene in eine glatte Linie der z'-Ebene abgebildet wird. Durch Umkehrung der Funktion erhält man: $z' = (z - q)^{\frac{1}{2-\varkappa}}$. Nun kann man von der z'-Ebene zur ζ-Ebene übergehen. Die Abbildung bei dem Punkte $z' = 0$, die dem Punkte $\zeta = p$ zu entsprechen hat, ist jetzt wieder konform; die abbildende Funktion wird daher eindeutig und stetig und kann nach den Gesetzen der Funktionentheorie durch eine Potenzreihe

$$\zeta - p = c_1 z' + c_2 z'^2 + \ldots$$

dargestellt werden, die für hinreichend kleine Werte von z' konvergiert. Es ergibt sich also für den Übergang aus der z-Ebene in die ζ-Ebene eine für hinreichend kleine Werte von $z - q$ konvergente Entwicklung

$$\zeta - p = c_1 (z - q)^{\frac{1}{2-\varkappa}} + c_2 (z - q)^{\frac{2}{2-\varkappa}} + \ldots,$$

mithin:

$$dz \quad - \quad 2 - \varkappa \qquad {}^{-1} + \frac{2 c_2}{2 - \varkappa} (z$$

Da aber $\varkappa < 1$ war, ist $\frac{1}{2-\varkappa} - 1$ eine negative Zahl und man erkennt, daß $\frac{d\zeta}{dz}$ für $z = q$ unendlich werden muß. Vergleichen wir nun den komplexen Wert der Geschwindigkeit $\frac{dw}{dz}$ in der z-Ebene mit dem Geschwindigkeitswert in der ζ-Ebene, so erkennen wir, daß

$$\frac{dw}{dz} \qquad dw \qquad \frac{}{dz}.$$

Da nun aber $\frac{d\zeta}{dz}$ für $z = q$ unendlich wird, so muß für die entsprechende Stelle, $\zeta = p$, $\frac{dw}{d\zeta}$ verschwinden, wenn nicht die Geschwindigkeit $\frac{dw}{dz}$ für $z = q$ unendlich groß werden soll. Wir erkennen also, daß der Hinterkante $z = q$ in der z-Ebene auf dem Kreise in der ζ-Ebene der eine Spaltungspunkt entsprechen muß.

Abb. 33.
Spaltungspunkt, gedrehtes Koordinatensystem.

Nun war nach den Gleichungen (17) bei gegebenem v_∞ die Lage der Spaltungspunkte durch die Wahl der Zirkulation Γ, die dort noch beliebig war, bestimmt. Wir sehen also jetzt, daß dadurch, daß sich die Hinterkante in den einen Spaltungspunkt abbilden muß, die Stärke der Zirkulation Γ bestimmt wird.

Für unsere weiteren Betrachtungen wird es notwendig, die Lage des Kreises in der ζ-Ebene allgemeiner anzunehmen, als wir es bisher getan haben: Wir wollen den Kreismittelpunkt in den beliebigen Punkt $\zeta = m$ verlegen und wollen die Strömung gegen die negative Richtung der ξ-Achse unter einem Winkel α verlaufen lassen; es entspricht dies einer Parallelverschiebung und Drehung des Koordinatenkreuzes, wie sie durch die Gleichung

$$\zeta' = (\zeta - m)\, e^{\alpha i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

vermittelt wird. Ersetzen wir also in der Gleichung (12) erst ζ durch ζ' und dann ζ' durch (27), so erhalten wir, wenn wir noch für das dortige v_∞ den Buchstaben u schreiben:

$$w = -u\left[(\zeta - m)\, e^{i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta - m}\, e^{-i\alpha}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

wobei die Konstante $\frac{\Gamma\alpha}{2\pi}$, die eigentlich noch hinzugefügt werden müßte, wegbleiben kann, weil sie nur das Potential φ um einen konstanten unwesentlichen Wert verändern würde. Aus (28) folgt dann

$$d w \qquad \frac{a^2}{(\zeta - m)^2}\, e^{-i\alpha}\Big] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \qquad m \qquad (29)$$

Wir sehen also, daß die Geschwindigkeit für große Werte von ζ

$$_{\infty} = -u e^{i\alpha}$$

wird, also, wie wir es verlangt haben, gegen die negative ξ-Achse unter dem Winkel α geneigt ist, und den Absolutwert u hat. Von den beiden auf dem Kreise liegenden Spaltungspunkten der Strömung habe der hintere S die Lage (vgl. Abb. 33)

$$\zeta - m = -a e^{\beta i}$$

dann hat man zu seiner Bestimmung, mit $\mathfrak{v}' = 0$, nach (29)

$$-u\left[e^{i\alpha} - e^{-i\alpha - 2i\beta}\right] + \frac{i\Gamma}{2\pi a}\, e^{-i\beta} = 0,$$

also

$$\Gamma = 4\pi a u \sin(\alpha + \beta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

wobei u den Absolutwert der Geschwindigkeit in großer Entfernung vom Kreise bedeutet.

§ 4. Der Auftrieb.

Es soll nun, und zwar für eine völlig beliebige Profilform, die Größe der Luftkraft ermittelt werden. In der z-Ebene, der Ebene des gegebenen Profils, legen wir die x-Achse in die Flügelsehne, d. h. in die Tangente, die von der Spitze der Hinterkante an das Profil gelegt ist, während die y-Achse beliebig bleibt. Die Strömung möge wieder gegen die negative Richtung der x-Achse den Winkel α bilden. Da die Abbildung $\zeta = f(z)$ das Unendliche ungeändert läßt, muß die ξ-Achse der x-Achse parallel sein, es wird also auch in der ζ-Ebene die Anströmungsrichtung mit der negativen ξ-Achse den Winkel α bilden. In der Abb. 34 sind die beiden Figuren der z- und der ζ-Ebene in eine vereinigt gezeichnet.

B' sei auf dem Kreise der Bildpunkt der Hinterkante B. Wir denken uns aus dem unendlich langen Tragflügel ein Stück von der Breite 1 m herausgeschnitten, so daß wir also einen Zylinder vor uns haben, dessen Grundfläche das Tragflügelprofil ist und dessen Höhe 1 m lang ist. Dann denken wir uns die Luftkräfte, die auf alle Teile des Zylindermantels wirken, zu einer Resultierenden vereinigt; diese Resultierende wird einen ebenen Kraftvektor $\mathfrak{P}$ darstellen:

$$\mathfrak{P} = P \;\; + i P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

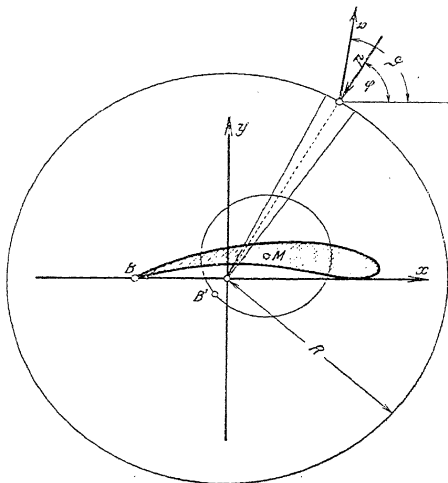
Zur Ermittlung dieser Kraft wenden wir nun wieder den Impulssatz der Mechanik an. Als Kontrollfläche wählen wir (s. Abb. 34) diesmal eine unser Profil umschließende Zylinderfläche von der Höhe 1 m, deren Grundradius ein Kreis mit sehr großem Radius R ist, welcher seinen Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt hat. Es ist dann wieder (vgl. S. 44) die Summe aller Kräfte, die auf die Grenzflächen des zwischen den beiden Zylinderflächen eingeschlossenen Raumes wirken, gleich dem Überschuß des in der Zeiteinheit durch die Grenzflächen austretenden Impulses über den eintretenden. Und zwar kommen dabei offenbar nur die Mantelflächen unseres Zylinders in Betracht. An Kräften, die auf die Grenzflächen der abgegrenzten Flüssigkeit wirken, haben wir dann:

1. auf die innere Fläche $-\mathfrak{P} = -P_x - iP_y$;
2. auf die äußere Fläche wirkt in allen Teilen der Druck.

Abb. 34.

Bezeichnen wir den Druck pro Flächeneinheit mit p, mit φ den Winkel, den die nach außen gerichtete Normale des Kreises mit der x-Achse bildet, so daß $-p\cos\varphi$ und $-p\sin\varphi$ die Komponenten von p sind, so erhalten wir im ganzen auf die äußere Fläche den Kraftvektor

$$-R\int_0^{2\pi} p\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi = -R\int_0^{2\pi} p\,e^{i\varphi}\,d\varphi.$$

Da nach der Bernoullischen Gleichung $p = C - \frac{1}{2}\varrho v^2$ ist und offenbar die Integrale $\int_0^{2\pi} C\cos\varphi\,d\varphi$ und $\int_0^{2\pi} C\sin\varphi\,d\varphi$ gleich Null sind, kann der Ausdruck für den Kraftvektor auf die Außenfläche auch so geschrieben werden:

Bezeichnet ferner ϑ den Winkel, den an irgendeiner Kreisstelle der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ mit der x-Achse bildet, so ist die Flüssigkeitsmenge, die unseren Zylinder längs des Flächenelementes $R\cdot d\varphi\cdot 1$ in der Zeiteinheit verläßt:

$$\varrho R\,d\varphi\, v\cos(\vartheta - \varphi),$$

also hat ihr Impuls den absoluten Wert

$$\rho R d\varphi v^2 \cos(\vartheta - \varphi).$$

Der Impuls der austretenden Flüssigkeitsmenge abzüglich des der eintretenden wird also wieder durch einen ebenen Vektor dargestellt:

$$\rho R \int_0^{2\pi} v^2 \cos(\vartheta - \varphi)\, e^{i\vartheta} d\varphi.$$

Der Impulssatz gibt also:

$$-\mathfrak{P} + \frac{R\rho}{2}\int_0^{2\pi} v^2 e^{i\varphi} d\varphi = R\rho \int_0^{2\pi} v^2 \cos(\vartheta - \varphi)\, e^{i\vartheta} d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Daraus folgt aber:

$$\mathfrak{P} = \frac{R\rho}{2}\int_0^{2\pi} v^2 \left[e^{i\varphi} - 2\cos(\vartheta - \varphi)\, e^{i\vartheta}\right] d\varphi.$$

Da aber $2 \cdot \cos(\vartheta - \varphi) = e^{(\vartheta - \varphi)i} + e^{-(\vartheta - \varphi)i}$ ist, so hat die Klammer offenbar den Wert: $-e^{(2\vartheta - \varphi)i}$. Wir erhalten also, da ja $\mathfrak{v} = v e^{\vartheta i}$ ist,

$$\mathfrak{P} = -\frac{R\rho}{2}\int_0^{2\pi} \mathfrak{v}^2 e^{-i\varphi} d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Wenn wir in dieser Gleichung $+i$ mit $-i$ vertauschen, so erhalten wir für das Spiegelbild unseres Kraftvektors

$$\mathfrak{P}' = -\frac{R\rho}{2}\int_0^{2\pi} \mathfrak{v}'^2 e^{i\varphi} d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (33a)$$

Diese Form ist für die Berechnung vorteilhafter, weil darin der komplexe Wert der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}' = \frac{dw}{dz}$ vorkommt. Das Integral (33a) läßt sich, wenn man bedenkt, daß auf dem Kreise $z = Re^{i\varphi}$, also $dz = iRe^{i\varphi}\, d\varphi$ ist, auch so schreiben:

$$\mathfrak{P}' = \frac{i\rho}{2}\int_K \mathfrak{v}'^2 dz = \frac{i\rho}{2}\int_K \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\ .$$

Wenn der Raum wirbelfrei ist, ist $\frac{dw}{dz}$ zwischen K und der Kontur eine eindeutige und stetige Funktion, dann kann das Integral von (34) nach dem oben zitierten Cauchyschen Satz auch durch das Integral über die Kontur C selbst ersetzt werden. In der Form, in der der Vektor $\mathfrak{P}'$ dann erscheint, wird (34) die Blasiussche Formel genannt.

Es ist nicht überflüssig zu zeigen, daß die Blasiussche Formel auch richtig bleibt, wenn im Flüssigkeitsraum Wirbel vorhanden sind, und nur ein gewisser kleiner aber endlicher Bereich um das Profil herum von Wirbeln frei ist. In diesem kleinen Bereich gilt die Bernoullische Gleichung. Nun ist (vgl. S. 48)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)^2 = v^2,$$

wenn ds ein Bogenelement der Kontur und dn die nach innen gerichtete Normale (Abb. 35) bedeutet, da ja die Kontur eine Stromlinie ist. Aus demselben Grunde ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0.$$

Also ist $p = C - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2$.

Es ist die zum Flächenstück $ds \cdot 1$ gehörige Komponente des Druckes in Richtung der

x-Achse: $p \cos(n, x)\, ds$ und in Richtung der

y-Achse: $p \cos(n, y)\, ds$. Also über die Kontur C integriert:

$$\mathfrak{P}' = P_x - i P_y = -\frac{\rho}{2}\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 ds \qquad \imath, x) - i \cos$$

oder da $dy = -ds \cos(n, x)$, $dx = ds \cos(n, y)$,

$$\mathfrak{P}' = \frac{\rho}{2}\int\limits_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 (dy + i\,dx) = \frac{i\rho}{2}\int\limits_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 (dx - i\,dy).$$

$$\mathfrak{P}' = \frac{i\rho}{2}\int\limits_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 (dx - i\,dy),$$

da $\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$ ist. Nun ist aber $ds^2 = \quad + dy^2 = (dx + i\,dy)(dx - i\,dy)$, also $dx - i \cdot dy = \frac{ds^2}{dz} = \left(\frac{ds}{dz}\right) \cdot dz$. Mithin erhält man, wegen $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial s}$

$$\mathfrak{P}' = \frac{\rho i}{2}\int\limits_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

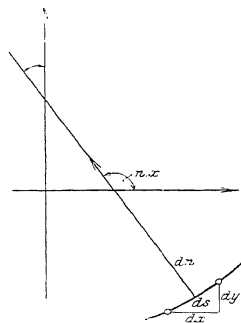
entsprechend der Gleichung (34).

Wir bleiben aber zunächst bei dem über den Kreis K erstreckten Integral. Um den Ausdruck für $\frac{dw}{dz}$, der unter dem Integral auftritt, zu berechnen, betrachten wir wieder die ζ-Ebene mit der Kreiskontur, in die sich das beliebige Profil aus der z-Ebene mittels der Funktion

Abb. 35.

$$\zeta = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \qquad \dots \quad (35)$$

abbildet, und bedenken, daß $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}$ ist. Für $\frac{dw}{d\zeta}$ benutzen wir den für die Kreiskontur berechneten Ausdruck auf S. 58 und erhalten:

$$\frac{dw}{dz} = -\left[u\, e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha} u}{(\zeta - m)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\zeta - m}\right]\left[1 - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \dots\right];$$

diesen Ausdruck entwickeln wir mit Benutzung von (35) nach fallenden Potenzen von z; dabei wird sich eine Reihe

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

ergeben, und zwar wird, wie die Ausrechnung zeigt,

$$A_0 = -ue^{i\alpha},\ A_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi},\ A_2 = a^2 u e^{-i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi} m + a$$

Danach findet man:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots \tag{36}$$

wo

$$B_0 = u^2 e^{2i\alpha},\ B_1 = \frac{i\Gamma}{\pi} ue^{i\alpha},\ B_2 = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} - 2a^2u^2 + \frac{ui\Gamma}{\pi} me^{i\alpha} - 2a_1 u^2 e^{2i\alpha} \tag{37}$$

wird.

Bei der Berechnung des Integrals $\int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$ bedenken wir, daß die Reihe (36) für große Werte von z konvergiert; um dies zum Ausdruck zu bringen, setzen wir in dieser Reihe $z = \frac{1}{t}$, also $dz = -\frac{1}{t^2} dt$. Dann wird unser Integral

$$-\int \left(\frac{B_0}{t^2} + \frac{B_1}{t} + B_2 + B_3 t + \dots\right) dt,$$

wo die Entwicklung des Integranden in der Umgebung von $t = 0$ gilt und wo das Integral über einen den Punkt $t = 0$ umschlingenden kleinen Kreis K_1 zu erstrecken ist. Während man aber in der z-Ebene bei der Integration um den Kreis K den Punkt $z = 0$ zur Linken hat, muß in der t-Ebene der Punkt $t = 0$ zur Rechten bleiben. Kehren wir also die Integrationsfolge um, so erhalten wir:

$$\int_{K_1} \left(\frac{B_0}{t^2} + \frac{B_1}{t} + B_2 + B_3 t + \right) \dots dt$$

wo jetzt die Integration in positiver Richtung um $t = 0$ herum zu erfolgen hat. Aus der Funktionentheorie weiß man, daß

$$\int_{K_1} t^m\, dt = 0,\ \text{wenn } m \neq -1,\ \text{und}\ \int_{K_1} \frac{dt}{t} = 2\pi i$$

ist. Für die Berechnung unseres Integrals kommt also von allen Koeffizienten B der unendlichen Reihe nur der eine B_1, das sog. Residuum, des Integranden in Betracht, und wir erhalten entsprechend (34)

$$\mathfrak{P}' = \frac{i\rho}{2} B_1 2\pi i = -i\rho\Gamma u e^{i\alpha} = i\rho\Gamma \mathfrak{v}'_\infty \dots \tag{38}$$

da ja $-ue^{i\alpha} = \mathfrak{v}'_\infty$ (vgl. S. 58) das Spiegelbild des Geschwindigkeitsvektors in großer Entfernung von der Tragfläche war. Wir erhalten also für den Kraftvektor selbst

$$\mathfrak{P} = -i\rho\Gamma\mathfrak{v}_\infty \dots \tag{39}$$

Diese Gleichung wird nach ihren Entdeckern Kutta-Joukowskysche Gleichung genannt. Aus ihr folgt:

1. Da der Vektor $-i\mathfrak{v}_\infty$ auf dem Vektor $\mathfrak{v}_\infty$ senkrecht steht, muß der Kraftvektor $\mathfrak{P}$ auf der Anströmungsrichtung senkrecht stehen.

2. Die Größe der Kraft ist

also sowohl der Strömungsgeschwindigkeit v_∞ als auch der Zirkulation Γ proportional.

Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß die entwickelte Theorie eines unendlich langen Tragflügel, durch die wir auf Vorgänge in einer Ebene allein geführt worden sind, zwar imstande ist, eine Erklärung für den Auftrieb, d. h. eine Kraft senkrecht zur Strömungsrichtung, zu geben, daß aber auch bei ihr noch jede Möglichkeit fehlt, an eine Erklärung eines Widerstandes, d. h. einer Kraft in der Strömungsrichtung, heranzukommen. Trotz dieses erheblichen Mangels der Theorie werden wir sehen, daß sie für die Berechnung des Auftriebs eine schon recht brauchbare Übereinstimmung mit der Erfahrung gibt.

§ 5. Moment und Druckpunkt.

Neben dem durch die Kutta-Joukowskysche Gleichung gegebenen Kraftvektor, welcher Größe und Richtung der Luftkraft angibt, spielt in der Flugtechnik noch die absolute Lage der Angriffslinie der Luftkraft eine wichtige Rolle. Die Lage dieser Linie wird meist dadurch angegeben, daß die Stelle bezeichnet wird, an der die Luftkraft die Flügelsehne schneidet; dieser Punkt wird der Druckpunkt genannt. Da auch dieser Punkt mit dem Anstellwinkel α gegen die Luftströmung $\mathfrak{v}_\infty$ seine Lage ändert, spricht man von der Druckpunktswanderung. Der Druckpunkt und seine Wanderung wird offenbar gegeben sein, wenn es gelingt, die Entfernung des Kraftvektors von irgendeinem fest gewählten Punkte anzugeben. D. h. aber nichts anderes, als daß das Moment der Luftkraft gegenüber irgendeinem Bezugspunkt angegeben werden muß. Als Bezugspunkt wollen wir hier den Koordinatenanfangspunkt wählen und zur Bestimmung des Momentes in bezug auf diesen Punkt wiederum den Impulssatz vgl. S. 44 heranziehen. Es wird dann das Moment der äußeren Kräfte gleich dem Überschuß des in der Zeiteinheit austretenden über das eintretende Moment der Bewegungsgröße. Als Kontrollfläche können wir auch hier wieder die Zylinderfläche von der Höhe 1 m, deren Grundkreis der große Kreis mit dem Radius R um den Koordinatenanfangspunkt ist, nehmen. Da der Druck auf dieser Zylinderfläche in Richtung des Radius wirkt, ist sein Hebelarm gegenüber dem Nullpunkt gleich Null, kommt

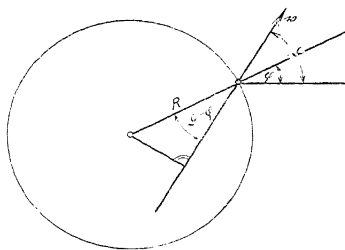



Abb. 36.

also bei der Momentberechnung nicht in Betracht. Der zu dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ gehörige Impuls (s. Abb. 36) hat den Hebelarm $R \sin(\vartheta - \varphi)$, das Moment, das zur Flüssigkeitsmenge $R\, d\varphi \cdot 1 \cdot \rho v \cos(\vartheta - \varphi)$ gehört, ist also

$$R^2 d\varphi\, \rho v^2 \cos(\vartheta - \varphi) \sin(\vartheta - \varphi).$$

Wenn also das Moment der Luftkraft, die auf den Tragflügel ausgeübt wird, mit M bezeichnet wird, so hat man:

$$-M = \rho R^2 \int^{2\pi} v^2 \cos(\vartheta - \varphi) \sin(\vartheta - \varphi)\, d\varphi$$

$$\int^{2\pi} v^2 \sin 2(\vartheta - \varphi)\, d\varphi.$$

Andererseits ist $\mathfrak{v}' = v$ also $\mathfrak{v}'^2 z\, dz = v^2 e^{-2i\vartheta} R^2 e^{2i\varphi} i\, d\varphi$, d. h.

$\mathfrak{v}'^2 z\, dz = i R^2 \left[v e^{-i(\vartheta-}\right.$ $\cos 2(\vartheta -$ $\sin 2$ $- \varphi)\, d\varphi.$

Wir erhalten danach:

$$\mathfrak{R} \int \mathfrak{v}'^2 z\, d \qquad \ldots (40)$$

wenn mit $\mathfrak{R}$ der reelle Teil einer komplexen Größe (eines ebenen Vektors) bezeichnet wird.

Mit Hilfe des Cauchyschen Satzes erkennt man wie auf S. 53, daß das Integral in (40) auch über die Kontur C erstreckt werden kann, wenn der ganze Raum wirbelfrei ist, also $\mathfrak{v}' = \frac{dw}{dz}$ in der ganzen Ebene eindeutig und stetig ist. Eine ganz entsprechende Betrachtung wie die auf S. 60—61 angestellte zeigt aber, daß die Gleichung (40) auch bestehen bleibt, wenn nur ein kleiner, aber endlicher Bereich um den Tragflügel herum von Wirbeln frei ist (zweite Blasiussche Formel).

Benutzen wir wieder die Entwicklung der Gleichung (36), so finden wir

$$\ldots B_2 \ldots B_3$$

Das Residuum ist also diesmal B_2 und wir erhalten, wie auf S. 62, $\int_K \mathfrak{v}'^2 z\, d$ $B_2\, 2\pi i$, also

$$M \qquad \ldots (41)$$

wenn mit $\mathfrak{J}$ der imaginäre Teil einer komplexen Größe bezeichnet wird. Mit Benutzung des Wertes für B_2 aus Gleichung (37) erhält man daher

$$M = \rho u \Gamma \mathfrak{J}(m i e^{i\alpha}) - 2\rho\pi u^2 \mathfrak{J}(a_1 e^{2i\alpha}) \quad \ldots \ldots (42)$$

In diesem Ausdrucke spielt also einerseits die Lage des Mittelpunktes des Bildkreises in der ζ-Ebene und andererseits die, im allgemeinen komplexe, Größe a_1 in der Entwicklung der abbildenden Funktion

eine entscheidende Rolle. Der Ausdruck für das Moment wird besonders einfach, wenn wir nach v. Mises an Stelle des Koordinatenanfangspunktes den Mittelpunkt des Bildkreises wählen (vgl. Abb. 37).

Zu dem Zwecke werde $m = |m| e^{i\delta}$ und $a_1 = -b^2 e^{2i\gamma}$ gesetzt; wir schreiben den absoluten Wert von a_1 in der Form b^2, weil er, wie wir gleich sehen werden, die Dimension einer Fläche hat, und führen das negative Zeichen ein, weil a_1, wenn es reell ist, wie sich zeigen wird, immer einen negativen Wert hat. Mit diesen Bezeichnungen nimmt der Ausdruck für M nach (42) die Form an:

$$M = 2\rho\pi u^2 b^2 \sin 2(\alpha + \gamma) + \rho u \Gamma |m| \cos(\alpha + \delta) \quad . \; . \; . \; . \quad (43)$$

Wenn wir also jetzt den Mittelpunkt M des Bildkreises als Bezugspunkt für die Momentberechnung wählen, ist vom Moment der Wert $|\mathfrak{P}| \, |m| \cos(\alpha + \delta)$ in Abzug zu bringen, d. h. aber der Wert [s. Gleichung (39)] $\rho u \Gamma \, |m| \cos(\alpha + \delta)$, also gerade der zweite Teil des Ausdruckes M der Gleichung (43). Wir erhalten dann für das neue Moment

$$M_1 = 2\rho\pi u^2 b^2 \sin 2(\alpha + \gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Wir wollen nun den absoluten Wert des Kraftvektors, der ja, wie wir gesehen haben, einen Auftrieb darstellt, mit A bezeichnen und wollen für Γ den Ausdruck der Gleichung (30) $\Gamma = 4\pi a u \sin(\alpha + \beta)$ einführen. Dann erhalten wir:

$$A = 4\pi\rho a u^2 \sin(\alpha + \quad (45)$$

Nach v. Mises nennt man den Mittelpunkt M des Bildkreises auch den Profilmittelpunkt. Ist wieder B' das Bild von B, der Profilhinterkante, so nennt man weiter nach ihm $B'M$ die erste Achse oder auch die Nullinie des Profils. Der Winkel $\alpha_1 = \alpha + \beta$ ist dann der Anstellwinkel der ersten Achse gegen die Luftströmung.

Die zweite Achse des Profils geht nach v. Mises aus der x-Achse durch positive Drehung um den Winkel γ hervor, so daß $\alpha_2 = \alpha + \gamma$ der Anstellwinkel der zweiten Achse wird.

Abb. 37. Moment für den Bildkreismittelpunkt.

Danach bilden die beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} A &= 4\pi\rho u^2 a \sin \alpha_1 \\ M_1 &= 2\pi\rho u^2 b^2 \sin 2\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

die Grundlage für alle Betrachtungen zur Auftriebskraft. Daß die Dimension von M mit Einführung der Konstanten b^2 nunmehr die richtige ist, geht daraus hervor, daß sich für den Hebelarm der Kraft der Wert $h = \frac{M}{A}$, also

$$\frac{b^2}{2a} \frac{\sin 2\alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad (47)$$

ergibt.

Die Formeln (46) zeigen, daß sich für die Beurteilung der Auftriebskraft und ihr Moment im ganzen sechs Konstanten als wesentlich herausstellen:

1. die Richtung der ersten Achse, d. h. der Winkel α_1,
2. der Radius des Bildkreises a,
3. und 4. die Lage des Mittelpunktes des Bildkreises, d. h. m und δ,
5. die Richtung der zweiten Achse, d. h. der Winkel γ,
6. die Konstante $b = \sqrt{|a_1|}$, $|a_1|$ der absolute Betrag von a_1.

Eine wesentliche Aufgabe für uns wird darin bestehen, zu einem gegebenen Profil diese sechs Konstanten zu bestimmen. Dazu mögen hier zunächst einige Bemerkungen vorangeschickt werden. Wir machen für den Auftrieb in der jetzt üblichen Weise den Ansatz

$$A = \frac{1}{2} \cdot c_a \varrho u^2 F \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

wo c_a eine nur vom Anstellwinkel abhängende dimensionslose Zahl bedeutet und F die Größe der Tragfläche ist. Wir haben, wenn t die Profiltiefe, d. h. die Länge der Profilsehne (S. 32) bedeutet, für F den Wert $t \cdot 1$ zu setzen, indem wir uns aus dem unendlich langen Tragflügel ein Stück von der Breite 1 m herausgeschnitten denken. A bedeutet dann die Größe des Auftriebs pro Längeneinheit der Breite, d. h. die sog. Auftriebsdichte. Nach der ersten der Gleichungen (46) erhalten wir

$$c_a = 8\pi \frac{a}{t} \sin \alpha_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

In dem Beiwert c_a stecken nur die beiden verfügbaren Konstanten a und α_1; c_a und A sind also bestimmt, wenn man ihren Wert für zwei Anstellwinkel kennt. Dieses Resultat stimmt durchaus mit der Erfahrung überein. Die Theorie kann nämlich, wie schon hervorgehoben wurde, nur dann Anspruch auf Brauchbarkeit machen, wenn die Anstellwinkel α klein sind; für kleine Anstellwinkel verläuft aber, wie wir in Kap. VI sehen werden, die Kurve, welche c_a als Funktion von α darstellt, geradlinig, ist also tatsächlich in ihrer Lage durch zwei α-Werte festgelegt.

Auf S. 56 haben wir gesehen, daß bei einem ebenen Tragflügel der Bildkreisradius a gleich dem vierten Teile der Strecke ist, deren beide Seiten in diesem Falle das Profil darstellen. Besteht das Profil näherungsweise aus zwei Kreisbogen, so geht der Kreis, dessen Radius doppelt so groß wie der des Bildkreises ist, wie wir sehen werden, durch die Schnittpunkte der beiden Kreisbogen hindurch. In neuester Zeit sind eine Anzahl von mathematischen Sätzen über die mittels der Funktion

$$\zeta = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

gegebene schlichte konforme Abbildung des Äußeren eines Bereiches auf das Äußere eines Kreises aufgestellt worden, die nach v. Mises einige Abschätzungen über die Größe und die Lage des Bildkreises auch bei einem beliebigen Profil gestatten, die wir hier ohne Beweis angeben.

Ist d die Profiltiefe (s. Abb. 38), so ist der Radius a des Bildkreises mindestens gleich einem Viertel und höchstens gleich der Hälfte von d. Daraus folgt nach Gleichung (49) die Ungleichung

$$2\pi \sin \quad < c_a < 4\pi \sin \alpha_1 .$$

Der Bildkreis liegt so, daß das Profil ganz in das Innere des mit dem Radius $2a$ um seinen Mittelpunkt konstruierten Kreises fällt. Nur für die ebene und die aus zwei Kreisbogen bestehende Form liegen die Endpunkte des Profils auf der Peripherie dieses Kreises. Denkt man sich die Peripherie des Bildkreises gleichmäßig mit Masse belegt und läßt bei der Abbildung jedes Linienelement seine Masse mitnehmen, so verbleibt der Schwerpunkt im Mittelpunkt des Bildkreises. Der Mittelpunkt liegt also innerhalb des kleinsten konvexen Bereiches, der das Profil ganz in sich einschließt.

Irgendein Kreis, der ganz im Inneren des Profils verläuft, muß, wenn man ihn bei Beibehaltung seines Mittelpunktes verdoppelt, ebenso wie das Profil selbst ganz im verdoppelten Bildkreise liegen. Bezeichnet r den Radius eines solchen ganz im Inneren des Profils gelegenen Kreises und p seine Entfernung von irgendeinem Punkte des Profilumfanges, so muß

$$a > \frac{1}{\ }\frac{(p+r)^2}{p}$$

sein. Ist also z. B. r der Radius des Kreises, welcher der Abrundung der Vorderkante einbeschrieben ist, und p die Entfernung seines Mittelpunktes von der Hinterkante (s. Abb. 38), so daß also $p + r = d$ ist, so sieht man, daß $a > \frac{1}{4}\frac{d^2}{p}$ sein muß und man erkennt ohne weiteres entsprechend Gleichung (46), daß bei Verdickung der Vorderkante der Auftrieb heraufgesetzt wird.

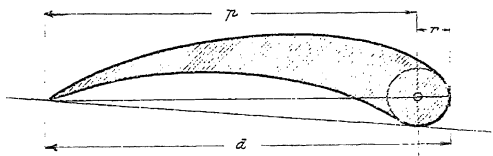



Abb. 38.

Wenn die Ergebnisse aller Modellmessungen kleinere c_a-Werte ergeben, als die untere Grenze $2\pi \sin \alpha_1$ angibt, so liegt das daran, daß ja bisher von uns nur unendlich lange Tragflügel behandelt worden sind, also die durch das Vorhandensein der Tragflügelenden verursachten Störungen noch in keiner Weise berücksichtigt worden sind. Führt man aber, um unserer ebenen Strömung nahezukommen, Messungen aus, wie es Betz zuerst getan hat, indem man einen Tragflügel mit längs seiner Breite konstantem Profil zwischen zwei parallele ebene Wände bringt, wodurch die Strömung zu beiden Seiten des Tragflügels künstlich von der um den Flügel selbst getrennt wird, so zeigen solche eine recht befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie. Bei einer Messung von Betz mit einem sog. Joukowskyschen Tragflügel (s. § 8), bei der die Theorie genau durchgeführt werden kann, ergab sich für c_a etwa der Wert $2 \cdot 3 \sin \alpha_1$, während der theoretische $2 \cdot 3.2 \sin \alpha_1$ sein müßte. Die gewöhnlichen Modellmessungen ergeben für c_a allerhöchstens den

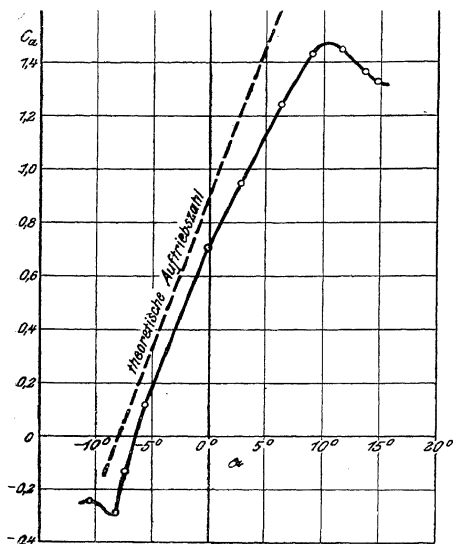



Abb. 39. Messung von Betz an einem Flügel mit zwei zur Windrichtung senkrechten Platten an den Flügelenden.

Wert $2 \cdot 2{,}4 \sin \alpha_1$, also erheblich kleinere Werte. In Abb. 39 ist die von Betz bei ebener Strömung gemessene Kurve c_a als Funktion von α neben die der Theorie entnommene Gerade gestellt. Wenn die gemessenen Werte noch immer etwas hinter den theoretischen zurückbleiben, so liegt das daran, daß die Zirkulation wegen der Reibung in der Grenzschicht, besonders in der oberen Fläche des Profils etwas kleiner wird, als sie nach der Theorie sein müßte.

Da die gewöhnlichen Profile, wie wir sehen werden, nicht sehr erheblich von einem schmalen durch zwei Kreisbogen gebildeten sichelförmigen Spalt abweichen, kann man zur ersten Abschätzung weiter sagen, daß der Mittelpunkt des Bildkreises ungefähr auf der Mittelsenkrechten der Profilsehne zu suchen ist. Die vorher erwähnte zweite Achse fällt in erster Näherung mit der Profilsehne zusammen.

§ 6. Auftrieb bei Berücksichtigung des Bodens.

Ehe wir zur Betrachtung einzelner Profilformen kommen, möge noch folgende Überlegung vorausgeschickt werden. Nach unserer Theorie verhält sich [vgl. Gleichung (15)] der komplexe Wert der Geschwindigkeit wie $\frac{\text{Const}}{z}$, nimmt also nur sehr langsam mit der Entfernung vom Tragflügel ab, es müßte also schon in recht großer Entfernung vom Tragflügel die von der Zirkulation herrührende Aufwärtsbewegung, die neben der entsprechenden Abwärtsbewegung hinter dem Tragflügel den Auftrieb als Impuls in sich trägt, wahrnehmbar sein. Diese Schwierigkeit kann man nach Prandtl dadurch umgehen, daß man unterhalb des Tragflügels in beliebiger Entfernung einen Boden annimmt. Dieser möge sich in einer Entfernung h vom Flugzeug befinden, die gegenüber den Dimensionen des Flugzeuges groß ist (Abb. 40). Ferner wollen wir annehmen, daß der Strömungsvorgang in einer solchen Entfernung vom Tragflügel untersucht wird, daß die Zirkulation als Strömung um einen Punkt angesehen werden kann und endlich noch, daß die Geschwindigkeit der Zirkulationsbewegung klein ist gegenüber der Geschwindigkeit der Luftbewegung, also gegenüber der Anblasgeschwindigkeit.

Wir haben jetzt die Aufgabe, den mathematischen Ansatz für eine Zirkulationsströmung bei Anwesenheit einer festen Wand in der Entfernung h vom Tragflügel zu finden; dabei erscheint das Flugzeug in der xy-Ebene als einfacher Punkt P. Wir haben dabei die Bedingung I (5a) zu erfüllen, daß für die feste Wand $v_n = 0$ ist, daß also an der festen Wand keine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu ihr vorhanden ist. Als Ausdruck für das komplexe Potential findet man, wenn die Bewegung des Flugzeuges in Richtung der x-Achse verläuft:

$$w = \quad v_\infty z - \quad ih) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \quad ih) \tag{50}$$

D. h. aber folgendes: Zu der Zirkulationsströmung um den Tragflügel, der sich in dem Punkte $h\,i$, also in der Höhe h über dem Boden befindet, kommt eine ebensolche Strömung in der entgegengesetzten Richtung um einen Punkt P' $(-h\,i)$, das Spiegelbild zum Punkte P gegenüber dem Boden. Praktisch ist es dabei völlig gleichgültig, ob für negative z-Werte noch Flüssigkeit vorhanden ist oder nicht. Für den Boden, d. h. für $y = 0$, ist jetzt in der Tat

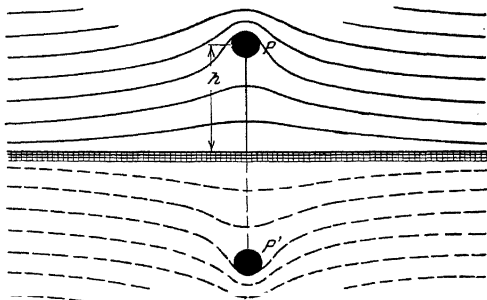



Abb. 40.

$$w = -v_\infty x \quad \frac{}{2\pi} \ln$$

reell, d. h. aber, daß der Boden die Stromlinie $\psi = 0$ darstellt. Aus (50) folgt:

$$\mathfrak{v} = \frac{dw}{dz} = -v_\infty \quad \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z - ih} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z + ih} \tag{51}$$

Oder wenn man für z-Werte die gegenüber h noch groß sind, nach Potenzen von 1 entwickelt

$$\mathfrak{v} = -v_\infty + \frac{\Gamma h}{\pi z^2} - \frac{\Gamma h^3}{\pi z^4} + \dots,$$

d. h. aber: $\mathfrak{v}$ nimmt jetzt mit der zweiten Potenz der Entfernung vom Tragflügel ab. Berechnet man auch hier den Auftrieb in derselben Weise wie früher, so findet man für seine Größe (die Richtung steht wieder auf $\mathfrak{v}_\infty$ senkrecht)

$$A = \rho\,\Gamma v_\infty \left(1 - \frac{\Gamma}{4\pi h v_\infty}\right).$$

Für die Geschwindigkeit am Boden hat man:

$$v = -v_\infty - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{x - ih} \quad \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{x + ih} = -v_\infty \quad \frac{\Gamma h}{\pi(x^2 +}$$

d. h. die Geschwindigkeit ist reell, liegt also ganz in Richtung des Bodens. Nach der Bernoullischen Gleichung ist der Druck

$$p = C - \frac{1}{2}\rho v^2.$$

In großer Entfernung vom Tragflügel ist:

$$p_\infty = C - \frac{1}{2}\rho v_\infty^2.$$

Setzt man den Wert für v ein und berücksichtigt, daß Γ klein gegen v_∞ sein sollte, das Glied mit Γ^2 also unterdrückt werden kann, so erhält man

$$\rho v_\infty \Gamma h$$

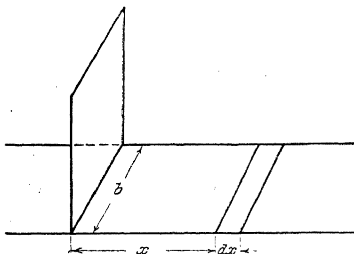



Abb. 41.

Die Auftriebsdichte (d. h. der Auftrieb für die Breite 1 des Tragflügels) ist $\rho \Gamma v_\infty$, wenn wieder $\frac{\Gamma}{4\pi h v_\infty}$ gegen 1 vernachlässigt wird, also der Auftrieb für die Breite b, $A = \rho \Gamma v_\infty b$. Für die Druckanschwellung am Boden infolge der Anwesenheit des Flugzeugs ergibt sich an der Stelle x pro m²:

$$A h$$

Berechnet man danach die Druckanschwellung über den unendlichen Streifen unter der Tragfläche von der Breite b (s. Abb. 41), so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b\,(p - p_\infty)\,dx = \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h\,dx}{x^2 + h^2} = A.$$

d. h. diese Druckanschwellung gibt gerade den Auftrieb A.

§ 7. Ebenes und kreisbogenförmiges Profil.

Wir kommen jetzt zur Behandlung besonderer Tragflügelprofile und beginnen mit dem ebenen Tragflügel. Wenn wir ihn durch die beiden Seiten einer Strecke veranschaulichen, so müssen wir bedenken, daß genau genommen für eine solche unsere Theorie nicht paßt, weil ja dieser Flügel an der Vorderkante ebenfalls eine scharfe Spitze aufweisen würde. Wir wollen uns aber vorstellen, daß der wirkliche ebene Tragflügel ein ganz schmaler symmetrischer, vorn abgerundeter Spalt ist (vgl. Abb. 42), den wir dann mit hinlänglicher Genauigkeit durch eine gerade Strecke ersetzen können. Wir haben bereits S. 55 Gleichung (25) und (26) die Abbildungsfunktion, die

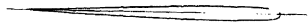



Abb. 42.

die Abbildung einer solchen Strecke in einen Kreis vermittelt, kennen gelernt. Sie war, wenn a den Radius des Kreises bedeutet,

$$a^2$$

Ist dann t die Profilsehne, also hier die Länge der Strecke, so ist $a = \frac{t}{4}$.

Für die beiden Spaltungspunkte der Strömung haben wir für $v' = 0$ aus Gleichung (29) S. 58, weil ja jetzt $\beta = 0$ und $m = 0$, in der ζ-Ebene die quadratische Gleichung

$$\zeta^2 + \frac{i\Gamma}{2\pi u} e^{-i\alpha} \zeta - a^2 e^{-2i\alpha} = 0;$$

also, da hier [Gleichung (30)] $\frac{\Gamma}{2\pi u} = 2a \sin \alpha$ ist,

$$\zeta_1 = -a, \; \zeta_2 = a e$$

und danach

$$z_1 = -2a = -\frac{t}{2}, \; z_2 = \frac{t}{2} \cos 2\alpha.$$

Der hintere Spaltungspunkt liegt, wie es sein muß, in der Hinterkante; dort verläuft die Stromlinie in Richtung des Profils, wir haben glatten Abfluß der

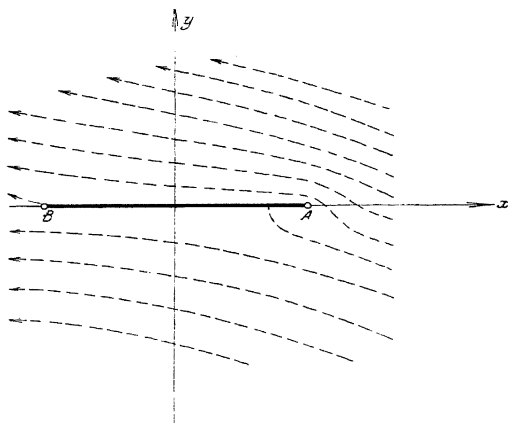



Abb. 43. Strömung um den ebenen Tragflügel.

Strömung. Der vordere Spaltpunkt liegt, da α ein kleiner Winkel ist, nicht weit von der Vorderkante entfernt. Die Konstruktion des Stromlinienbildes, entsprechend der Strömung um den Kreis nach Abb. 28 S. 52 ergibt das Bild der Abb. 43.

Die Gleichungen (46), (47), (49) ergeben hier:

$$A =$$

$$c_a = c \sin \alpha \qquad (52)$$

$$\frac{t}{8} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{t}{4} \cos \alpha, \text{ also } OD = \frac{t}{4} \text{ (Abb. 44)}$$

Die Theorie gibt also hier eine vom Anstellwinkel nicht abhängige feste Lage des Druckpunktes in $\frac{1}{4}\, t$ von der Vorderkante.

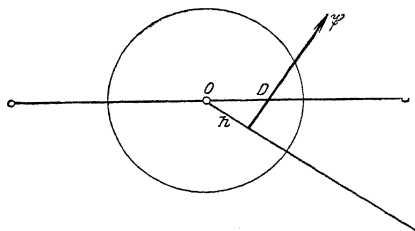



Abb. 44. Druckpunkt beim ebenen Flügel.

An zweiter Stelle behandeln wir ein Flügelprofil, das die Form eines Kreisbogens hat. Auch hier wollen wir uns denken, daß das wirkliche Profil ein sehr schmaler, vorn abgerundeter, hinten spitzer Spalt ist, der sich dicht an einen Kreisbogen anlegt und in erster Näherung durch ihn ersetzt werden kann.

Wir nehmen als Profil den Kreisbogen AB (Abb. 45) mit der Sehne t und der „Pfeilhöhe" f. Der Radius dieses Kreisbogens hat dann die Länge $\frac{\quad}{2f}$.

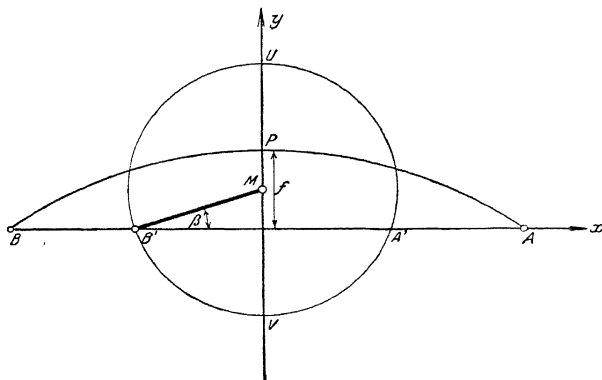



Abb. 45.

Die Gleichung des Kreises, von dem der Bogen genommen ist, lautet:

$$x^2 + y^2 + y \frac{\frac{t^2}{4} - f^2}{f} = \frac{t^2}{4}$$

oder, wenn man $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ einführt,

$$z\bar{z} - i\,(z - \bar{z})\,\frac{\frac{t^2}{4} - f^2}{2f} = \frac{t^2}{4}. \quad . \quad . \quad . \qquad (53)$$

Wenn wir nun wieder die Abbildungsfunktion

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}\,\frac{t^2}{16},\quad \bar{z} = \bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}}\,\frac{t^2}{16}$$

benutzen, wo $\bar{\zeta}$ der zu ζ konjugiert komplexe Wert ist, so geht (53) über in

$$\frac{if}{}\ [illegible]\ t^2 \Big] \Big[[illegible]\ . \ t^2\ [illegible] - \bar{\zeta}) - \frac{t^2}{16} \Big] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (54)$$

d. h. aber nichts anderes als: der Kreis (53) bildet sich in zwei Kreise ab, und zwar geht unser Kreisbogen in den Kreis des ersten Faktors von (54) über, während der zweite Faktor von (54) einen Kreis ergibt, der unseren Kreisbogen zu einem Vollkreise ergänzt. Das Bild der beiden Seiten unseres Kreisbogens AB der Abb. 45 ist also der Kreis K der ζ-Ebene:

$$\zeta\bar{\zeta} + \frac{if}{2}\,(\zeta - \bar{\zeta}) - \frac{t^2}{16} = 0,$$

oder, wenn $\zeta = \xi + \eta i$ gesetzt wird,

$$\xi^2 + \eta^2 - f\eta = \frac{t^2}{16} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (55)$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises K hat die Koordinaten $\xi = 0$, $\eta = \frac{f}{2}$, sein Radius ist $a =$ [illegible] $+ \frac{t^2}{16}$. Es entspricht dem Punkte $B\,(-\frac{t}{2},\,0)$ der z-Ebene der Punkt $B'\,(-\frac{t}{4},\,0)$ der ζ-Ebene, dem Punkte $P\,(0,\,f)$ der z-Ebene die Punkte U $0, \frac{f}{2} +$ [illegible] $\left(\frac{t}{4}\right)^2$ [illegible] $\left(\frac{t}{4}\right)^2)$ der ζ-Ebene.

Aus $z = \zeta + \frac{t^2}{16}\frac{1}{\zeta}$ folgt die für große Werte von z gültige Entwicklung

$$\zeta = z - \frac{t^2}{16}\,\frac{1}{z} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Im vorliegenden Falle haben wir also

$$a_1 = -\,b^2 e^{2i\gamma} = -\,\frac{t^2}{16},$$

d. h. $\gamma = 0$ und somit $\alpha_2 = \alpha_1$, $b = \frac{t}{4}$.

Ferner ist $\operatorname{tg} \beta = \frac{f}{2} : \frac{t}{4} = \frac{2f}{}$

Es ergeben also die Gleichungen (46) und (47)

$$\left.\begin{aligned} A &= 4\pi\rho u^2 \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2}\,\sin(\alpha+\beta), \quad \beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2f}{t}, \\ M_1 &= 2\pi\rho u^2 \frac{t^2}{16}\sin 2\alpha, \\ h &= \frac{\left(\frac{t}{4}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2}}\,\frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (57)$$

Daraus berechnet sich (s. Abb. 46) die Druckpunktslage auf der Sehne. Ist d die Entfernung des Druckpunktes von der Mitte, so erhält man:

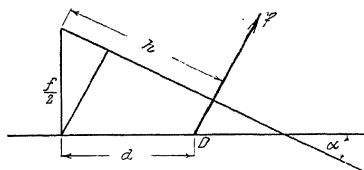



Abb. 46.

$$d = \frac{\left(\frac{t}{4}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2}}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots (58)$$

Für kleine Werte der Pfeilhöhe, also auch kleine Werte von β, sowie für klein Werte von α, erhält man danach:

$$\left.\begin{aligned} A &= \pi\rho t u^2 (\alpha + \beta) \\ M_1 &= \pi\rho u^2 \frac{t^2}{4}\alpha. \\ d &= \frac{t}{4}\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{aligned}\right|$$

§ 8. Joukowskysches Profil.

Von den sehr schmalen Spaltformen, wie sie durch das ebene und kreisförmige Profil gegeben sind, kann man nun in sehr einfacher Weise nach dem Vorgange von Joukowsky zu Formen gelangen, die als Joukowskysche Profile bezeichnet werden.

Wir halten in der Fig. 45 S. 72 den Punkt B' und den Winkel β fest, verschieben aber den Mittelpunkt M um die Strecke $MM' = \varepsilon a = \varepsilon\frac{t}{4}$ und konstruieren dann mit dem vergrößerten Radius $a' = a(1+\varepsilon)$ einen Kreis, der den früheren Kreis

in B' berührt (vgl. Abb. 47). Diesen neuen Kreis K' wollen wir dann wieder mit Hilfe der Transformationsgleichung

$$z = \zeta + \frac{t^2}{16}\frac{1}{\zeta}$$

abbilden. Wenn das Vergrößerungsverhältnis $1 + \varepsilon$ nur wenig von 1 verschieden ist, so daß also K' nicht sehr stark von K abweicht, wird sich auch in der z-Ebene das Bild von K nahe an den Kreisbogen anlehnen. Die Konstruktion dieser Kontur kann nach dem Vorschlage von Trefftz in folgender Weise durchgeführt werden: Der Kreis K' wird zuerst mittels der Funktion $\zeta_1 = \frac{t^2}{16}\frac{1}{\zeta}$ abgebildet. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Abbildung ein Kreis K'' ist, der K und K' in B' berührt,

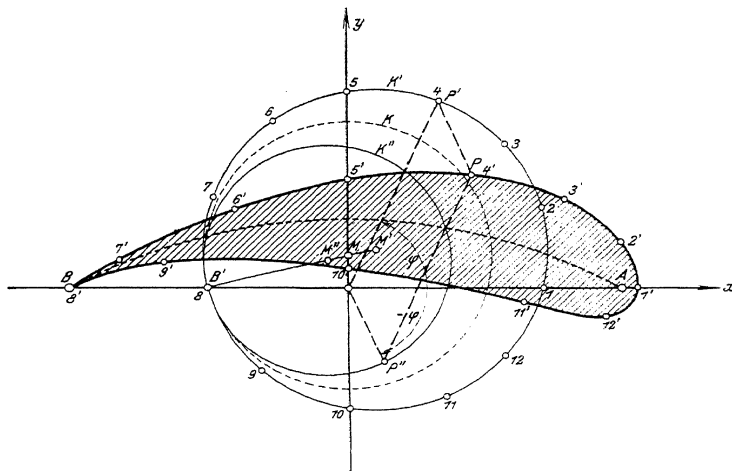



Abb. 47. Konstruktion eines Joukowskyschen Profils.

dessen Mittelpunkt auf $B'MM'$ liegt und dessen Radius $B'M''$ den Wert $a\,\frac{1+\varepsilon}{1+2}$ hat. Ist nun $\zeta = re^{i\varphi}$, so ist $\zeta_1 = \frac{t^2}{16r}e^{-i\varphi}$. Danach ist aber, wenn P' ein Punkt von K' ist, der entsprechende Punkt P'' auf K'' leicht zu finden, da ja OP' und OP'' entgegengesetzt gleiche Winkel mit der x-Achse bilden. Da nun aber

$$z = \zeta + \zeta_1$$

ist, so haben wir nun zu $OP'P''$ die vierte Parallelogrammecke P zu suchen; dann ist P das Bild von P'. Nach dieser Konstruktion ist in Abb. 47 das Bild des Kreises K' entworfen. Man sieht, daß die entstehende Profilform sich schon gut den üblichen Tragflügelprofilen anpaßt.

Da der Radius des Bildkreises jetzt den Wert $a\,(1+\varepsilon)$ hat, kommt entsprechend unserer Formel (46) zum Auftriebsbeiwerte, den wir in (57a) für das Kreisbogenprofil gefunden haben, der Faktor $(1+\varepsilon)$ hinzu.

Die an der Vorderkante abgerundeten Joukowsky-Profile ordnen sich ohne weiteres in unsere Theorie ein, während, wie schon hervorgehoben, die gerade Strecke und der Kreisbogen streng genommen nicht hierher gehören. Führt man die Konstruktion, die wir zum Kreisbogen AB ausgeführt haben, auch für die gerade Strecke durch, so gibt das zugehörige Joukowsky-Profil ein symmetrisches Strebenprofil (vgl. Abb. 48).

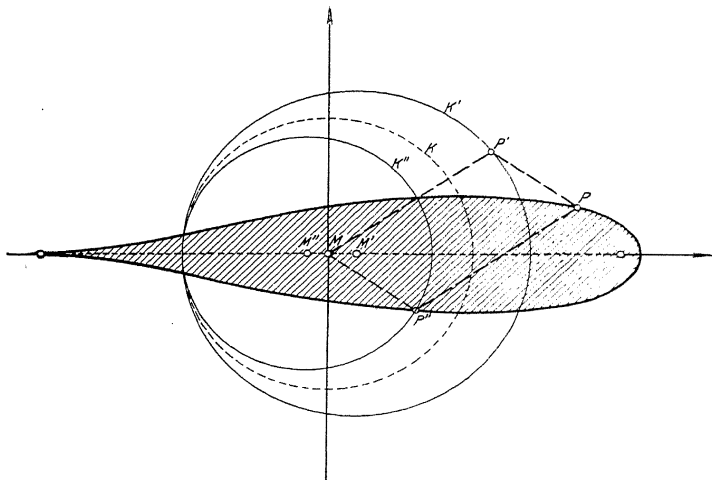



Abb. 48. Joukowskysches Strebenprofil.

§ 9. Verallgemeinerung der Joukowskyschen Profile.

Die Joukowskyschen Profilformen, die sich sonst den üblichen Formen der Praxis schon recht gut anpassen, leiden noch an dem Übelstand, daß bei ihnen der Kantenwinkel, der Neigungswinkel der beiden Flächen der Hinterkante den Wert Null hat. Um dem abzuhelfen, haben v. Kármán und Trefftz das Skelett der Joukowskyschen Profile so abgeändert, daß sie an Stelle des Kreisbogens eine aus zwei Kreisbogen bestehende Sichel treten ließen. Da man durch den Kantenwinkel auch die Dicke des Skeletts und also auch die Profildicke beeinflussen kann, ist auf diese Weise eine Möglichkeit gegeben, die Mannigfaltigkeit der Profilformen zu vergrößern. Aus der Gleichung, die bisher den Übergang von der z- zur ζ-Ebene vermittelt hat:

$$\zeta \qquad = \frac{t}{4}, \text{ folgt:}$$

$$\frac{z-2m}{z+2m} = \left(\frac{\zeta-m}{\zeta+m}\right)^2.$$

Um zu erreichen, daß immer noch Kreisbogen in Kreisbogen übergeführt werden, aber nicht beide Teile eines Vollkreises in die beiden Seiten desselben Kreisbogens bei der Abbildung übergehen, setzen wir an Stelle der obigen Gleichung die allgemeinere

$$\frac{z-nm}{z+nm} = \left(\frac{\zeta-m}{\zeta+m}\right)^\lambda,$$

wo n eine beliebige Zahl ist, während λ so bestimmt werden muß, daß immer noch für große z-Werte $\zeta = z$ wird, das Unendliche also bei der Transformation ungeändert bleibt. Entwickelt man auf beiden Seiten nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ bzw. $\frac{1}{\zeta}$ so findet man, daß $\lambda = n$ sein muß, erhält also den Ansatz:

$$\frac{z-nm}{z+nm} = \left(\frac{\zeta-m}{\zeta+m}\right)^n, \quad \zeta = z - \frac{n^2-1}{3}\frac{m^2}{z} + \ldots \ldots \quad (59)$$

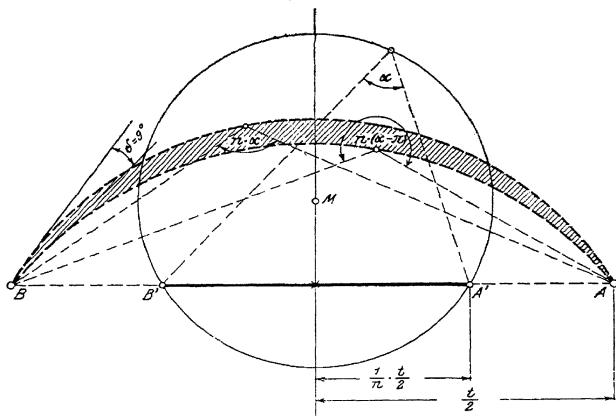



Abb. 49.

Durch geeignete Wahl der Zahl n, die nicht viel von 2 abweichen darf, hat man es dann in der Hand, einen kleinen Kantenwinkel einzuführen. Setzt man

$$\zeta - m = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad \zeta + m = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z - nm = r_1 e^{i\psi_1}, \quad z + nm = r_2 e^{i\psi_2}$$

so folgt aus (59)

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n, \quad \psi_1 - \psi_2 = n(\varphi_1 - \varphi_2) \ldots \ldots \quad (59\text{a})$$

Wenn sich also ζ auf einem Kreisbogen über der Strecke $-m$ bis $+m$ bewegt, wobei diese Strecke dauernd unter dem Winkel $\varphi_1 - \varphi_2$ erscheint, so bewegt sich z auf einem Kreisbogen über der Strecke $-nm$ bis $+nm$, wobei diese Strecke unter dem Winkel $\psi_1 - \psi_2 = n(\varphi_1 - \varphi_2)$ erscheint.

Irgend ein Kreiszweieck (s. Abb. 49) in der z-Ebene, das von zwei Kreisbogen über der Strecke $-nm$ bis $+nm$ gebildet wird, hat als Bild in der ζ-Ebene wiederum ein Kreiszweieck über der Strecke $-m$ bis $+m$ als Sehne. Soll nun das Bild in

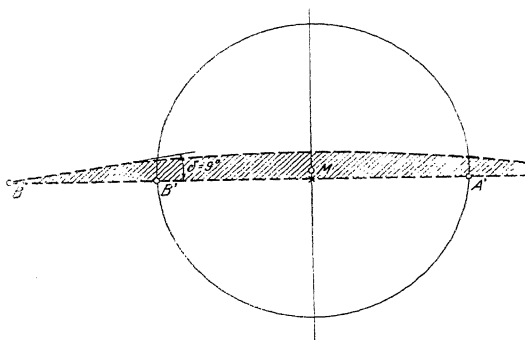



Abb. 50.

der ζ-Ebene ein Vollkreis werden, so ergibt sich folgendes: Es sei α der Peripheriewinkel im oberen Vollkreisbogen, dann ist, wenn wir die Winkel immer in dem Sinne von $-m$ nach $+m$ zählen, $\alpha - \pi$ der Winkel im unteren Bogen. In der

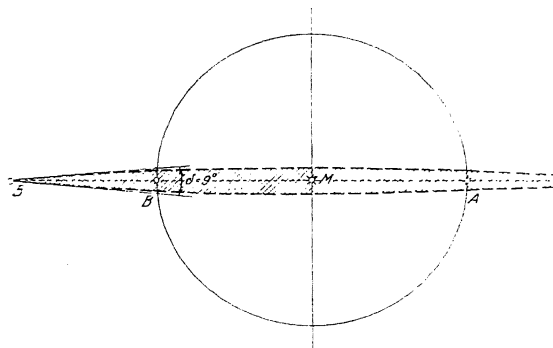



Abb. 51.

z-Ebene haben wir also in den entsprechenden Kreisbogen über $-nm$ bis $+nm$ die Winkel $n\alpha$ und $n(\alpha - \pi)$; der äußere Winkel, unter dem sich diese beiden Kreisbogen schneiden, hat den Wert $n\pi$; der innere Winkel, der [illegible] heißen soll, ist also $\delta = 2\pi - n\pi$ oder $n = (2\pi - \delta)/$[illegible].

Da dieser Winkel δ von m unabhängig ist, so sieht man, daß alle Vollkreise in der ζ-Ebene, welche die Strecke $-m$ bis $+m$ als Sehne enthalten, in der z-Ebene in Zweiecke mit demselben Kantenwinkel übergehen. In Abb. 49—51 sind dementsprechend drei Vollkreise der ζ-Ebene in drei Zweiecke mit verschiedener „Wölbung“ abgebildet. Der Kantenwinkel beträgt dabei 9^0, also $n = 1{,}9$.

Der Gleichung (46) entsprechend erhalten wir hier

$$\beta) \qquad (60)$$

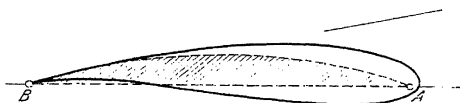



Abb. 52.

und zwar hat man für den Radius a des Bildkreises folgendes: Ist ε der Peripheriewinkel des größeren der beiden Bogen der Kreissichel in der z-Ebene, also $\frac{\varepsilon}{n}$ der Peripheriewinkel des zugehörigen Bogens des Vollkreises in der ζ-Ebene, so ist, wenn wieder mit t die Sehne der Sichel bezeichnet wird, mithin $m = \frac{t}{2n}$,

$$a = \frac{}{2n \sin}$$

andererseits ist aber $\beta = \frac{\varepsilon}{n}$, also $a = \frac{t}{2n \cos \beta}$. Da aber β immer ein kleiner Winkel sein muß, so erhält man näherungsweise

$$a = \frac{}{2n}.$$

Abb. 53.

Für die Joukowskyschen Profile, welche durch $n = 2$ erhalten werden, erhalten wir $a = \frac{t}{4}$ entsprechend (57a).

Da $n = 2 - \frac{\delta}{\pi}$, so sieht man, daß mit größer werdenden Kantenwinkel δ die Zahl n kleiner, also a und somit A größer wird. Beträgt z. B. der Kantenwinkel 10^0, so ist der zugehörige Auftriebswert um $\frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{36}$, d. h. etwa um 3 vH, größer als im Joukowskyschen Falle. Auf die Frage nach der Druckpunktswanderung soll nachher eingegangen werden.

Von den Kreissicheln kann man ebenso wie von den Kreisbogen zu wirklichen Profilformen übergehen. Denken wir uns auch hier wieder den Mittelpunkt des Bildkreises in der Richtung $B'M$ um die Strecke MM' verschoben und um M' mit $B'M'$ den Kreis konstruiert und diesen Kreis durch die Funktion (59) auf die z-Ebene abgebildet, dann wird, wenn K' von K nicht zu sehr abweicht, auch sein

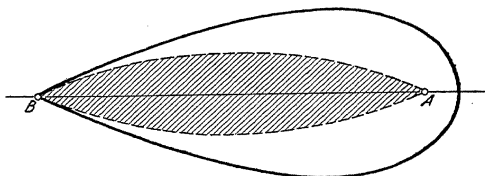



Abb. 54.

Bild sich nicht weit von der Sichel entfernen; wir erhalten auch hier nur eine scharfe Kante bei B, während die Vorderkante abgerundet ist. In Abb. 52—54 sind entsprechend drei verschiedene Profile, die nach dieser Methode abgebildet sind, gezeichnet. Auf diese Weise werden sich die meisten gebräuchlichen Profile schon recht gut annähern lassen, da ja ein Profil durch seine Länge, Wölbung, Dicke und den Kantenwinkel gut genug charakterisiert ist.

§ 10. Die Auftriebsparabel.

Wir haben bisher für die Berechnung des Moments den Mittelpunkt des Bildkreises als Bezugspunkt angenommen; wir wollen nach v. Mises jetzt zur Erlan-

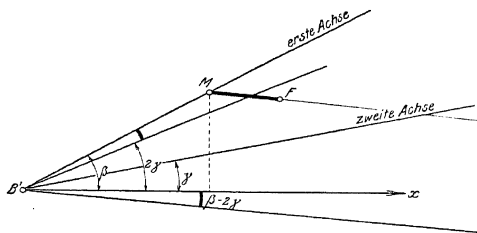



Abb. 55.

gung noch größerer Einfachheit einen Punkt F als Bezugspunkt wählen, der wie folgt gefunden wird: Von M aus wird die Strecke $MF = \frac{b^2}{a}$ in einer Richtung abgetragen, die so gewählt ist, daß die Richtung der zweiten Achse (vgl. S. 65) den Winkel zwischen MF und der ersten Achse halbiert; MF ist also gegen die x-Achse in negativem Sinne um $\beta - 2\gamma$ gedreht (vgl. Abb. 55).

Das Moment in bezug auf F wird aus dem Moment gegen M erhalten, indem der Wert $A \frac{b^2}{a} \cos(\alpha - \beta + 2\gamma)$ davon in Abzug gebracht wird.

$$M = M_1 - A \frac{b^2}{a} \cos(\alpha - \beta + 2\gamma).$$

Setzt man aus (46) die Werte für A und M_1 ein, so erhält man:

$$M = -2\pi \tag{61}$$

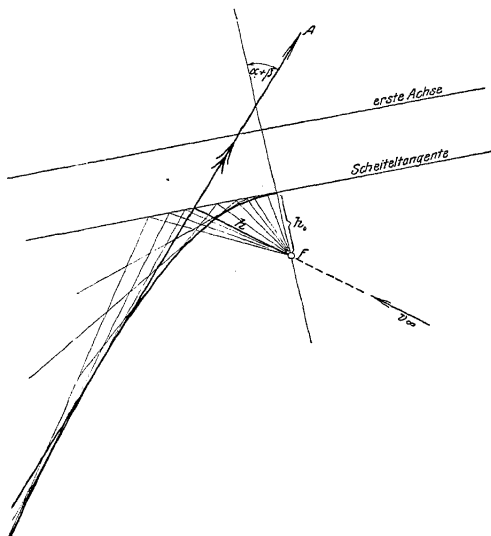



Abb. 56. Auftriebsparabel.

Das in bezug auf F berechnete Moment enthält also den veränderlichen Anstellwinkel nicht mehr, so daß wir folgendes Resultat nach v. Mises erhalten: Zu jedem Tragflügelprofil gibt es einen bestimmten Punkt (Brennpunkt des Profils), für den das Moment der Auftriebskraft vom Anstellwinkel unabhängig wird.

Versteht man jetzt unter h den Hebelarm der Kraft in bezug auf F, so erhält man:

$$h = \frac{M}{A} = -\frac{b^2 \sin 2(\beta - \gamma)}{2a \sin(\alpha + \beta)} \qquad \frac{h}{\sin(\alpha +} \tag{62}$$

wenn $h_0 = \frac{b^2}{2a} \sin 2(\beta - \gamma)$ gesetzt wird. Da $\alpha + \beta$ der Anstellwinkel der ersten Achse gegen die Anblasrichtung ist, stellt h_0 die Projektion von h auf die Senkrechte zur ersten Achse dar. Da h_0 vom Anstellwinkel α nicht abhängt, müssen

also die Fußpunkte aller von F auf die Auftriebsrichtungen gefällten Lote auf einer zur ersten Achse parallelen Geraden, der Scheiteltangente einer Parabel, liegen. Die Auftriebsrichtungen hüllen diese Parabel, deren Parameter $2h_0$ ist, ein (s. Abb. 56).

Wenn $h_0 = 0$ ist, bilden die Auftriebsrichtungen ein durch F hindurchgehendes Strahlenbüschel. In diesem Falle kann man also von einem festen **Druckmittelpunkt** F sprechen, durch den die Auftriebsresultierende immer hindurchgeht. Dieser Fall tritt nach Gleichung (62) dann ein, wenn $\beta = \gamma$ wird, wenn also die erste Achse mit der zweiten zusammenfällt.

Haben wir z. B. einen Tragflügel, dessen Profil ein schmaler sich sehr nahe an eine gerade Strecke anschließender Spalt ist, so wird sowohl β als auch γ gleich

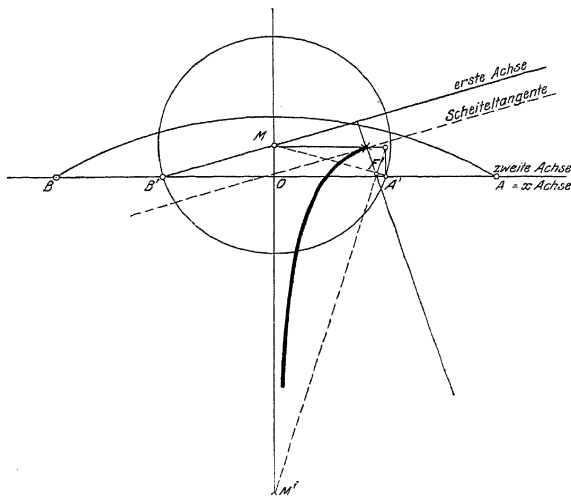



Abb. 57. Auftriebsparabel beim Kreisbogenprofil.

Null (vgl. S. 65 und 71). Da jetzt $b = a = \frac{t}{4}$ ist, so liegt F in der Entfernung von M, d. h. von der Mitte des Tragflügels, also auch in der Entfernung von der Vorderkante, in Übereinstimmung mit dem Resultate der S. 72.

Im Falle des kreisbogenförmigen Spaltes ist (vgl. S. 72) $\gamma = 0$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2f}{t}$,

. Der Brennpunkt F liegt jetzt auf dem Radius MA' (vgl. Abb. 57) in der Entfernung $\frac{b^2}{a} = \frac{\left(\frac{t}{4}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}$ von M. Die Konstruktion erfolgt in

diesem Falle am einfachsten so, daß man in A' senkrecht zu $A'B'$ die Strecke $OM = \frac{f}{2}$ abträgt und den Endpunkt dieser Strecke mit dem Mittelpunkt M' des Kreisbogens über der Sehne AB verbindet; der Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit MA' ist dann F. Die erste Achse $B'M$ ist die Leitlinie der Auftriebsparabel, also h_0 der halbe Abstand des Punktes F von dieser Geraden. Zeichnet man die Parabeln für verschiedene Kreisbogen, die alle zu demselben Bildkreise gehören, aber verschiedene Wölbung haben, so bleibt der Brennpunkt immer ungefähr

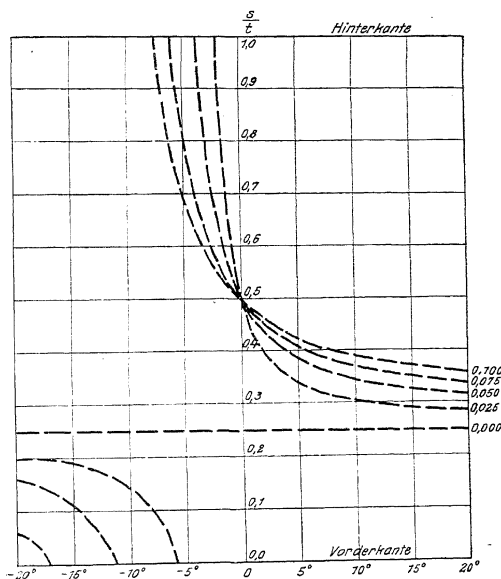



Abb. 58. Druckpunktswanderung bei Kreisbogenprofilen verschiedener Wölbung.

in $\frac{1}{4}t$ von der Vorderkante entfernt, rückt aber mit zunehmender Wölbung immer mehr vom Kreisbogen nach innen ab. In Abb. 58 ist mit Hilfe der Formel (58) auf S. 74 die Wanderung des Druckpunktes auf der Sehne für die Wölbungen $\left(\frac{f}{t} = 0;\ 0{,}025;\ 0{,}05;\ 0{,}075;\ 0{,}1\right)$ als Funktion des Anstellwinkels gezeichnet; dabei bedeutet jetzt wieder s die Entfernung des Druckpunktes von der Vorderkante.

Sieht man mit v. Mises die Strecke h_0, also den halben Parameter der Auftriebsparabel, als ein Maß für die Druckpunktswanderung an, so sieht man, daß die Druckpunktswanderung mit Vergrößerung der Wölbung wächst.

Auch für die Joukowskyschen Profilformen und ihre Erweiterung durch

v. Kármán und Trefftz lassen sich die Auftriebsparabeln nun leicht konstruieren. Um den Brennpunkt zu erhalten, hat man nur jedesmal auf der Geraden MA', wobei M der Profilmittelpunkt und A' der rechte Schnittpunkt des Bildkreises mit der x-Achse ist, die Strecke $\frac{b^2}{a}$ abzutragen. Bei den Joukowskyschen Profilen ist $b = \frac{t}{4}$ und der Radius $a = \sqrt{\left(\frac{t}{4}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2}\,(1 + \varepsilon)$, wenn t die Sehne, f die Wölbung des Kreisbogenskeletts und ε das Vergrößerungsverhältnis ist.

Bei den Profilformen nach v. Kármán und Trefftz ist [vgl. (59)] $b^2 = \frac{n^2 - 1}{3} m^2 = \frac{1}{[illegible]}\left(\frac{t}{2n}\right)^2$, während der Radius a, wie S. 79 angegeben, durch a [illegible] t für die Kreissichel und durch $a\,(1 + \varepsilon)$ für die wirklichen Profilformen gefunden wird. Zur Beurteilung der Druckpunktswanderung nehmen wir wieder (62):

$$h_0 = \frac{b^2}{2a} \sin 2\beta,$$

da ja hier stets $\gamma = 0$ ist; d. h. also

$$h_0 = \frac{(n^2 - 1) \cos^2\beta \sin\beta}{6n\,(1 + \varepsilon)}\, t \sim \frac{(n^2 - 1)\,\beta}{6n\,(1 + \varepsilon)}\, t, \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

worin noch, wenn wieder δ den Kantenwinkel bedeutet,

$$n = 2 - \frac{\delta}{\pi}$$

gesetzt werden muß.

Da mit größer werdendem δ die Zahl n abnimmt und, mit kleiner werdendem n, $\frac{n^2 - 1}{n}$ abnimmt, so sehen wir also: Verminderung der Wölbung (Verkleinerung von β), Vergrößerung des Kantenwinkels (Verkleinerung von n), Erhöhung der Profildicke (außer der Vergrößerung von δ auch Vergrößerung von ε), vermindern die Druckpunktswanderung. Profile mit festem Druckmittelpunkt ergeben sich hierbei aber nur, wenn $\beta = 0$ ist, d. h. bei symmetrischen Formen (Strebenprofilen).

§ 11. Allgemeine Profilformen.

Obwohl die bisher skizzierten Profilformen schon eine sehr große Mannigfaltigkeit darstellen, da man ja Wölbung, Dicke und Kantenwinkel völlig beliebig wählen kann, ist diese Mannigfaltigkeit doch noch immer nicht groß genug, um alle Formen, wie sie die Praxis verlangt, zu erreichen. So wird man z. B. Aufbiegungen an der Vorder- und an der Hinterkante mit Hilfe der Kreisbogenskelette nicht erhalten können; wir haben auch festgestellt, daß man auf diesem Wege praktisch brauchbare Profile mit festem Druckmittelpunkt ($h_0 = 0$) nicht erhalten kann. Um diesem Mangel abzuhelfen und die Mannigfaltigkeit der Formen so weit wie möglich zu steigern, knüpfen wir wieder unmittelbar an die Form der Abbildungsfunktion

$$\zeta = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

an. Durch Umkehrung dieser Entwicklung möge sich eine Reihe

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots$$

ergeben. Brechen wir diese Reihe beim zweiten Gliede ab, so würden wir wieder zu der Funktion kommen, die einen Kreisbogen in einen Vollkreis überführt, mit der wir uns bei den Joukowskyschen Profilformen beschäftigt haben. Wir wollen nun nach v. Mises diese Reihe mit der $n$ten Potenz aufhören lassen, d. h. wir wollen den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} z &= \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{c_n}{\zeta^n} \\ \frac{dz}{d\zeta} &= 1 - \frac{c_1}{\zeta^2} - \frac{2c_2}{\zeta^3} - \dots - \frac{n c_n}{\zeta^{n+1}} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \dots \quad (64)$$

zur Bestimmung weiterer Profilformen machen.

Wir wissen, daß $\frac{dz}{d\zeta}$ für denjenigen Punkt ζ des Kreises verschwinden muß, welcher der Profilspitze in der z-Ebene entspricht (vgl. S. 57). Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems richten wir es so ein, daß dieser Punkt die Koordinaten $-m$, 0 hat. Für Punkte außerhalb des Kreises in der ζ-Ebene bzw. außerhalb des Profils in der z-Ebene kann dann $\frac{dz}{d\zeta}$ nicht verschwinden, da ja sonst $\frac{d\zeta}{dz}$ und somit die Geschwindigkeit an einer solchen Stelle unendlich groß werden müßte. Außer der auf dem Kreise gelegenen Stelle $\zeta = -m$ müssen also alle Nullstellen von $\frac{dz}{d\zeta}$ im Innern des Kreises liegen. Entsprechend unserem Ansatz (64) müssen n solche Stellen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ vorhanden sein, so daß wir schreiben können:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 + \frac{m}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{\mu_1}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu_n}{\zeta}\right) \quad \dots \dots \dots \quad (65)$$

Man kann den Überlegungen auf S. 78 entsprechend leicht zeigen, daß bei einem solchen Ansatz wie beim Joukowskyschen Profil der Kantenwinkel Null werden muß. Will man wieder zu einem beliebigen Kantenwinkel kommen, so muß man dem ersten Faktor $\left(1 + \frac{m}{\zeta}\right)$ einen von 1 etwas abweichenden Exponenten λ beifügen und den Ansatz noch etwas allgemeiner so schreiben:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 + \frac{m}{\zeta}\right)^{\lambda}\left(1 - \frac{\mu_1}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu_n}{\zeta}\right). \quad \dots \dots \dots \quad (65\text{a})$$

Da ja das Glied mit $\frac{1}{\zeta}$ in $\frac{dz}{d\zeta}$ fehlen muß, wenn im Ausdruck für z kein Logarithmus auftreten soll, so ergibt sich für die im Kreisinneren liegenden Stellen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ die Bedingung

In dem Falle $n = 1$ und $\lambda = 1$, erhalten wir $\mu_1 = m$ und kommen also auf den Fall der Kreisbogenabbildung $\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{m^2}{\zeta^2}$ zurück. Die Ansätze (65) oder (65a) ergeben übrigens noch die Bedingung, daß auch $\zeta = 0$ im Innern des Kreises liegen muß, da ja $\frac{dz}{d\zeta}$ nicht für Punkte außerhalb des Profils unendlich werden darf. Für den Koeffizienten c_1 der Gleichung (64) erhält man

$$c_1 = \lambda^2 m^2 - \sum_{i,k} \mu_i \cdot \mu_k.$$

Will man also z. B. ein Profil aufstellen, bei dem ein fester Druckmittelpunkt vorhanden ist, so daß also $\beta = \gamma$ wird, so hat man es so einzurichten, daß γ, d. i. die Richtung von $\sqrt{c_1}$, mit β gleich ist. Die Aufgabe besteht vor allem darin, die verfügbaren Konstanten μ_i so auszuwählen, daß sich daraus eine brauchbare Umriß-

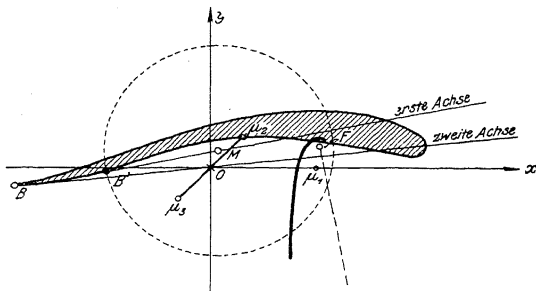



Abb. 59. Erstes Profil nach v. Mises.

form ergibt. v. Mises hat dafür einige Beispiele gegeben, von denen zwei hier Platz finden sollen.

1. $\lambda = 1$, also der Kantenwinkel Null; $n = 3$, und zwar $\mu_1 = m$, $\mu_2 =$ $\mu_3 = \frac{m}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$; also:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{m^2}{\zeta^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{4} i \frac{1}{\zeta^2}\right) = 1 - m^2\left(1 + \frac{i}{4}\right)\frac{1}{\zeta^2} + \frac{m^4}{4} i \frac{1}{\zeta^4},$$

$$z = \zeta + m^2\left(1 + \frac{i}{4}\right)\frac{1}{\zeta} - \frac{m^4}{12} i \frac{1}{\zeta^3}.$$

Der Kreis hat durch $(-m, 0)$ hindurchzugehen und 0, μ_1, μ_2, μ_3 ei
In Abb. 59 ist der Radius $a = 2{,}2$ cm, $m = 2$ cm, $\beta = 10^0$ gewählt.

2. Wieder $\lambda = 1$; $n = 2$, und zwar $\mu_1 = -\frac{m}{2} e^{\frac{i\pi}{3}}$, $\mu_2 = m - \mu_1$,

$$z = 1 + \frac{3m^2}{8}(3 + i\sqrt{3})\frac{1}{\zeta} + \frac{m^2}{16}(1 + 3i\sqrt{3})\frac{1}{\zeta^2}.$$

Das Profil soll einen festen Druckmittelpunkt erhalten; es muß dafür gesorgt werden, daß $\beta = \gamma$ wird. Da $c_1 = -b^2 e^{2\gamma i} = \frac{3}{8} m^2 (3 + i\sqrt{3})$ ist, wird, $2\gamma = 30^0$, also $\gamma = \beta = 15^0$. In der Abb. 60 ist demnach $m = 2$ cm, $a = 2{,}5$ cm, $MF = 2{,}08$ cm gewählt.

Es sei noch erwähnt, daß mit Hilfe von anderen Abbildungsmethoden A. Sonnefeld (Diss. Jena 1911) und Blasius (Zeitschr. für Math. und Phys. 59, 1911) die Strömungen auch für andere Profilskelette untersucht haben.

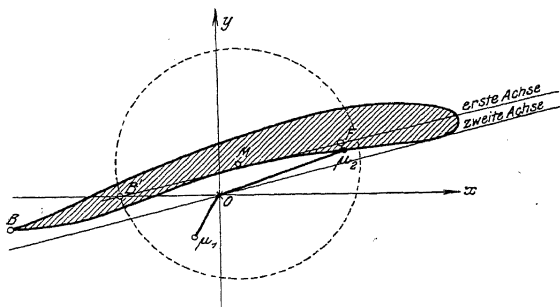



Abb. 60. Zweites Profil nach v. Mises.

§ 12. Zwei Tragflügel hintereinander.

Es soll hier noch gezeigt werden, daß auch die Strömung um zwei hintereinander liegende Tragflügel (Tandemanordnung) und zwei übereinander liegende (Doppeldecker) in derselben Weise erledigt werden kann.

Wenn man auf den Ausdruck des komplexen Potentials für die Strömung um die Kreiskontur (S. 58) die Transformation

$$z = \qquad \overline{\zeta - m}$$

anwendet, durch die (vgl. S. 55 und 71) der Kreis in die beiden Seiten der Strecke von der Länge $t = 4a$ übergeführt wird und dabei m in den Koordinatenanfangspunkt verlegt, so erhält man, wenn man noch $\mathfrak{v}_\infty = -ue^{-i\alpha} = v_{x\infty} + i\, v_{y\infty}$, also $v_{x\infty} = -u \cos \alpha$, $v_{y\infty} = u \sin \alpha$ setzt,

$$w = v_{x\infty}\, z - i\, v_{y\infty} \sqrt{z^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}\right)$$

$$\mathfrak{v}' = \frac{dw}{dz} = v_{x\infty} - i\, v_{y\infty} \frac{z}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}}.$$

Damit glatter Abfluß an der Hinterkante stattfindet, $\mathfrak{v}'$ also daselbst nicht un-

endlich wird, muß nach Gleichung (30) S. 58, da ja hier $\beta = 0$ ist, $\Gamma = 4\pi a u \sin\alpha$ $\pi t v_{y\infty}$ gesetzt werden. Dadurch erhält man

$$\mathfrak{v}' = v_{x\infty} - i v_{y\infty} \sqrt{\frac{z + \frac{t}{2}}{z - \quad}}$$

Wir wollen nun entsprechend den komplexen Wert der Geschwindigkeit für zwei hintereinander liegende Strecken aufsuchen. Um bei den nachher auftretenden Integralen solche Formen zu erhalten, die man tabellarisch berechnen kann, wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, daß die beiden Strecken gleich lang sind und wollen den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte zwischen die beiden Strecken legen, so daß die Endpunkte die Abszissen $\pm p$ und $\pm q$ haben.

Betrachten wir nun die Funktion

$$w = \varphi + i\psi = az + \int_0^z \frac{b + cz + dz^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz$$

für reelle Werte von a, b, c, d, so sieht man, daß, wenn $y = 0$ und $q < |x| < p$ ist, das Integral einen reellen Wert hat, also $\psi = 0$ ist; es gehören also die beiden Strecken der Stromlinie $\psi = 0$ an, und unser Ausdruck w stellt eine Strömung um die beiden geradlinigen Konturen für beliebige Werte von a, b, c, d dar. Für große Werte von z verhält sich w wie

$$(a - id)\, z - ic \ln z.$$

Es handelt sich also auch hier um eine Parallelströmung und eine Zirkulationsströmung und wir wollen dementsprechend $a = v_{x\infty}$, $d = v_{y\infty}$, $c = \frac{\Gamma}{2\pi}$ und überdies $b = -dm^2 - n$ setzen; dann erhalten wir:

$$w = v_{x\infty} z + v_{y\infty} \int_0^z \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^z \frac{(z - n)\, dz}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} \quad . \quad (66)$$

$$\mathfrak{v}' = v_{x\infty} + v_{y\infty} \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z - n}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} \quad . \quad (67)$$

Für $\Gamma = 0$ ist in der Tat die Zirkulation $\int \mathfrak{v}' dz$, wo das Integral über eine beide Konturen umschlingende Kurve zu erstrecken ist, gleich Null. Soll auch für jede einzelne Kontur die Zirkulation Null sein, so muß das Integral für jede eine einzelne Kontur umschlingende Kurve verschwinden, d. h. es muß

$$\int_{-p}^{-q} \frac{(z^2 - m^2)}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz = \int_q^p \frac{(z^2 - m^2)\, dz}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} = 0$$

sein, wir erhalten also für m die Bestimmungsgleichung:

$$\ldots \frac{dz}{\ldots {}^2 - q^2)} = \int \frac{\ldots}{\sqrt{(p^2 - \ldots}}$$

Führt man $k = \frac{q}{p}$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ein und setzt in diesen bestimmten Integralen $1 - \frac{z^2}{p^2} = (1 - k^2)\, t^2$, so erhält man:

$$m^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)\,(1 - k'^2\, t^2)}} = p^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

Auf der linken Seite hat man jetzt ein zum „Modul" k' gehöriges vollständiges elliptisches Integral erster Gattung K', auf der rechten Seite ein vollständiges, ebenfalls zum Modul k' gehöriges elliptisches Integral zweiter Gattung E', für deren Berechnung Funktionstafeln zur Verfügung stehen (z. B. Jahnke und Emde, Funktionstafeln S. 68). Wir können danach den Wert $m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$ berechnen.

Die durch (66) und (67) dargestellte Strömung setzt sich also aus einer Strömung in Richtung der x-Achse $v_{x\infty}$, einer für beide Konturen zirkulationsfreien Strömung $v_{y\infty} \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2\,(z^2 - q^2)}}$ in Richtung der y-Achse und einer für $z = n$ verschwindenden Zirkulationsströmung $\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z - n}{\sqrt{(p^2 - z^2)\,(z}}$ $==$ zusammen.

Wir wollen uns nun wieder denken, daß wir es mit zwei schmalen spaltförmigen Profilen zu tun haben, die sich sehr nahe an die beiden Strecken anschmiegen, aber an der Vorderkante abgerundet sind; dann haben wir dafür Sorge zu tragen, daß an der Hinterkante beider Profile, d. h. für $z = -p$ und für $z = +q$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ nicht unendlich groß wird, sondern daselbst glatter Abfluß der Strömung in Richtung der x-Achse erfolgt. Dadurch erhalten wir eine Bestimmung für Γ und n. Es ergibt sich:

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = (p - q)\, v_{y\infty},\quad n = \frac{p}{1 - k}\left(k - \frac{E'}{K'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

und $\mathfrak{v}'$ erhält die Form:

$$\mathfrak{v}' = v_{x\infty} - i v_{y\infty} \sqrt{\frac{(z + p)\,(z - q)}{(z + q)\,(z - p)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Zur Bestimmung der Auftriebskraft und ihres Moments um $z = 0$ erhalten wir nun genau wie auf S. 60 und S. 64

$$\mathfrak{P}' = \frac{\rho i}{2} \int_K \mathfrak{v}'^2\, dz,\quad M = -\frac{\rho}{2}\, \Re \int \mathfrak{v}'^2 z\, dz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

wo K ein sehr großer Kreis um den Punkt $z = 0$ ist und $\Re$ den reellen Teil einer Größe angibt. Zur Bestimmung dieser Integrale haben wir wieder $\mathfrak{v}'$ für große Werte von z nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ zu entwickeln und erhalten:

$$\mathfrak{v}' = v_{x\infty} - i\, v_{y\infty} - i v_{y\infty}\,(p - q)\,\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\, i v_{y\infty}\,(p - q)^2\,\frac{1}{z^2} + \ldots\ldots \quad (72)$$

Wir finden also entsprechend (69)

$$\Gamma = \int_K \mathfrak{v}'\, dz = 2\pi\, (p - q)\, v_{y\infty},$$

und entsprechend (38) und (39), wenn $\mathfrak{v}_\infty = v_{x\infty} + i v_{y\infty}$, $\mathfrak{v}'_\infty = v_{x\infty} - i v_{y\infty}$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{P}' = \frac{i\rho}{2}\, (p - q)\, 4\pi\, \mathfrak{v}'_\infty\, v_{y\infty} = i\rho\, \Gamma \mathfrak{v}'_\infty,$$

$$\mathfrak{P} = - i\rho\, \Gamma \mathfrak{v}_\infty.$$

Die Auftriebskraft steht also wiederum auf dem Vektor $\mathfrak{v}_\infty$ senkrecht und ihr absoluter Wert ist

$$A = \rho\, \Gamma u = \rho \pi\, 2\, (p - q)\, u^2 \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem Werte (52) für den Auftrieb bei einem einfachen Spalt, so sehen wir, daß der Auftrieb gerade so groß ist wie bei einem einfachen Spalte, der durch Zusammensetzen der beiden Strecken entsteht.

Für das Moment M erhält man

$$M = \frac{1}{2} \qquad (p \qquad \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

also für den Hebelarm der Kraft

$$h = \frac{p - q}{2} \cos\alpha,$$

wieder ganz entsprechend (52) beim einfachen ebenen Tragflügel.

Wenn man die Luftkraft jedes Tragflügels für sich bestimmen will, muß man entsprechend der Blasiusschen Formel S. 60 $\int \mathfrak{v}'^2 dz$ über je ein den betreffenden Tragflügel umschlingende Kurve berechnen. Bezeichnet man den zum vorderen Tragflügel gehörigen Kraftvektor mit $\mathfrak{P}^{(1)}$, den zum hinteren gehörigen mit $\mathfrak{P}^{(2)}$, so erhält man:

$$\mathfrak{P}^{(1)} = i\rho \int_q^p \mathfrak{v}'^2 dz, \quad \mathfrak{P}^{(2)} = i\rho \int_{-}^{-q} \mathfrak{v}'^2$$

Zerlegt man jedesmal $\mathfrak{P} = P_x + i P_y$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} P_x^{(1)} &= 2\pi\rho v^2_{y\infty} \frac{p\,(p - q)}{p + q} = 2\pi\rho u^2 \sin^2\alpha\, \frac{p\,(p - q)}{p + q} \\ P_x^{(2)} &= 2\pi\rho v^2_{y\infty} \frac{q\,(p - q)}{p + q} = 2\pi\rho u^2 \sin^2\alpha\, \frac{q\,(p - q)}{p + q} \end{aligned}\right\}$$

Zur Berechnung der y-Komponenten setzt man wieder, wie auf S. 98,

$$k = \frac{q}{p}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad 1 - \frac{z^2}{p^2} = k'^2 t^2$$

und erhält:

$$P_y^{(1)} = -\, 2\rho\, v_{x\infty} v_{y\infty} \int_0^1 \frac{(q - p)\sqrt{1 - k'^2 t^2} + p\,(1 - k'^2 t^2) - q}{\sqrt{(1 - t^2)\,(1 - k'^2 t^2)}}\, dt.$$

Da $\int\limits_0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$ ist, so findet man, wenn man die Bezeichnungen K' und E' der S. 89 benutzt, und $D = \frac{z}{(p-q)\pi}[pE' - qK']$ einführt,

$$P^{(1)} \quad 1 \quad \text{[illegible]}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_y^{(2)} = \frac{1}{2}\pi\rho\,(p-q)\,u^2 \sin 2\alpha\,(1-D) \end{array}\right\}. \tag{76}$$

Da die Werte für K' und E', also auch der Wert für D, aus Funktionentafeln entnommen werden können, so sind nach (75) und (76) die Komponenten der Einzelkräfte bekannt. Da D positiv ist, so sieht man, daß die auf den vorderen Tragflügel wirkende Kraft größer ist als die auf den hinteren.

§ 13. Zwei Tragflügel übereinander.

Von den für zwei hintereinander liegenden Flügeln geltenden Ausdrücken für die Luftkraft kann man nun durch eine einfache Transformation zu zwei über-

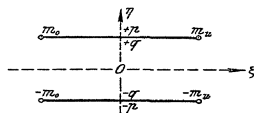
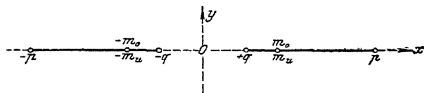



Abb. 61. Zwei Flügel übereinander. Abb. 62. Zwei Flügel hintereinander.

einander liegenden Flügeln kommen. Es mögen in der ζ-Ebene zwei gleichtiefe Tragflügel von der Tiefe t parallel im Abstande h, so daß Vorder- und Hinterkanten senkrecht übereinander liegen, gegeben sein; die Abszissenachse sei die Mittelparallele und der Anfangspunkt liege zwischen den beiden Flügelmitten (Abb. 61). In der z-Ebene seien die beiden Tragflügel hintereinander gezeichnet (Abb. 62). Es soll eine Funktion $\zeta = f(z)$ gefunden werden, die die Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene vermittelt.

In der ζ-Ebene gibt es eine Strömung parallel der ξ-Achse von konstantem Werte $v_{\xi\infty}$. Die entsprechendeStrömung in der z-Ebene muß eine für beide Flügel zirkulationsfreie sein, muß also nach S. 88 die Form

$$\frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}}$$

haben, wo $m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$ ist. Bezeichnen wir das komplexe Potential dieser Strömungen mit w, so muß

$$\frac{dw}{d\zeta} = v_{\xi\infty}, \quad \frac{dw}{dz} = v_{x\infty} + v_{y\infty} \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}},$$

$$v_{\xi\infty} \frac{d\zeta}{dz} = v_{x\infty} + v_{y\infty} \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}}.$$

Setzen wir also fest, daß sich $z = 0$ und $\zeta = 0$ entsprechen sollen, so erhalten wir

$$\zeta = \frac{v_{x\infty}}{v_{\xi\infty}} z + \frac{v_{y\infty}}{v_{\xi\infty}} \int_0^z \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz.$$

Man erkennt nun leicht, daß der Übergang von Abb. 61 zu 62 durch $v_{x\infty} = 0$ erhalten wird. Setzen wir also noch $\frac{v_{y\infty}}{v_{\xi\infty}} = -\lambda$, so finden wir die gesuchte Abbildungsfunktion in der Form

$$\zeta = -\lambda \int_0^z \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz, \quad m^2 = p^2 \frac{E'}{K'} \qquad \ldots\ldots (77)$$

die einander entsprechenden Punkte sind in den Abb. 61 und 62 durch entsprechende Bezeichnungen kenntlich gemacht. Es ergeben sich danach folgende Bedingungen, die zur Bestimmung von p, q und λ dienen:

$$\frac{1}{2} ih = -\lambda \int_0^p \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz = -\lambda \int_0^q \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz$$

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{2} ih = -\lambda \int_0^{mu} \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz,$$

$$-\frac{t}{2} + \frac{1}{2} ih = -\lambda \int_0^{mo} \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz.$$

Die erste Gleichung enthält wieder die Bedingung $m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$, und die zweite drückt aus, daß das Vorzeichen der Wurzel unter dem Integralzeichen auf der Oberseite der Flügel dem auf der Unterseite entgegengesetzt ist. Wir stellen die erste der beiden Gleichungen und die durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhaltene nebeneinander:

$$\frac{1}{2} ih = -\lambda \int^q \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz, \quad \frac{t}{2} = -\lambda \int^{mo} \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}} dz \quad . \ (78)$$

In den Gleichungen (78) kommen, wenn wir $q = pk$ setzen, nur die unbekannten Größen λ, k und p, vor. Da wir nur zwei Gleichungen haben, können wir p beliebig wählen. Dann erhalten die Gleichungen (78) durch einfache Transformationen folgende Gestalt:

$$E - \quad \frac{E'}{K'} \qquad (79)$$

wenn wieder die Bezeichnung

$$\frac{dt}{\quad - t^2)(1 - \quad} \qquad E = \int \sqrt{\quad - t^2}$$

eingeführt wird, und

$$\frac{t}{2p} \qquad \cdot\, dt - \frac{E'}{K'}\int\limits_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k'^2t^2)}}\Bigg] \quad . \;.\;.\;.\;. \quad (80)$$

wobei $\tau = \sqrt{\dfrac{1-\left(\dfrac{E'}{K'}\right)^2}{1-k^2}}$ gesetzt ist.

Da sowohl für die vollständigen elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung K, E, K', E', die zu den „Moduln“ k bzw. k' gehören, als auch zu den unvollständigen Integralen der Gleichung (80), die zum Modul k' gehören, wie oben angegeben, Funktionentafeln zur Verfügung stehen, sind die bei der Abbildungsfunktion, Gleichung (77), noch verfügbaren Konstanten λ und k somit berechenbar.

Da wir nun nach S. 88 für die allgemeine Strömung in der z-Ebene haben:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dz} = v_{x\infty} + v_{y\infty}\,\frac{z^2-m^2}{\sqrt{(p^2-z^2)\,(z^2-q^2)}} + \frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{z-n}{\sqrt{(p^2-z^2)\,(z^2-q^2)}}$$

so erhalten wir in der ζ-Ebene dementsprechend

$$\mathfrak{v}' = \frac{dw}{} \qquad v_{y\infty} \qquad v_{x\infty}\,\sqrt{(p^2-z\;{}^2-q^2)} \qquad \frac{z-n}{2\pi\lambda\; z^2-m^2}$$

Setzen wir $-\dfrac{v_{y\infty}}{\lambda} = v_{\xi\infty}$, $-\dfrac{v_{x\infty}}{\lambda} = v_{\eta\infty}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{v}' = \frac{dw}{d\,\,} = \qquad\qquad 2\pi\lambda\; z^2 \;\cdot m^2$$

Für große ζ hat man $\dfrac{dw}{d\zeta} = v_{\xi\infty} - i\,v_{\eta\infty}$, so daß also $v_{\xi\infty}$ und die Komponenten der Geschwindigkeit in großer Entfernung von den Tragflügeln sind. Damit die Geschwindigkeit an den beiden Hinterkanten endlich bleibt, müssen Γ und n so bestimmt werden, daß

$$v_{\eta\infty}\,\sqrt{(p^2-z^2)\,(z^2-q^2)} - \frac{\Gamma}{2\pi\lambda}\,(z-n)$$

für $z = +\,m$ und positiven Wert der Quadratwurzel, sowie $z = -\,m$ und negativen Wert der Quadratwurzel verschwindet. Man erkennt daraus, daß $n = 0$ sein muß, und

$$\Gamma = 2\pi\lambda\,\frac{\sqrt{(p^2-m^2)\,(m^2-k^2p^2)}}{m} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (81)$$

Entwickelt man $\mathfrak{v}'$ nach Potenzen von $\frac{1}{\zeta}$, so erhält man:

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}'_\infty - \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{\zeta} + \ldots$$

und erkennt mittels der Formel $\mathfrak{P}' = \dfrac{\varrho\, i}{2}\displaystyle\int \mathfrak{v}'^2\,dz$, daß wiederum der Kraftvektor

auf dem Vektor $\mathfrak{v}_\infty$ senkrecht steht und die absolute Größe

$$A = 2\tau \qquad {}_{m}\sqrt{(p^2} \tag{82}$$

besitzt. Schreibt man A in der Form

$$A = 2\pi\rho t u^2 \sin\alpha \cdot L,$$

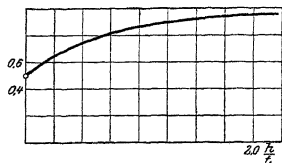



Abb. 63. Verhältnis der Tragfähigkeit des Doppeldeckers zu der des Eindeckers von gleicher Gesamttiefe.

wo dann der Faktor L das Verhältnis des Auftriebes beim Doppeldecker zu dem des Eindeckers der Tiefe $2t$ angibt, so erhält man, wenn man L als Funktion von $\frac{h}{t}$ darstellt (vgl. Abb. 63), daß L immer kleiner als 1 ist. Die Tragfähigkeit des Doppeldeckers wächst also zwar, wenn $\frac{h}{t}$ größer wird, bleibt aber immer unter der des Eindeckers.

III. Kapitel.

Der Tragflügel von endlicher Breite.

§ 1. Einwirkung der Flügelenden.

Im § 3 des I. Kapitels haben wir gesehen, daß der Außenraum eines in eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit eingetauchten Körpers einfach zusammenhängend ist, daß in einem solchen Raum ein Geschwindigkeitspotential eine eindeutige Funktion des Ortes sein muß und endlich, daß auf einen in einer solchen Potentialströmung befindlichen Körper keine Kraft, weder ein Widerstand noch ein Auftrieb ausgeübt wird. Ist der Körper nach zwei Seiten unendlich ausgedehnt, so ist nun der Außenraum nicht mehr einfach zusammenhängend, die Potentialfunktion braucht darum keine eindeutige Funktion mehr zu sein. Im II. Kapitel § 2 haben wir gesehen, daß nun in der Tat zur Potentialfunktion mathematisch ein nicht eindeutiges logarithmisches Glied, das physikalisch eine den Tragflügel umschlingende Zirkulationsströmung darstellt, hinzutritt, wodurch es möglich wurde, die Erklärung für eine von der Flüssigkeitsströmung auf den Körper ausgeübten Auftriebskraft und ihre Berechnung zu finden. Aber noch immer steht die Erklärung des Widerstandes aus.

Denken wir uns den Querschnitt des nach beiden Seiten ins Unendliche gehenden zylindrischen Tragflügelkörpers sehr klein, so daß wir in dem Flügel einen dünnen, geradlinigen Faden vor uns haben, so stellt dieser Faden im Raume ein Gebilde dar, daß man einen W i r b e l f a d e n nennt. Wie wir sehen werden, ist es eine der wichtigsten Eigenschaften eines solchen Wirbelfadens, daß er im Endlichen weder beginnen noch aufhören kann und gerade diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Tragflügelfaden unendlich ausgedehnt ist. Dabei ist auch noch immer der Flüssigkeitsraum außerhalb des Tragflügels ohne Rotation; denn wenn auch

die Flüssigkeit als Ganzes eine Drehung um die, nicht zur Flüssigkeit gehörende Flügelachse ausführt, so gibt es doch außerdem in der Flüssigkeit selbst keine weiteren Rotationsachsen, so daß die Strömung im gesamten Flüssigkeitsraume immer noch rotationsfrei ist, also eine Potentialströmung darstellt. Wenn aber nun der Tragflächenfaden nur eine endliche Spannweite besitzt, und wenn wir uns dieses endliche Fadenstück, was ja notwendig ist, von einer Zirkulationsströmung umgeben denken, so kann dieses endliche in der Flüssigkeit vorhandene Wirbelstück für sich allein nicht bestehen, wir müssen uns vielmehr vorstellen, daß der Wirbelfaden, auch über die Enden des Tragflügels hinaus nach beiden Seiten ins Unendliche weitergeht; d. h. aber, wir können es nicht mehr vermeiden, daß außerhalb des Flügels Wirbel existieren, d. h. Rotationen um Achsen, die dem Flüssigkeitsraume angehören. Der Raum außerhalb des Tragflügels ist also jetzt nicht mehr rotationsfrei, wir haben daher nicht mehr überall eine Potentialströmung. Dabei bleibt allerdings zunächst eine erhebliche Schwierigkeit bestehen, auf die schon am Ende des I. Kapitels hingewiesen wurde. Wir werden nämlich im nächsten Paragraphen sehen, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit nach den Helmholtzschen Sätzen Wirbel niemals neu entstehen oder vergehen können. Wir müßten also annehmen, daß der Wirbelfaden, den wir an die Stelle unseres Tragflügels gesetzt haben, und ebenso seine Fortsetzung in den Raum hinaus, von Anfang an vorhanden gewesen ist, was natürlich ein Unding wäre. Eine Erklärung für dieses Paradoxon werden wir später durch die Prandtlsche Grenzschichtentheorie gewinnen. Wir werden bei dieser Gelegenheit sehen, daß die innere Reibung der Flüssigkeit, die ja an sich sehr gering ist, in einer kleinen, die Tragfläche unmittelbar umgebenden Schicht sehr wesentliche Wirkungen auslöst, die als die Ursache für die Entstehung der Zirkulationsströmung angesehen werden müssen. Aber außerhalb dieser Grenzschicht bleibt die Wirkung der inneren Reibung nach wie vor sehr gering, so daß wir dort die Flüssigkeit als reibungslos ansehen können und daher auch weiterhin die Eulerschen Gleichungen heranziehen dürfen. Wir wollen also annehmen, daß während des Fluges Wirbel in der Flüssigkeit vorhanden sind, ohne uns vorerst darüber Gedanken zu machen, wie sie entstanden sind.

Ehe wir zur hydrodynamischen Behandlung dieser Wirbelbewegungen kommen, wollen wir uns ihr Vorhandensein in der Flüssigkeit noch auf eine andere Weise anschaulich machen. Wenn auf den Flügel ein Auftrieb wirken soll, so muß notwendig der Flüssigkeitsdruck oberhalb geringer sein als unterhalb. Nach der Bernoullischen Gleichung [I (14), vgl. auch die analogen Betrachtungen auf S. 49], $p = C - \frac{1}{2}\rho v^2$, folgt aber daraus, daß die Geschwindigkeit der Strömung auf der Oberseite größer sein muß als auf der Unterseite. Wenn nun der Tragflügel von endlicher Ausdehnung ist, so ist jetzt ein Ausgleich dieses Druckunterschiedes über die Enden des Flügels herum möglich; d. h. es wird sich in Richtung der Flügelbreite — was wir bei dem unendlich langen Tragflügel ja ausgeschlossen hatten — eine Geschwindigkeitskomponente ergeben. Wir haben uns diese Ausgleichsströmung so vorzustellen, daß sie von der Mitte des Flügels aus unterhalb von innen nach außen, oberhalb von außen nach innen erfolgt (Abb. 64).

Da diese Geschwindigkeitskomponenten aber auch noch vorhanden sind, nachdem die Flüssigkeitsteilchen die Flügelfläche verlassen haben, wird sich hinter dem Flügel eine sog. Diskontinuitätsfläche ergeben, d. h. eine Schicht, längs der zwei Flüssigkeiten mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander vorbeigleiten. Eine solche Unstetigkeitsfläche aber kann man immer leicht durch eine Reihe paralleler Wirbelfäden hervorgerufen denken, deren Achsen in Richtung der Flugzeugbewegung liegen, wie aus Abb. 65 ersichtlich ist. Wir kommen also auch von hier aus zu der Vorstellung von Wirbeln, die vom Tragflügel aus in die Flüssigkeit hineingehen; und da die Ausgleichsströmung an den Enden besonders stark ist, haben wir dort auch hauptsächlich die Ablösung von Wirbeln zu erwarten.

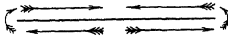



Abb. 64.
Ausgleichsströmung um die Flügelenden.

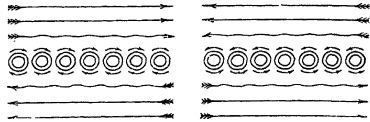



Abb. 65. Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit durch eine Wirbelschicht ersetzt.

§ 2. Hydrodynamische Grundlagen der Wirbeltheorie.

Wir haben im § 2 des I. Kapitels gesehen, daß man eine jede in der Flüssigkeit vorhandene Drehung als das Ergebnis von drei Drehungen mit den Winkelgeschwindigkeiten $\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$ $\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$ $\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$ ansehen kann. Die Drehachse wurde als Richtung und die doppelten Werte der Winkelgeschwindigkeiten als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{c}$ eingeführt, so daß also $\mathfrak{c}$ die Komponenten

$$c_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \qquad c_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \qquad c_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

besitzt. Den Richtungssinn dieses Vektors wählen wir so, daß die Drehung in dieser Richtung eine Rechtsschraube bildet und nennen diesen Vektor die Rotation von $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

Die Bedingung dafür, daß in der Flüssigkeit überall ein Geschwindigkeitspotential existiert, war die, daß für den ganzen Flüssigkeitsraum $c_x = c_y = c_z = 0$ ist. Nach den Überlegungen des vorigen Paragraphen haben wir aber nunmehr anzunehmen, daß in der Flüssigkeit Gebiete vorkommen, in denen $\mathfrak{c} \neq 0$ ist. Gehen wir nun genau so, wie wir es bei der Konstruktion der Stromfäden getan haben (S. 37) von einer Stelle x, y, z, in der $\mathfrak{c} \neq 0$ ist, aus, indem wir eine unendlich kleine Strecke dem Vektor $\mathfrak{c}$ folgen bis zum Punkte $x + dx, y + dy, z + dz$, von diesem aus weiter in der Richtung des dortigen Vektors $\mathfrak{c}$ usw., so erhalten wir eine Linie, die wir als eine Wirbellinie bezeichnen wollen. Die Differentialgleichungen einer solchen Linie sind offenbar:

$$\frac{dx}{c_x} = \frac{dy}{c_y} = \frac{dz}{c_z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Wir legen wieder in jedem Punkte einer solchen Linie ein unendlich kleines Flächenelement senkrecht zur Tangente an die Wirbellinie, also senkrecht zu ihrem Bogenelement ds. Durch alle Punkte eines solchen Flächenelementes konstruieren wir die zugehörigen Wirbellinien; diese Wirbellinien werden sich in ihrem Verlaufe stets nur unendlich wenig voneinander und von der Ausgangslinie entfernen und werden sich auch untereinander nicht schneiden, solange c_x, c_y, c_z endlich bleiben und nicht alle drei gleich Null sind. Die Gesamtheit der so konstruierten Wirbellinien bildet einen **Wirbelfaden**. Der veränderliche, aber immer unendlich kleine Querschnitt eines Wirbelfadens werde mit q bezeichnet. Wir betrachten nun ein Stück eines solchen Wirbelfadens zwischen den Punkten A_1 und A_2, wo der Querschnitt die Werte q_1 und q_2 hat und wenden auf dieses Stück den sog. Gaußschen Integralsatz an, durch den ein Raumintegral in ein Oberflächenintegral umgewandelt wird. Sind X, Y, Z drei im Raume stetige Funktionen des Ortes, so lautet dieser Satz:

$$\int\left(\frac{dX}{dx} \quad dY \quad \frac{dZ}{dz}\right) d\tau = -\int[\ \cos \qquad Y\cos(n, y) + Z\cos$$

Dabei ist das Integral linker Hand über einen abgegrenzten Raumteil zu erstrecken, während das Integral der rechten Seite über die diesen Raumteil begrenzende Fläche geht, $d\tau$ ein Raumelement, do ein Flächenelement und n die nach innen gerichtete Normale der Fläche bedeutet. Werden in diesem Integralsatz für X, Y, Z die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ gesetzt, so ist der Integrand der linken Seite das, was wir die Divergenz des Vektors genannt haben (vgl. S. 38), während der Integrand der rechten Seite die Komponente a_n dieses Vektors in der Richtung n bedeutet. Wir erhalten also:

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{a}\, d\tau = -\int a_n\, do \qquad (3)$$

Wählen wir nun als Vektor $\mathfrak{a}$ den Vektor $\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}$, so erkennt man aus (1) sofort, daß $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$ ist, daß also $\int c_n\, do$ über die Begrenzungsfläche unseres Stromfadenstückes erstreckt, den Wert Null haben muß. Da nun der Konstruktion des Wirbelfadens entsprechend in seiner Mantelfläche überall c_n gleich Null ist, so lehrt die Gleichung (3), wenn mit c_1 und c_2 die in Richtung des Stromfadens genommenen Komponenten von $\mathfrak{c}$ an den Stellen A_1 und A_2 bezeichnet werden, daß

sein muß; d. h. aber, daß der Ausdruck cq, der das **Moment des Wirbelfadens** genannt wird, **längs des ganzen Wirbelfadens einen konstanten Wert haben muß**.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze ist die, daß ein Wirbelfaden in einem Punkte im Innern der Flüssigkeit weder beginnen noch aufhören kann. **Es müssen also alle Wirbelfäden entweder geschlossene Linien bilden oder aber an den Grenzen des Flüssigkeitsraumes bzw. im Unendlichen anfangen und enden.**

Der Satz von **Stokes**, den wir schon in I § 3, Gleichung (15), auf den Geschwindigkeitsvektor und seine Rotation $\mathfrak{c}$ angewandt haben, besagt, daß

$$\int c_\nu\, do = \int v_s\, ds.$$

Es ist also die Zirkulation in irgendeiner geschlossenen Linie gleich der Summe der Momente aller von dieser Linie umschlungenen Wirbelfäden.

Daraus ergibt sich Folgendes: Wenn ein Tragflügel Auftrieb hat, so muß, wie wir gesehen haben, die Zirkulation in einer ihn umschlingenden Linie von Null verschieden sein. Streift man nun diese geschlossene Linie über ein Ende des Flügels hinüber, so muß, da ja dort kein Auftrieb mehr vorhanden ist, die Zirkulation in der Linie gleich Null sein; es müssen also beim Hinüberstreifen notwendig Wirbelfäden geschnitten worden sein.

So sehen wir auch jetzt wieder, daß von der Tragflügel notwendigerweise Wirbelfäden in die Flüssigkeit abgehen müssen.

Aus den Eulerschen Gleichungen S. 38 (2) bzw. (2a), wie sie für unseren Luftraum gelten, folgt ferner ein Satz, den wir hier ohne Beweis anführen wollen: Es sei S_0 irgendeine ganz im Flüssigkeitsraume liegende geschlossene Linie zur Zeit $t = 0$; sie möge zur Zeit t in die Linie S übergegangen sein; dann ist

$$\int\limits_{S_0} v_s\,ds = \int\limits_{S} v_s\,ds.$$

Das heißt aber: Die Zirkulation längs einer geschlossenen Flüssigkeitslinie ändert sich mit der Bewegung der diese Linie bildenden Flüssigkeitsteilchen nicht.

Wendet man diesen Satz auf eine geschlossene Kurve an, die ganz in der Mantelfläche eines Wirbelfadens gelegen ist, so daß also in ihr die Zirkulation gleich Null ist, so muß die Zirkulation in dieser Linie mit der Zeit unveränderlich den Wert Null behalten: Die Flüssigkeitsteilchen, die zu irgendeiner Zeit in einer Wirbellinie liegen, gehören im Verlaufe der Bewegung dauernd derselben Wirbellinie an.

Da die Zirkulation längs einer den Wirbelfaden umschlingenden Linie auch mit der Zeit unveränderlich ist, folgt, daß das Moment eines Wirbelfadens nicht nur längs des ganzen Fadens konstant, sondern auch mit der Zeit unveränderlich ist.

Die angeführten Sätze sind die berühmten, zuerst von Helmholtz ausgesprochenen Gesetze der Wirbelbewegung.

Aus diesen Sätzen haben wir also, wie schon im vorigen Paragraphen hervorgehoben wurde, den Schluß zu ziehen, daß in einer idealen reibungslosen Flüssigkeit Wirbel niemals neu entstehen oder vergehen können.

§ 3. Das Geschwindigkeitsfeld eines von Wirbeln durchsetzten Flüssigkeitsraumes.

Wegen der Kontinuitätsgleichung, einer Folge der Konstanz der Masse und der Inkompressibilität unserer Flüssigkeit [Gleichung (4) S. 38], ist der Geschwindigkeitsvektor von der Art, daß seine Divergenz verschwindet. Man beweist nun in der Vektoranalysis, daß jeder Vektor, dessen Divergenz verschwindet, als Rotation eines neuen Vektors aufgefaßt werden kann, dessen Divergenz verschwindet.

Demnach machen wir für den Geschwindigkeitsvektor für den Fall, daß in unserem Flüssigkeitsraum Wirbel vorkommen, den Ansatz:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{a}.$$

Da nun andererseits der die vorhandenen Drehbewegungen darstellende Vektor $\mathfrak{c}$ die Rotation von $\mathfrak{v}$ ist, so haben wir

$$\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{a} \tag{5}$$

wozu noch die Bedingung

$$0$$

hinzutritt. Bezeichnet man die Komponenten von $\mathfrak{a}$ mit a_x, a_y, a_z, so liefert die Komponentenzerlegung von (5), wenn wir in der üblichen Weise $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ setzen und die Gleichung (6) berücksichtigen,

$$= - c_z,$$

welche Gleichungen man vektoranalytisch in die eine

$$\triangle \mathfrak{a} = - \mathfrak{c} \tag{7}$$

zusammenzufassen pflegt. Gleichungen von der Form (7) spielen in der Potentialtheorie eine wichtige Rolle. Wie beim Potential von Massenverteilungen, deren Dichtigkeiten die Werte $\frac{c_x}{4\pi}$, $\frac{c_y}{4\pi}$, $\frac{c_z}{4\pi}$ haben, erhält man auch hier:

$$a_x = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c_\xi}{r}\, d\tau, \quad a_y = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c_\eta}{r}\, d\tau, \quad a_z = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c_\zeta}{r}\, d\tau; \tag{8}$$

die Integration ist dabei über alle Wirbel enthaltenden Teile des Raums zu erstrecken und es bedeutet $d\tau$ ein Raumelement des Integrationsraumes, ξ, η, ζ einen Punkt von $d\tau$ und r die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte x, y, z, für den die Geschwindigkeit und darum a_x, a_y, a_z berechnet werden sollen. Wir wollen die Ausdrücke (8) z. B. dazu benutzen, das Geschwindigkeitsfeld eines Wirbelfadens zu berechnen, das für das folgende von besonderer Wichtigkeit ist.

Bedeutet ds das Bogenelement eines Wirbelfadens und q seinen Querschnitt, so ist $d\tau = q\,ds$. Bedeutet weiter c_s die Komponente des Vektors $\mathfrak{c}$ in Richtung von ds, so ist $q\,c_s$, das Wirbelmoment des Fadens, nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen längs des ganzen Fadens konstant und gleich der Zirkulation, die wir mit Γ bezeichnen wollen. Da ja der Vektor $\mathfrak{c}$ längs des Fadens überall die Richtung ds hat, so können wir den Vektor $\mathfrak{a}$ nach (8) in die Form

$$\mathfrak{a} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\mathfrak{b}}{r} \tag{9}$$

schreiben, wenn $d\mathfrak{b}$ nach Größe und Richtung den Vektor des Bogendifferentials ds bedeutet und die Integration über den ganzen Faden L erstreckt wird.

Wir bezeichnen in der üblichen Weise das äußere oder vektorielle Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathfrak{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ durch

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \quad a_y b_z - a_z b_y, \; a_z b_x - a_x b_z, \; a_x b_y - a_y b_x$$

so daß also $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ einen Vektor vom absoluten Betrage $ab \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ darstellt, der auf der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Ebene senkrecht steht, und zwar so, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ein Rechtssystem bilden. Wenn wir dann endlich noch den Fahrstrahl vom Bogenelement ds nach x, y, z, von der Länge r, mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen, so ergibt die Berechnung von $\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{a}$ nach (9)

$$\mathfrak{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{r^3}; \qquad (10)$$

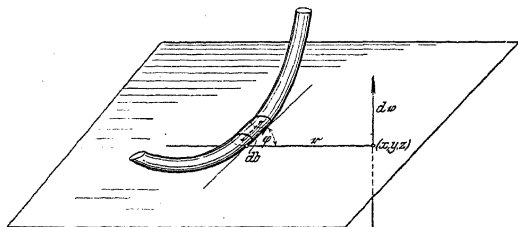



Abb. 66. Zum Biot-Savartschen Gesetz.

man kann also sagen: Jedes Element ds eines Wirbelfadens liefert zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ eines Punktes außerhalb des Fadens einen Beitrag $d\mathfrak{v}$ vom Betrage

$$\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{ds \sin\varphi}{r^2}$$

der auf der Richtung von $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ senkrecht steht, wenn φ den Winkel zwischen $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ bedeutet (vgl. Abb. 66).

Abb. 67. Geschwindigkeitsfeld eines geraden Wirbelfadens.

Es besteht hier eine vollkommene Analogie zum Biot-Savartschen Gesetz der Elektrodynamik, welches die Einwirkung eines elektrischen Stromes auf einen magnetischen Nordpol angibt. Wir haben nur die Richtung des Wirbelfadens durch die Richtung des elektrischen Stromes, die Zirkulationsstärke durch die Stromstärke und die Geschwindigkeit des Feldes durch die magnetische Feldstärke zu ersetzen.

So liefert z. B. das Stück AB eines geradlinigen Wirbels (vgl. Fig. 67) im Punkte P außerhalb des Wirbels einen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$, der auf der Ebene APB senkrecht steht und den Betrag

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi a}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

besitzt.

In derselben Weise folgt für den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ eines beliebigen von Wirbeln erfüllten Raumteiles R, der zu einem Punkte außerhalb R gehört, nach (8)

$$\mathfrak{v} = [\text{illegible}] \frac{\ldots\mathfrak{c}, \mathfrak{r}]\, d\tau}{r^3}. \qquad (10a)$$

§ 4. Gebundene und freie Wirbel.

Wenn wir im § 1 den unendlich breiten, zylindrischen Tragflügel von sehr kleinem Querschnitt mit der ihn umgebenden Zirkulation als einen Wirbelfaden bezeichnet haben, so müssen wir diese Aussage nach den Ergebnissen von § 2 jetzt dahin berichtigen, daß dieser Wirbel nicht dem Helmholtzschen Satze über die Bewegung der Wirbel — die Wirbel müssen sich ja frei mit den sie bildenden Flüssigkeitsteilchen bewegen — gehorcht, sondern daß ihm sein Platz durch die Bewegung des Flügels angewiesen ist. Wir wollen einen solchen Wirbel, der in jeder anderen Hinsicht wie ein wirklicher Flüssigkeitswirbel anzusehen ist, nach Prandtl, als einen gebundenen Wirbel bezeichnen.

Wenn wir nun dazu übergehen, uns ein Bild von den Vorgängen um einen endlichen Tragflügel zu machen, so wäre die einfachste Vorstellung, die wir uns bilden können, die, daß der gebundene Wirbel dem Tragflügel entsprechend eine endliche Ausdehnung AB besitzt (s. Abb. 68) und daß von seinen Enden aus zwei freie Wirbel in die Flüssigkeit hinausgehen, die zusammen mit dem gebundenen einen unendlich langen Wirbelfaden von überall gleicher Zirkulation Γ ausmachen. Da die freien Wirbel vom Flüssigkeitsstrom ergriffen und weitergetragen werden und da die Geschwindigkeit des Feldes, das vom Wirbel nach dem vorigen Paragraphen hervorgerufen wird, gegenüber der Anströmungsgeschwindigkeit der Luft gegen das Flugzeug nur sehr klein ist, so kämen wir auf diese Weise dazu, anzunehmen, daß sich die beiden freien Wirbel im wesentlichen in der Bewegungsrichtung der Luft mit leichter Abwärtsbewegung nach hinten erstrecken; dabei müßten ihre Achsen immer die gleiche Entfernung — die Spannweite des Tragflügels — haben.

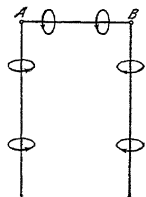



Abb. 68. Hufeisenwirbel.

Dieses Bild, das wir einen Hufeisenwirbel nennen wollen (vgl. Abb. 68), reicht für viele Zwecke schon aus, die Vorgänge zu beschreiben. Es ist z. B. von Betz, wie wir in IV § 5 sehen werden, mit Erfolg angewendet worden, um die gegenseitige Beeinflussung benachbarter Tragflügel zu untersuchen. Wir werden aber bald sehen, warum es nicht ausreicht, die Strömungsvorgänge um einen einfachen Fügel und die auf ihn wirkende Luftkraft bei Berücksichtigung der Selbstbeeinflussung durch den Wirbel zu berechnen.

Wir haben schon S. 97 gesagt, daß die Gleichungen (1)

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$$

ergeben. Wir wollen von jetzt an die Rotation bei einem gebundenen Wirbel mit $\mathfrak{c}_g$ und die bei einem freien Wirbel mit $\mathfrak{c}_f$ bezeichnen, so daß also in Punkten, in denen zugleich gebundene und freie Wirbel vorhanden sind, immer

$$\operatorname{div} \mathfrak{c}_f = -\operatorname{div} \mathfrak{c}_g, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

die Divergenz $\mathfrak{c}_f$ also von Null verschieden sein muß. Solche Punkte sind beim Hufeisenwirbel nur die Punkte A und B. Alle Luftteilchen, die bei der Bewegung des Flugzeuges bei A und B vorbeigekommen sind, bilden die von dort ausgehenden freien Wirbel. Für die beiden freien Wirbel spielt also der Punkt B die Rolle einer

Wirbelquelle und entsprechend der entgegengesetzten Richtung des anderen Wirbels der Punkt A die einer Wirbelsenke, indem bei B die Rotation eines freien Wirbels entsteht und bei A verschwindet.

Bei dem Bilde des Hufeisenwirbels bleibt die Zirkulation längs der ganzen Spannweite von A bis B konstant und fällt dann bei A und B plötzlich auf Null ab, wobei die verschwindende Zirkulation in die Zirkulation des entstehenden freien Wirbels umgewandelt wird. Wir werden uns aber der Wirklichkeit besser anpassen, wenn wir uns vorstellen, daß längs AB ein Bündel von immer kürzer und kürzer werdenden gebundenen Wirbeln ausgebreitet ist, die jedesmal an ihren beiden Endpunkten zwei freie Wirbel in die Flüssigkeit hinaussenden (vgl. Abb. 69); und wenn wir bei dieser Vorstellung zur Grenze übergehen, so kommen wir in Übereinstimmung mit den Betrachtungen von § 1 zu einem Wirbelband von der Breite des Tragflügels, daß sich längs der ganzen Spannweite ablöst. Nach den vorhergehenden Erörterungen ist dann die Tragfläche von der Mitte aus nach B hin mit einer stetigen Folge von Quellen und nach A hin von Senken besetzt, in denen freie Wirbel entstehen bzw. verschwinden.

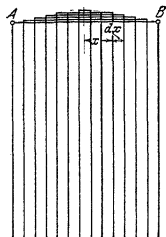



Abb. 69.

Legen wir in die Richtung von AB die Achse einer Variablen x, so daß die Mitte von AB der Anfangspunkt $x = 0$ ist, so wird nun die Zirkulation Γ längs des gebundenen Wirbelsystems eine stetige Funktion von x und wir können sagen: Wenn sich längs der Strecke dx $\Gamma(x)$ um $\frac{d\,\Gamma(x)}{dx}\,dx$ ändert, so muß in demselben Intervall auf dem freien Wirbelband die Zirkulation $\frac{d\,\Gamma}{dx}\,dx$ entstehen. Da von der Mitte nach dem Ende hin $\Gamma(x)$ abnimmt, so ist dann $-\frac{d\,\Gamma}{dx}\,dx$ eine positive Größe bei positivem und eine negative Größe bei negativem x.

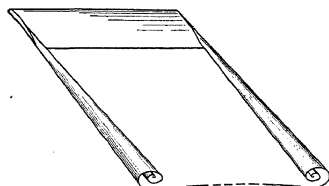



Abb. 70.

Es hat sich gezeigt, daß die Veränderung von Γ nach den Enden des Tragflügels hin am stärksten ist, so daß die Quellen und Senken der freien Wirbel besonders an den Flügelenden zu suchen sind. Daraus erklärt es sich, warum die Vorstellung des Hufeisenwirbels zur Beurteilung der Vorgänge in größerer Entfernung vom Flügel gut brauchbare Resultate geliefert hat. Bei dem hier gegebenen Bilde von dem Bündel gebundener Wirbelfäden wird der Flügel immer noch als ein Gebilde von sehr kleinem Querschnitt, d. h. also als linienförmig, angesehen, wobei also die Verteilung in Richtung der Tiefe noch keine Berücksichtigung gefunden hat. Ein solches Gebilde wollen wir einen **tragenden Faden** nennen.

Wir werden in V § 1 sehen, daß ein Wirbelband, das nach den Betrachtungen des § 1 durch eine Diskontinuitätsfläche ersetzt werden kann, nicht stabil ist. Das

Wirbelband rollt sich vielmehr hinter dem Tragflügel von den Rändern beginnend (vgl. Abb. 70) allmählich auf und verwandelt sich in größerer Entfernung in ein Paar von Wirbelzöpfen, das sich infolge der Reibung nach und nach verliert. Von diesem Vorgange wird man nicht absehen können, wenn man das Feld in größerer Entfernung hinter dem Flügel untersucht.

Will man aber die Wirkung auf den Tragflügel selbst betrachten, so wird man von dieser Eigenbewegung des Wirbelbandes absehen können, um so mehr, je kleiner das Seitenverhältnis Flügeltiefe zu Flügelbreite $t : b$ ist, und man wird so rechnen können, als ob die das Band bildenden Wirbelfäden in Richtung der Strömung geradlinig nach hinten verliefen. Mit dieser Vorstellung wird es gelingen, in § 6 eine schon recht brauchbare Eindeckertheorie nach Prandtl aufzubauen. Zunächst mögen aber noch einige allgemeinere Betrachtungen und theoretische Erörterungen Platz finden, die zur Berechnung der Luftkräfte erforderlich sind.

§ 5. Luftkraft und Geschwindigkeit.

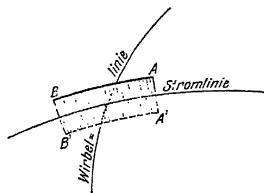
Wir wollen zunächst die Vorstellung des tragenden Fadens und des von ihm ausgehenden Wirbelbandes, wiederum nach Prandtl, noch verallgemeinern, da dieses Bild für manche Zwecke nicht ausreichend ist, z. B. wenn der Tragflügel in der Flugrichtung gebogen oder schräg gestellt ist.

Wir denken uns jetzt ein irgendwie gebildetes System von Tragflügeln und wollen uns wieder vorstellen, daß das System ruht und von einem Luftstrome angeblasen wird. Das Innere aller Tragflügel, das uns ja in keiner Hinsicht interessiert, wollen wir uns durch ruhende Flüssigkeitsmengen von demjenigen Drucke erfüllt denken, der bei der Geschwindigkeit Null (Staupunkt) herrscht. Dann sind die Oberflächen der die Tragflügel bildenden Körper Unstetigkeitsflächen der Geschwindigkeit, die, wie wir schon in § 1 ausgeführt haben, durch Wirbelfäden ersetzt werden können. Wir denken uns auf der Fläche die Stromlinien

Abb. 71.

$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$ gezeichnet und dazu die sie überall senkrecht schneidenden, ebenfalls auf der Fläche liegenden Wirbellinien (orthogonalen Trajektorien); parallel zu einer Stromlinie zu beiden Seiten der Fläche seien weiter die Bogenelemente AB und $A'B'$ gezeichnet, so daß ihre Entfernung δ die kleine, aber endliche Dicke der Wirbelschicht darstellt (Abb. 71).

Wenn wir dann die Bogen AB und $A'B'$ als gleich ansehen, also Größen von der Ordnung $\frac{\text{Schichtdicke}}{\text{Krümmungsradius}}$ vernachlässigen, so ist $v \cdot AB$ die Zirkulation längs $ABB'A'$, weil längs $A'B'$ die Geschwindigkeit Null ist. Ist dann c_g die Stärke der Rotation der Wirbelschicht, so ist $c_g \delta \cdot AB$ das Wirbelmoment für dieselbe Fläche, also:

$$c_g \cdot \delta = v.$$

Diese Wirbelschichten sind dann als das System der gebundenen Wirbel anzusehen.

Wenn wir die Wirbelschichten an Stelle der Grenzflächen der festen Körper in die Flüssigkeit einführen, so bleibt, wie man zeigen kann, durch ihre Wirkung die Strömung außerhalb der Körper genau dieselbe wie bei Anwesenheit der Körper.

Allerdings würde die strenge Lösung der Aufgabe zu einem gegebenen System von Tragflügeln das System der gebundenen Wirbel aufzufinden nicht geringere Schwierigkeiten bereiten, als die Beibehaltung der festen Körper in der Flüssigkeit. Aber der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß man mit großer Annäherung das System der gebundenen Wirbel durch verhältnismäßig einfache Annahmen ersetzen kann. So wird, wie schon gesagt, z. B. die Annahme der tragenden Linie in vielen Fällen ausreichend sein.

Bei der flächenhaften Anordnung der gebundenen Wirbel und der von ihnen abgehenden freien Wirbel erfüllen die aus dem Unendlichen kommenden Stromlinien nur den Raum außerhalb der festen Körper lückenlos. Für die Berechnung der Luftkraft ist es nach Prandtl zweckmäßig, von der flächenhaften Verteilung des Wirbelsystems zu einer räumlichen Verteilung überzugehen; wir erreichen dies dadurch, daß wir an Stelle einzelner weniger Tragflügel ein System von unendlich vielen, unendlich dünnen Flügeln setzen, so daß der von ihnen eingenommene Raum vernachlässigt werden kann. Am Schlusse wird dann wieder der Grenzübergang zur flächenhaften Verteilung ausgeführt.

Bei den gemachten Annahmen ist nun der Raum überall von Flüssigkeit erfüllt; die aus dem Unendlichen kommenden Stromlinien erfüllen ihn lückenlos und wir haben den Vorteil, daß die bekannten Beziehungen zwischen Wirbelgebieten und Geschwindigkeitsfeld für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit ohne weiteres herangezogen werden können. Bei Anwendung der Eulerschen Gleichungen I (2) müssen wir allerdings bedenken, daß an die Stelle der von der Flüssigkeit auf die eingetauchten festen Körper ausgeübten Kräfte nunmehr ein System von äußeren auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften zu treten hat. Diese Kräfte wirken auf die gebundenen Wirbel in der Weise ein, daß ihnen ihr Platz im Flüssigkeitsraume zugewiesen wird, während die der Strömung folgenden freien Wirbel von ihnen unberührt bleiben.

Wir interessieren uns für die Gesamtkraft, die von der Flüssigkeit auf das System der Tragflügel ausgeübt wird; diese Kraft werde durch den Vektor $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Es ist also $-\mathfrak{K}$ die von den Tragflügeln auf die Flüssigkeit ausgeübte Gesamtkraft. Da bei der räumlichen Verteilung der gebundenen Wirbel diese Kraft durch Summation (Integration) von Volumenkräften erhalten wird, wollen wir diese Volumenkraft pro Raumeinheit mit $\mathfrak{k}$ bezeichnen, so daß dann $\mathfrak{K}$ durch Integration über den ganzen, von gebundenen Wirbeln erfüllten Raum, den sog. tragenden Raum, erhalten wird. Bei Einführung der Kraft $\mathfrak{k}$ lauten die Eulerschen Gleichungen [vgl. S. 38, (2a)] in vektorieller Form

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\mathfrak{k} - \operatorname{grad} p \qquad (12)$$

Im Falle der stationären Strömung ist (vgl. S. 38) wegen $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$, $\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} v_z$ und dieser Vektor kann, wie die Ausrechnung leicht ergibt, in die Form

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \text{grad}\ \frac{v^2}{2} - [\mathfrak{v}, \text{rot}\ \mathfrak{v}]$$

geschrieben werden, so daß also die Eulersche Gleichung bei stationärer Strömung die Form

$$\text{grad}\ (p + \frac{\rho}{2} v^2) - \rho\, [v, \text{rot}\ v] = -\mathfrak{k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

erhält. Wir haben gesehen, daß im Falle der stationären Strömung (vgl. S. 42) längs einer Stromlinie $p + \frac{\rho}{2} v^2 = C$ ist, wobei allerdings C auf jeder Stromlinie einen anderen Wert haben kann. Wenn aber alle Stromlinien aus dem Unendlichen kommen — da sie ja nach unserer Festsetzung den Raum lückenlos erfüllen —, so muß C auf allen Stromlinien den Wert besitzen, der p_∞ und v_∞ entspricht, so daß also jetzt für den ganzen Raum die Bernoullische Gleichung

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} {v_\infty}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

gilt. Damit geht aber die Gleichung (13) in

$$\mathfrak{k} = \rho\, [\mathfrak{v}, \text{rot}\ \mathfrak{v}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

über. Wir haben S. 101 den Vektor $\mathfrak{c} = \text{rot}\ \mathfrak{v}$ in $\mathfrak{c}_g + \mathfrak{c}_f$, d. h. in die Rotationen der gebundenen und der freien Wirbel zerlegt. Da die freien Wirbel immer der Strömung folgen, also Stromlinien sind, müssen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{c}_f$ überall parallel, also

$$[\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_f] = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

sein, so daß also an Stelle von (15) auch

$$\mathfrak{k} = \rho\, [\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_g] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

geschrieben werden kann. Diese Gleichung ist ganz entsprechend der Kutta-Joukowskyschen Gleichung S. 62 (39) gebildet, nur daß sie hier für die Einheit des tragenden Raumes gilt.

Diejenigen Stromfäden, die den tragenden Raum durchsetzt haben, fallen mit den freien Wirbelfäden zusammen, so daß das Moment dieser Fäden $q \cdot c_f$ ist, wenn q der Querschnitt und c_f den absoluten Wert von $\mathfrak{c}_f$ bedeutet. Wir werden also dieses Moment erhalten, oder was dasselbe ist, die Zirkulation eines solchen Fadens, wenn wir nach dem Gaußschen Satz $\int \text{div}\ \mathfrak{c}_f\ d\tau = -\int \text{div}\ \mathfrak{c}_g\ d\tau$ über denjenigen Teil des tragenden Raumes integrieren, den der betreffende Stromfaden durchsetzt hat, d. h. also durch Summation aller Wirbelquellen bzw. -senken.

Wir erhalten nach (17) die gesamte auf unser Tragflügelsystem ausgeübte Luftkraft durch

$$\mathfrak{R} = \int_R \mathfrak{k}\ d\tau = \rho \int_R [\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_g]\ d\tau, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

wenn wir das Integral über den ganzen tragenden Raum erstrecken. Dabei ist aber zu bedenken, daß der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_\infty + \mathfrak{v}_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

zerlegt werden muß, wo $\mathfrak{v}_\infty$ den Geschwindigkeitsvektor in großer Entfernung und $\mathfrak{v}_1$ den Vektor bedeutet, der von dem Felde aller gebundenen und freien Wirbelfäden herrührt und der nach S. 100 Gleichung (10a) durch

$$_3\, [\mathfrak{c}_g + \mathfrak{c}_f, \mathfrak{r}]\, d\tau \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

gefunden wird, wo das Integral über alle Raumteile zu erstrecken ist, die von Wirbeln erfüllt sind.

Das Integral (18) geht bei Berücksichtigung von (19) in

$$_1, \mathfrak{c}_g]\, d\tau \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

über. Wenn im Raume R alle gebundenen Wirbel zueinander parallele Geraden bilden, braucht nach Munk in dem zweiten dieser Integrale bei der Berechnung von $\mathfrak{v}_1$ nach Gleichung (20) nur über das Gebiet der freien Wirbel integriert zu werden, da sich dann in diesem Integrale die $\mathfrak{c}_g$ enthaltenden Teile herausheben. Greifen wir nämlich irgendwie zwei parallele Wirbelstückchen ds_1 und ds_2 heraus, so ist der Geschwindigkeitsvektor, den ds_1 bei ds_2 hervorruft, dem von ds_2 in ds_1 hervorgerufenen entgegengesetzt oder gleichgerichtet, je nachdem die Zirkulationen Γ_1 und Γ_2 in ihnen gleich oder entgegengesetzt sind. Die Vektoren $[\mathfrak{v}_1^{(1)}, \mathfrak{c}_g^{(2)}]\, d\tau_2$ und $[\mathfrak{v}_1^{(2)}, \mathfrak{c}_g^{(1)}]\, d\tau_1$ sind also immer entgegengesetzt gerichtet. Ist F der Querschnitt eines Fadens, so ist $d\tau = F \cdot ds$ und $c_g \cdot F$ gleich der Zirkulation Γ; nennt man also r die Entfernung der Strecken ds_1 und ds_2 und φ den Winkel, den ds_1 und ds_2 mit r bilden, so ist der Betrag beider Vektoren (vgl. S. 100)

$$\frac{\Gamma_1 \Gamma_2\, ds_1\, ds_2 \sin \varphi}{4\pi r^2}.$$

Die beiden Integralanteile heben sich also heraus, da sie gleich groß sind und entgegengesetztes Vorzeichen haben.

§ 6. Der induzierte Widerstand.

Bei dem unendlich langen Tragflügel steht die Luftkraft auf der Richtung der Bewegung senkrecht, so daß also keine Komponente in der Bewegungsrichtung vorhanden ist. In der Tat wird ja dort auch keinerlei Energie vom Tragflügel an die Flüssigkeit abgegeben. Der endliche Tragflügel dagegen läßt in der Flüssigkeit in allen den Teilen, über die der tragende Raum hinweggegangen ist, eine Wirbelbewegung, die eine bestimmte kinetische Energie enthält, zurück; und da diese Energie durch eine äußere Arbeitsleistung aufgebracht werden muß, so ist klar, daß jetzt der Tragflügel seiner Vorwärtsbewegung einen gewissen Widerstand entgegensetzen muß. Diesen Widerstand, der von dem in der Flüssigkeit zurückbleibenden Wirbelsystem herrührt, nennt man Randwiderstand (Betz) oder

induzierten Widerstand. Er ist, wie wir sehen werden, noch nicht der vollständige Widerstand, aber doch ein sehr wesentlicher Bestandteil.

Zur Berechnung des induzierten Widerstandes bedenken wir, daß nach (15) der Kraftvektor $\mathfrak{k}$ auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ senkrecht steht. Da aber jetzt nach (19) $\mathfrak{v}$ als Summe des Anströmungsvektors $\mathfrak{v}_\infty$ (gleich und entgegengesetzt dem Geschwindigkeitsvektor des Tragflügels) und des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}_1$ der vom Wirbelfelde herrührt, erscheint, haben wir nunmehr eine Komponente von $\mathfrak{k}$ in der Richtung von $\mathfrak{v}_\infty$, also der Flugzeugbewegung entgegen, d. i. eben der gesuchte Widerstand (vgl. Abb. 72).

Abb. 72. Entstehung des induzierten Widerstandes.

Unter dem inneren oder skalaren Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man den skalaren Ausdruck

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = a\, b \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Bedeutet nun $\mathfrak{a}$ einen Kraftvektor und $\mathfrak{b}$ einen anderen Vektor, so stellt also $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ eine Arbeitsleistung dar, und zwar eine Leistung der Komponente von $\mathfrak{a}$ in der Richtung $\mathfrak{b}$. Bezeichnen wir die gesuchte Komponente von $\mathfrak{k}$ in der Richtung v_∞ mit w, so ist

$$w\, v_\infty = (\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_\infty) = (-\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_1); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

denn es muß $(\mathfrak{k}, \mathfrak{v}) = (\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_\infty) + (\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_1)$ gleich Null sein, da $\mathfrak{k}$ auf $\mathfrak{v}$ senkrecht steht. In (22) stellt dann $(\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_\infty)$ eine bei der Bewegung des Tragflügels geleistete Arbeit und $(-\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_1)$ die Arbeitsleistung dar, welche vom Tragflügel an die Flüssigkeit zur Erzeugung der Wirbelbewegung abgegeben wird. Mit Benutzung von (17) erhalten wir also

$$w\, v_\infty = -\rho\, ([\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_g], \mathfrak{v}_1).$$

Nun ist aber:

$$([\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_g], \mathfrak{v}_1) = ([\mathfrak{v}_\infty, \mathfrak{c}_g], \mathfrak{v}_1) + ([\mathfrak{v}_1, \mathfrak{c}_g], \mathfrak{v}_1).$$

Da aber $[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{c}_g]$ auf $\mathfrak{v}_1$ senkrecht steht, ist der zweite Summand gleich Null und wir erhalten

$$([\mathfrak{v}_\infty, \mathfrak{c}_g], \mathfrak{v}_1)$$

und wenn wir nun den Gesamtwiderstand mit W bezeichnen:

wo die Integration über den tragenden Raum zu erstrecken ist und $\mathfrak{v}_1$ wieder nach (20) gefunden wird.

Sind wieder alle gebundenen Wirbel parallele Gerade, so braucht auch hier bei der Berechnung von $\mathfrak{v}_1$ wieder nur der Beitrag der freien Wirbel in Rechnung gesetzt zu werden, da der Anteil der gebundenen Wirbel sich auch in (24) herausheben würde.

Die exakte Berechnung mit Hilfe der Ausdrücke (20), (21), (24) würde in den meisten Fällen unüberwindliche Schwierigkeiten bereiten, und man ist daher ge-

zwungen, nach einer Annäherungsmethode zu suchen. Eine solche bietet sich von selbst dar, wenn man bedenkt, daß in (19) der Betrag des Vektors $\mathfrak{v}_1$ nur klein im Vergleich zu $\mathfrak{v}_\infty$ ist und eine erste Näherung dadurch schafft, daß man überall da, wo $\mathfrak{v}_1$ neben $\mathfrak{v}_\infty$ als Summand auftritt, $\mathfrak{v}_1$ vernachlässigt. Dann gehen zunächst einmal die freien Wirbel, die ja, wie wir gesehen haben, Stromlinien sind, in gerade Linien in der Richtung $\mathfrak{v}_\infty$ über. Dadurch wird die Berechnung von $\mathfrak{v}_1$ nach (20) sehr erheblich vereinfacht; der dabei am Orte des Tragflügels begangene Fehler ist von der Ordnung $\mathfrak{v}_1$ Für den Fall paralleler und gerader gebundener Wirbel, der bisher der Berechnung allein zugänglich gewesen ist, hat man es jetzt bei der Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathfrak{v}_1$ nur mit einem System von geraden Wirbelfäden zu tun.

In dem Ausdrucke (21) für die Luftkraft $\mathfrak{K}$ kann dann der zweite Summand gegenüber dem ersten als klein vernachlässigt werden. D. h. nichts anderes, als daß der Wert des Kraftvektors $\mathfrak{K}$ in erster Näherung durch seine Komponente in der zur Bewegungsrichtung senkrechten Richtung ersetzt werden darf. Trotzdem aber bleibt der Auftrieb eines endlichen Tragflügels hinter dem eines Stückes von gleicher Breite, das man aus einem unendlich ausgedehnten Tragflügel herausgeschnitten hat, deswegen etwas zurück, weil die Zirkulation der gebundenen Wirbel durch die längs der Spannweite abgehenden freien Wirbel beeinträchtigt wird. Die Betrachtung des Ausdruckes (24) für den induzierten Widerstand W zeigt, daß seine Größe gegenüber dem für den Auftrieb nur als kleine Größe erster Ordnung erscheint, indem gerade hier das beim Auftrieb vernachlässigte zweite Glied von ausschlaggebender Bedeutung wird.

§ 7. Der Eindecker.

Wir gehen nunmehr dazu über, die bisher entwickelten Ausdrücke mit der am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebenen Vereinfachung für ein Bündel von geraden gebundenen Wirbelfäden, also für eine gerade tragende Strecke mit dem von ihr abgehenden, aus geraden freien Wirbelfäden bestehenden Wirbelband in einem Punkte der tragenden Strecke selbst zu berechnen. Das Koordinatensystem wählen wir so, daß die x-Achse in die Richtung des tragenden Fadens kommt, wobei der Anfangspunkt in der Mitte des Fadens liegen möge, die z-Achse in die Anströmungsrichtung $\mathfrak{v}_\infty$, nach hinten positiv, fällt und die y-Achse zu beiden senkrecht nach oben gerichtet ist (Abb. 73). Um dann zuerst das Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{v}_1$ nach (20) angeben zu können, überlegen wir folgendes: Ist F der Querschnitt des tragenden Fadens, so ist für das gebundene Wirbelsystem $d\tau = F \cdot dx$; der Vektor $\mathfrak{c}_g$ liegt ganz in der x-Achse, seine Komponenten in der Richtung der y- und z-Achse

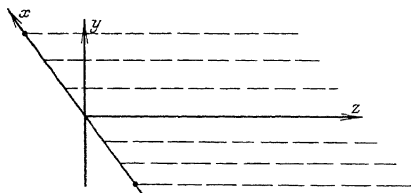



Abb. 73.

sind also Null. Das Wirbelmoment $\mathfrak{c}_g F$ ist gleich der Zirkulation Γ; da auch der Vektor $\mathfrak{r}$ in der x-Achse liegt, ist $[\mathfrak{c}_g, \mathfrak{r}] = 0$. Nach der S. 102 angestellten Überlegung ist die Zirkulation des Wirbelbandes in dem zwischen x und $x + dx$ gelegenen Streifen $-\frac{d\Gamma}{dx}\,dx$. Wollen wir den Einfluß dieses Streifens auf eine Stelle $x = \xi$ des tragenden Fadens untersuchen, so erhalten wir nach der Betrachtung auf S. 100 einen in die Richtung der negativen y-Achse fallenden Vektor, dessen Betrag mit dv_1 bezeichnen wollen; es ist

$$dv_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\Gamma}{dx}\,dx\,\frac{1}{x -}$$

so daß also das Wirbelband eine senkrecht nach unten gerichtete Geschwindigkeit an der Stelle $x = \xi$

$$= \frac{1}{4\pi}\int^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dx}\quad dx \qquad (25)$$

ergibt, wenn die Spannweite des Tragflügels mit b bezeichnet wird. Der Vektor $\mathfrak{v}_\infty$ liegt in der positiven z-Achse, $\mathfrak{c}_g\,d\tau$ liegt in der x-Achse und hat, wie wir sahen, den Wert $\Gamma\,dx$. Der Auftrieb, d. h. die y-Komponente von $\mathfrak{R}$ hat also nach (21) den Wert

$$A = \rho\, v_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma\, dx \qquad (26)$$

Für den induzierten Widerstand W erhalten wir nach (24) mit Benutzung von (25)

$$W = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma(\xi)\, v_1(\xi)\, d\xi = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma(\xi) \frac{d\Gamma(x)}{dx} \frac{dx\, d\xi}{\xi - x} \qquad (27)$$

Man kann den Ausdruck für W auch direkt erhalten, ohne auf (24) zurückzugehen, wenn man nach Abb. 72 bedenkt, daß für den kleinen Neigungswinkel φ

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi = \operatorname{arc}\varphi = \frac{v_1(\xi)}{v_\infty}$$

ist und die Kraft, deren Betrag genau pro Längeneinheit $\frac{A(\xi)}{\cos\varphi}$ wäre, durch $A(\xi)$ ersetzt. Dann wird, da $A(\xi) = \rho v_\infty \Gamma(\xi)$ der Widerstand für $x = \xi$ pro Längeneinheit $\rho\,\Gamma(\xi)\, v_1(\xi)$; und man erhält für W durch Integration wieder den Ausdruck (27). Würde die Zirkulation Γ bis gegen das Ende des tragenden Fadens einen endlichen von Null verschiedenen Wert behalten, so müßte am Ende ein freier Wirbel von endlicher Stärke abgehen; da aber nach S. 100 die Geschwindigkeit, die der Faden in einem Punkte außerhalb hervorruft, umgekehrt proportional seiner Entfernung vom Faden ist, so würde die Geschwindigkeit v_1 am Ende des Tragflügels unendlich groß werden. Unsere Theorie setzt aber voraus, daß v_1 überall endlich und klein gegen v_∞ bleibt. Wir müssen also annehmen, daß Γ an den

Enden des tragenden Fadens den Wert Null erhält. Daraus ergibt sich auch, daß eine Theorie des Eindeckers mit dem in § 4 beschriebenen Hufeisenwirbel, bei dem die Zirkulation und also auch die Auftriebsverteilung über die Tragflügelbreite konstant bleibt, nicht möglich ist.

§ 8. Das Strömungsfeld des Wirbelbandes.

Wie wir in § 1 (vgl. Abb. 64 und 65) gesehen haben, ist der Strömungsvorgang um den Flügel und das von ihr abgehende Wirbelband identisch mit einem Feld, in welchem eine Diskontinuitätsfläche von der Breite des Flügels vorhanden ist. Die Strömung um diese Unstetigkeitsfläche stellt eine Bewegung in der xy-Ebene (also in einer Ebene senkrecht zur Strömung $\mathfrak{v}_\infty$) dar. Das Wirbelband ruft außerdem einen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_1$ hervor, der in der xy-Ebene gelegen ist und, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, am Flügel selbst die Richtung der negativen y-Achse hat. Wir wollen uns nun zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung vorstellen, daß das Wirbelband sich nicht nur hinter den Flügel, sondern auch vor ihn, also in der negativen z-Achse bis in das Unendliche erstreckt; dann ruft dieses System von geradlinigen Wirbelfäden, die nach beiden Seiten ins Unendliche gehen, einen Geschwindigkeitsvektor hervor, der doppelt so groß ist, wie der Vektor des am Tragflügel beginnenden Wirbelbandes, was sich ohne weiteres aus dem Biot-Savartschen Gesetz (S. 100) ergibt. Wir können nun dann den Tragflügel ganz wegdenken und haben den Strömungsvorgang um eine in Richtung der z-Achse unendlich ausgedehnte ebene Fläche von der Breite b in irgendeiner Ebene senkrecht zur z-Achse, also z. B. in der (x, y)-Ebene zu betrachten. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei aber bemerkt, daß diese Methode lediglich den Zweck verfolgt, den Strömungsvorgang am Orte des Tragflügels zu beschreiben, wo ja allein das einfach unendliche Wirbelband durch Hinzufügen eines symmetrisch nach der anderen Seite verlaufenden Wirbelbandes zu einem doppelt unendlichen Bande ergänzt werden darf. Die Strömung um das Wirbelband hinter dem Flügel oder um einen Körper, der sich hinter dem Flügel befindet (Leitwerk) kann mit so einfachen Mitteln nicht erfaßt werden.

Abb. 74.

Durch diesen Kunstgriff ergibt sich der große Vorteil, daß wir es nur noch mit einer wirbelfreien Bewegung, also mit einer Potentialströmung zu tun haben, die am besten mit den Hilfsmitteln der Funktionentheorie (vgl. II § 1) erfaßt wird. Diese Potentialströmung setzt sich aus zwei Teilen zusammen.

Für den ersten Teil haben wir uns die ebene Fläche als ruhend zu denken und haben eine gegen sie senkrecht verlaufende Flüssigkeitsbewegung von der Art, wie sie in Abb. 74 schematisch dargestellt ist.

Da die Zirkulation für die Breite dx des Bandes den Wert $-\frac{d\,\Gamma}{d\,x}\,dx$ hatte, so muß also die Geschwindigkeit unterhalb der x-Achse den Wert $-\frac{1}{2}\,\frac{d\,\Gamma}{d\,x}$ und oberhalb $+\frac{1}{2}\,\frac{d\,\Gamma}{d\,x}$ sein. Bezeichnen wir also wieder $z = x + iy$ (wobei ja eine Verwechslung mit der dritten räumlichen Koordinate hier ausgeschlossen ist), so ist der komplexe Wert der Geschwindigkeit dieser Strömung $\frac{1}{2}\,\frac{d\,\Gamma(z)}{d\,z}$, wobei $\Gamma(z)$ eine zweiwertige Funktion von z ist, die beim Überschreiten der Strecke $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$ (Verzweigungsschnitt) ihr Vorzeichen wechselt. Genau genommen haben wir unter dem komplexen Wert der Geschwindigkeit nach II § 1 das Spiegelbild an der x-Achse zu nehmen. Diese Funktion $\Gamma(z)$ muß also die Form haben

(28)

und wir können annehmen, daß $a(z)$ nun in der ganzen Ebene eindeutig und stetig ist, also da offenbar $\Gamma(-x) = +\Gamma(x)$ sein muß, eine in der ganzen z-Ebene konvergente Entwicklung

$$a(z) = a_0 + a_2\left(\frac{2z}{b}\right)^2 + a_4\left(\frac{2z}{b}\right)^4 + \cdots \qquad (29)$$

besitzt. Praktisch wird man offenbar bei jeder stetigen Verteilung der Zirkulation mit beliebiger Annäherung $a(z)$ sogar durch eine ganze rationale Funktion ersetzen können.

Der zweite Teil der Bewegung ist eine Strömung, die am Tragflügel die Richtung der negativen y-Achse hat, also für $y = 0$ den Wert $-2iv_1(x)$ besitzt; der komplexe Wert der Geschwindigkeit dieser Bewegung ist also

$$-2iv_1(z),$$

so daß der komplexe Wert der Geschwindigkeit der ganzen Strömung durch eine Funktion

$$v_2(z) = \frac{1}{2}\,\frac{d\,\Gamma(z)}{d\,z} - 2i\,v_1(z) \qquad (30)$$

gegeben ist (genauer durch das Spiegelbild an der x-Achse).

Die Funktion $v_1(z)$, die zu beiden Seiten der Fläche denselben Wert hat, ist eine eindeutige Funktion von z, und wir wollen auch hier annehmen, daß diese Funktion in der ganzen Ebene durch eine konvergente Reihe

$$v_1(z) = b_0 + b_2\left(\frac{2z}{b}\right)^2 + b_4\left(\frac{2z}{b}\right)^4 + \cdots \qquad (31)$$

gegeben ist. Man kann zeigen, daß die Konvergenz von (29) auch die von (31) zur Folge hat. — Nach dem sog. zweiten Cauchyschen Satz der Funktionentheorie wird der Wert einer Funktion in einem Punkte ζ durch

$$v_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{v_1(z)}{z-\zeta}\,dz$$

angegeben, wenn ζ im Innern der von der geschlossenen Kurve C begrenzten Fläche liegt, die Funktion in diesem Gebiete eindeutig und stetig ist und das Integral über die Kurve C erstreckt wird. Stellt also jetzt C eine die Strecke $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$ umschlingende Kurve dar, so erhalten wir nach (30)

$$v_1(\zeta) = +\frac{1}{8\pi}\int_C \frac{d\,\Gamma(z)}{dz}\,\frac{dz}{\zeta - z} + \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{v_2(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

Da man die Kurve C unendlich nahe an die Strecke $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$ heranlegen kann, $\frac{d\,\Gamma(z)}{dz}$ aber zu beiden Seiten entgegengesetztes Vorzeichen hat, so kann das erste Integral offenbar durch $\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\,\Gamma(x)}{dx}\,\frac{dx}{\xi - x}$ ersetzt werden. Dann zeigt aber der Vergleich dieses Ausdruckes mit (25), daß das zweite Integral den Wert Null haben muß. Da man aber die Kurve C durch einen unendlich großen Kreis ersetzen kann — zwischen ihm und C ist ja $v_2(z)$ eindeutig und stetig — so folgt aus dem Verschwinden des zweiten Integrals, daß $v_2(z)$ im Unendlichen verschwinden muß; und da $v_2(z)$ nur gerade Potenzen von z enthält, so verschwindet es im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{z^2}$. Die Strömungsfunktion $v_2(z)$ in (30) stellt also eine Bewegung dar, bei der die Flüssigkeit im Unendlichen ruht.

Hieraus ergibt sich sogleich die Möglichkeit, die Funktion $v_1(z)$ zu berechnen, wenn $\Gamma(z)$ gegeben ist, und umgekehrt. Setzen wir nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{2i}\, t^{2i}, \quad \sqrt{1-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{2i}\, t^{2i}, \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

so wird

$$2b \cdot b_{2\lambda} = (2\lambda+1)\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{2i}\, a_{2i+2\lambda}, \quad a_{2\lambda} = 2b\sum_{i=0}^{\infty} \delta_{2i}\,\frac{b_{2i+2\lambda}}{2i+2\lambda+1} \quad . \; . \quad (33)$$

Man kann übrigens auch die Berechnung von $\frac{d\,\Gamma(z)}{dz}$, wenn $v_1(z)$ gegeben ist, durch ein Integral darstellen, welches gleichsam die Umkehrung des Integrals (25) gibt. Da nämlich $\frac{d\,\Gamma(z)}{dz}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2}$ eine eindeutige und stetige Funktion ist, muß nach dem zweiten Cauchyschen Satze

$$\frac{d\,\Gamma(\zeta)}{d\zeta}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\zeta^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\,\Gamma(z)}{dz}\,\frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-z^2}}{z-\zeta}\,dz$$

sein; und weil auch hier C wieder durch einen unendlich großen Kreis ersetzt werden kann, so erhält man, da im Unendlichen $\frac{d\,\Gamma(z)}{dz}$ durch $4iv_1(z)$ ersetzt werden darf,

$$\frac{d\,\Gamma(\zeta)}{d\zeta}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\zeta^2}=\frac{2}{\pi}\int_K\frac{v_1(z)\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-z^2}}{z-\zeta}\,dz=\frac{4}{\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\frac{v_1(x)\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-x^2}}{x-\zeta}\,dx \quad (34)$$

eine von Betz nach anderer Methode hergeleitete Formel.

Ein einfaches Beispiel für diesen Strömungsvorgang, das bald eine besondere Bedeutung erlangen wird, erhalten wir, wenn wir $a(z)$ gleich einer Konstanten setzen und somit für $\Gamma(z)$ den Ansatz machen:

$$\Gamma(z)=\frac{2\,\Gamma_m}{b}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-z^2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

dieser Ansatz entspricht einer elliptischen Verteilung von Zirkulation und Auftrieb über die Tragflügelbreite und Γ_m bedeutet den Wert der Zirkulation in der Mitte. Aus (33) folgt, daß sich dann $v_1(z)$ ebenfalls auf eine Konstante $\frac{\Gamma_m}{2b}$ reduziert. Das Strömungsbild ist jetzt dasjenige, das sich ergibt, wenn eine unendlich lange Platte von der Breite b senkrecht zu ihrer Fläche mit der Geschwindigkeit $\frac{\Gamma_m}{2b}$ fortbewegt wird.

Die Geschwindigkeitsfunktion (30) wird nun:

$$v_2(z)=-\frac{\Gamma_m}{b}\,\frac{z}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-z^2}}-i\,\frac{\Gamma_m}{b}=\frac{i\,\Gamma_m}{b}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}-1\right). \quad (36)$$

Bildet man dazu das komplexe Potential $\frac{\Gamma_m i}{b}\left(\sqrt{z^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}-z\right)$, so ergeben sich daraus die Stromlinien $\psi=c$ am besten in der Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{c}{2}\left(1+\frac{1}{\varphi^2+c^2}\right),\\ y&=\frac{\varphi}{2}\left(1-\frac{1}{\varphi^2+c^2}\right),\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

wo φ jedesmal von $-\sqrt{1-c^2}$ bis $+\sqrt{1-c^2}$ zu gehen hat; diese sind dementsprechend in Abb. 75 wiedergegeben.

Bezeichnet $w(z)$ das zur Strömungsfunktion $v_2(z)$ gehörige komplexe Potential

$$w(z)=\frac{1}{2}\,\Gamma(z)-2i\int v_1(z)\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

so ist also $\Gamma(z)$, weil ja $v_1(z)$ und also auch $\int v_1(z)\,dz$ zu beiden Seiten der Fläche denselben Wert hat, gleich dem Potentialsprung, der sich beim Übergang von der einen Seite der Fläche auf die andere ergibt. Man kann also, wenn dieser Potentialsprung durch $[w(z)]$ bezeichnet wird, den Auftrieb auch in die Form

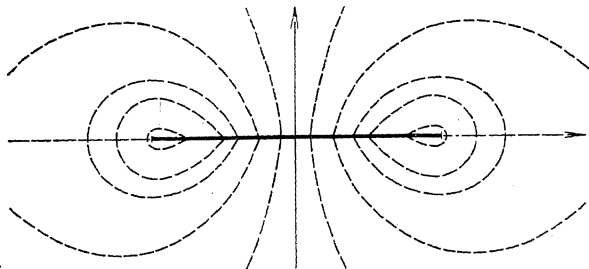



Abb. 75. Stromlinien um eine senkrecht zu ihrer Fläche bewegte Platte.

$$A = \rho v_\infty \int_b [w(z)]\,dz = \rho v_\infty \int_C w\,dz \tag{39}$$

schreiben, wenn wieder C eine die Strecke $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$ umschließende Kurve bezeichnet.

§ 9. Entstehung der Geschwindigkeit in der Flüssigkeit durch Stoß.

Während der Tragflügel durch die Luft bewegt wird, erteilt er immer neuen Luftteilchen diejenige Geschwindigkeit v_1, die wir im vorigen Paragraphen beschrieben haben. Anstatt nun diese Geschwindigkeiten nach einander den Luftteilchen zu übertragen, können wir uns vorstellen, daß sie gleichzeitig auf der ganzen Bahn des Flügels durch einen Stoß erzeugt werden. Bei dem im vorigen Paragraphen erwähnten Beispiel bei dem die vertikalen Geschwindigkeiten konstant längs der Breite des Flügels werden, kann man sich die Übertragung dieses Stoßes auf die Flüssigkeit sehr einfach durch ein starres zylindrisches Gebilde ausgeführt denken, welches die Gestalt des Raumes besitzt, den der Flügel durcheilt hat.

Dieses Gebilde muß man plötzlich, indem man ihm während einer unendlich kleinen Zeit t einen — unendlich groß zu denkenden — Stoß erteilt, aus dem Zustand der Ruhe in den der Geschwindigkeit $2v_1$ senkrecht nach unten versetzen, dann erhält man genau das in Abb. 75 angegebene Strömungsfeld. Im allgemeinen muß man sich an Stelle des starren Gebildes eine deformierbare Lamelle denken, die anfangs die oben angegebene Gestalt hat und ebenfalls durch einen Stoß während der Zeit t senkrecht nach unten in Bewegung gesetzt wird; da aber nun $v_1(x)$ längs der Breite der Lamelle veränderlich ist, wird unser Gebilde während des

Stoßes außer der Abwärtsbewegung noch eine Gestaltsveränderung durchmachen. — Den Vorgang während des Stoßes kann man mit den Eulerschen Gleichungen leicht verfolgen. Multipliziert man nämlich diese Gleichungen mit dt und integriert über das unendlich kleine Zeitintervall t, so erhält man das durch den Stoß hervorgerufene Geschwindigkeitsfeld durch den Vektor

$$\mathfrak{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P,$$

wenn $P = \int_0^t p\, dt$ das Integral über die durch den Stoß hervorgerufenen Flüssigkeitsdrucke bezeichnet. Da aber andererseits, wenn φ das Geschwindigkeitspotential bezeichnet, $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi$ ist, so erhalten wir für dieses Druckintegral:

$$dt = -\rho\, \varphi.$$

Umgekehrt ist dann $\rho\, \varphi$ der von der Flüssigkeit auf den Tragflügel ausgeübte Druck pro Flächeneinheit. Mithin erfährt ein Stück von der Länge l und der Breite dx des den Stoß übermittelnden Körpers den Druck $l\, dx\, \rho\, \varphi$. Bezeichnet also C wieder eine Kurve, die sich dicht an diesen Körper anschmiegt und ihn umschlingt, so ist dieser Druck für die Länge l

$$l \rho \int_C \varphi\, dx = l \rho \int_C w\, dz.$$

Wegen des Überganges von der Potentialfunktion zum komplexen Potential vgl. S. 53.

Die Strecke l der Flugbahn wird in der Zeit $t = \frac{l}{v_\infty}$ zurückgelegt. Ist A der Auftrieb, so erhalten wir somit

$$A \frac{l}{v_\infty} = l \rho \int w\, dz, \quad A = \qquad w\, dz,$$

in vollständiger Übereinstimmung mit der Gleichung (39) des vorigen Paragraphen.

Das Geschwindigkeitsfeld, das wir im vorigen Paragraphen beschrieben haben, stellt einen bestimmten Vorrat an kinetischer Energie dar. Wir wollen feststellen, wie groß diese kinetische Energie des Luftraumes ist, die entsteht, während der Flügel die Strecke l zurücklegt. Es handelt sich um den Teil des unendlichen Raumes, der von einem Stück der Oberfläche unseres zylindrischen (den Stoß erzeugenden) Gebildes von der Länge l und zwei dazu senkrechten Ebenen begrenzt wird. In diesem Teil des Raumes ist die Geschwindigkeit und das Potential der Geschwindigkeit eindeutig und stetig. Ist wieder φ das Potential, so haben wir für die kinetische

$$= \frac{\rho}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \qquad \partial y) + \partial z) \right.$$

zu berechnen, wo die Integration über den angegebenen Raum zu erstrecken ist. Unser Raumintegral können wir in ein Oberflächenintegral umformen, wenn wir in dem Gaußschen Integralsatz [vgl. S. 97 Gleichung (3)]

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{a}\, d\tau = -\int \mathfrak{a}_n\, do$$

$$\text{für den Vektor } \mathfrak{a} = \varphi \operatorname{div} \varphi = \left\{ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ \varphi \, \partial \varphi \right.$$

setzen. Da $\triangle \varphi = 0$ und $a_n = \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ wird, so erhalten wir

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = - \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, do,$$

wo n die nach dem Inneren der Flüssigkeit gerichtete Flächennormale bedeutet. Wenden wir diese Gleichung auf den Raum an, für den wir die kinetische Energie berechnen sollen, so haben wir zu bedenken, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ für die beiden auf unserem zylindrischen Gebilde senkrechten Ebenen verschwindet; da im Unendlichen die Geschwindigkeit mindestens von zweiter Ordnung und φ von erster Ordnung verschwindet, so verschwindet unser Oberflächenintegral auch im Unendlichen und es bleibt dieses Integral nur für die Oberfläche des zylindrischen Gebildes. Wenn wir dann an Stelle der Normalenrichtung die entgegengesetzte, also die Richtung nach dem Inneren des zylindrischen Gebildes nehmen, so erhalten wir

$$T = \frac{\rho}{2} l \int_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds,$$

wenn wir $do = 1 . \, ds$ setzen und C wieder eine das Gebilde unendlich nahe umschlingende Kurve bedeutet. Nun ist aber nach (38) für die Oberfläche dieses Gebildes $\varphi = \frac{1}{2} \, \Gamma(x)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 2 v_1$, so daß wir durch Vergleich mit Gleichung (27) S. 109 erhalten:

$$T = \rho l \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma(x) \, v_1(x) \, dx = W \cdot l.$$

Die kinetische Energie ist also gleich der längs der Strecke l geleisteten Arbeit des induzierten Widerstandes.

§ 10. Tragflügel kleinsten Widerstandes.

Hat man zwei verschiedene Strömungsvorgänge von der Art, wie wir sie im vorigen Paragraphen beschrieben haben, und bezeichnet man durch den oberen Index (1) bzw. (2) alles, was sich auf die erste bzw. zweite Strömung bezieht, so erhält man, wenn man in dem Gaußschen Integralsatz für den Vektor $\mathfrak{a} = \varphi^{(1)} \operatorname{div} \varphi^{(2)}$ bzw. $\varphi^{(2)} \operatorname{div} \varphi^{(1)}$ setzt,

$$\int_C \varphi^{(1)} \frac{\delta \varphi^{(2)}}{\delta n} \, ds \qquad \int_C \qquad \frac{\quad}{\delta n} \, ds$$

oder

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(1)}(x) \, v_1^{(2)}(x) \, dx = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(2)}(x) \, d \, v_1^{(1)}(x) \, dx.$$

Betrachten wir nun diejenige Strömung, die man erhält, wenn man die Geschwindigkeiten voneinander subtrahiert, wodurch sich offenbar wieder eine mögliche Strömung ergibt, so wird der induzierte Widerstand dieser Differenzströmung

$$W_d = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (\Gamma^{(1)} - \Gamma^{(2)})\,(v_1^{(1)} - v_1^{(2)})\, dx = W^{(1)} + W^{(2)} - 2\rho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(2)}\, v_1^{(1)}\, dx.$$

Da dieser Widerstand, längs irgendeines Weges ausgeübt, der kinetischen Energie des zugehörigen Raumteiles entspricht, so ist er stets eine positive Größe.

Wir wollen nunmehr annehmen, daß die erste Strömung diejenige ist, die wir in dem Beispiel des § 8 behandelt haben. Bei diesem Beispiel war

$$\Gamma^{(1)} = \frac{2\,\Gamma_m}{b}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2}, \quad v_1^{(1)} = \frac{\Gamma_m}{2\,b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Es wird also entsprechend (26) und (27) des § 7

$$W^{(1)} = \frac{v_1^{(1)}}{v_\infty} A^{(1)}, \quad 2\rho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(2)}\, v_1^{(1)}\, dx = \frac{2\,v_1^{(1)}}{v_\infty} A^{(2)}.$$

Nehmen wir dann an, daß die zweite Strömung genau denselben Gesamtauftrieb liefert wie die erste, so erhalten wir somit

(41)

Es ergibt sich also das Resultat: **Von allen Tragflügeln mit gleichem Auftrieb, gleicher Spannweite und gleicher Fluggeschwindigkeit hat diejenige den kleinsten Widerstand, bei der die Zirkulationsverteilung über die Breite**

$$\Gamma(x) = \frac{2\,\Gamma_m}{b}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - x^2}$$

einer halben Ellipse entspricht.

Wir erkennen also jetzt, worin die große Bedeutung unseres Beispiels liegt, das dadurch für die Eindeckertheorie von fundamentaler Bedeutung wird. Für diesen Fall ergeben sich die Formeln

$$A = \frac{b\pi}{4}\rho\, v_\infty\, \Gamma_m, \quad W = \frac{v_1}{v_\infty} A = \frac{\rho\pi}{8}\Gamma_m^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

$$W = \frac{2\,A^2}{\pi\rho\, v_\infty^{\,2}\, b^2} = \frac{A^2}{\pi q\, b^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

wenn der „Staudruck“ $q = \frac{\rho}{2} v^2_\infty$ gesetzt wird.

Die Frage, wie die geometrische Gestalt eines Flügels gewählt werden muß, damit der induzierte Widerstand das gefundene Minimum ergibt, ist ein spezieller

Fall der allgemeineren Aufgabe: Wie muß die Gestalt des Flügels bei gegebener Luftdichte ρ und gegebener Fluggeschwindigkeit v_∞ eingerichtet werden, damit eine gegebene Zirkulations(Auftriebs)verteilung über die Spannweite herauskommt. Diese Frage wollen wir die erste Aufgabe der Eindeckertheorie nennen.

Ihre Beantwortung ist nicht eindeutig. Der geometrische Anstellwinkel des Tragflügels muß wegen des abwärts gerichteten Luftstromes an jeder Stelle um den Winkel $\frac{v_1}{v_\infty}$ verkleinert werden, damit der „wirksame" Anstellwinkel α_∞ herauskommt. Genau genommen wird v_1 auch noch mit der Profiltiefe veränderlich sein; wenn aber t klein gegen b ist, kann davon abgesehen werden. Würde das Tragflügelelement von der Breite dx einem unendlich langen Flügel angehören, so würde es beim Anstellwinkel α_∞ die Zirkulation [S. 58 Gleichung (30)]

$$\Gamma = 4\pi a v_\infty\,(\alpha_\infty + \beta)$$

haben. Da aber der Bildkreisradius a der Flügeltiefe proportional ist, so können wir Γ proportional $t v_\infty\,(\alpha_\infty + \beta)$ ansetzen. Der Proportionalitätsfaktor wird dabei von der Gestalt des Profils abhängen und also im allgemeinen eine beliebige Funktion von x sein. Geben wir aber z. B. allen Profilen eine geometrisch ähnliche Gestalt, indem wir dabei eine möglichst günstige Profilform zugrunde legen, so können wir α_∞ beliebig wählen und dann t proportional $\Gamma(x)$ setzen. Dann haben wir nur die geometrische Einstellung der Fläche an jeder Stelle x, um den zugehörigen aus dem Integral (25) S. 109 folgenden Wert $\frac{v_1}{v_\infty}$ zu vergrößern, womit dann ein Tragflügel mit der verlangten Auftriebsverteilung gefunden ist.

Abb. 76. Tragflügel mit elliptischem Umriß.

Um also z. B. das Minimum des Widerstandes zu erhalten, haben wir t proportional $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - x^2}$ zu wählen, was am einfachsten dadurch erreicht wird, daß man sich die Flügelfläche aus zwei Halbellipsen, deren großer Durchmesser b ist, hergestellt denkt (vgl. Abb. 76). Da v_1 hier konstant ist, muß die Einstellung des Flügels längs der Spannweite konstant genommen werden.

Für solche Flügel läßt sich nun die Abhängigkeit der Luftkraft vom Seitenverhältnis nach der Formel (43) feststellen.

Wir machen dazu den Ansatz

$$A = \qquad\qquad W = c_w\, q F.$$

Es wurde schon hervorgehoben, daß der induzierte Widerstand, den unsere Theorie ergeben hat, nur ein Teil des Gesamtwiderstandes ist. Wir wollen daher

$$W = W_i + W_p \tag{44}$$

setzen, indem wir zum induzierten Widerstand noch den Widerstand W_p hinzufügen. Der Vergleich mit den Messungen der Göttinger Versuchsanstalt hat er-

geben, daß W_p nur von der zugrunde gelegten Profilform, nicht aber von den geometrischen Verhältnissen der Fläche (Seitenverhältnis) abhängt; wir wollen daher W_p den **Profilwiderstand** nennen:

Dementsprechend setzen wir

$$c_w = c_{wi} + c_{wp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

und erhalten nach (43)

$$c_{wi} = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2},$$

während für c_{wp} eine von F und b unabhängige Funktion von α_∞ zu setzen ist.

$$c_w = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2} + c_{wp}(\alpha_\infty),$$

$$\alpha = \alpha_\infty + \frac{v_1}{v_\infty} = \alpha_\infty + \frac{c_a F}{\pi b^2}.$$

Haben wir nun zwei Tragflügel mit geometrisch ähnlichem Profil, bei denen bzw. die Flächen F_1 und F_2, die Breiten b_1 und b_2 sind, so ergibt sich, wenn man sie bei gleichem Auftrieb betrachtet, so daß $c_{a1} = c_{a2}$, also α_∞ beide Male das gleiche ist, für die geometrischen Anstellwinkel α_1 und α_2 und die Widerstandsbeiwerte c_{w1} und c_{w2}:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{F_1}{b_1^2} - \frac{F_2}{b_2^2}\right), \\ c_{w1} - c_{w2} &= \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{F_1}{b_1^2} - \frac{F_2}{b_2^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Es muß aber ausdrücklich hervorgehoben werden, daß diese Formeln genau nur dann richtig sind, wenn sich der Auftrieb über die Flügelbreite elliptisch verteilt. Wenn die Formeln trotzdem mit Erfolg auch auf Flügel mit anderem als elliptischem Umriß angewendet worden sind, so kann das nur daran liegen, daß praktisch die Verteilung bei anderen Umrißformen nicht sehr weit von der elliptischen Verteilung abweicht. Wir werden dafür im nächsten Paragraphen ein Beispiel beim rechteckig umrandeten Flügel kennen lernen. Hier möge noch ein Beispiel Platz finden, aus dem eine große Mannigfaltigkeit von Fällen entnommen werden kann, wenn die Verteilung durch andere Ursachen, als die Veränderung der Umrißform, stark modifiziert wird.

Machen wir den Ansatz [vgl. (28), (31), (33) S. 111]

$$\Gamma^{(2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left(\Gamma_m^{(2)} + a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right), \quad v_1^{(2)} = \frac{1}{2b}\left[\Gamma_m^{(2)} - \frac{1}{2}a + 3a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right] \quad (47)$$

und vergleichen ihn mit der elliptischen Verteilung

$$\Gamma^{(1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2}\,\Gamma_m^{(1)}, \quad v_1^{(1)} = \frac{1}{2b}\,\Gamma_m^{(1)}.$$

Damit der Gesamtauftrieb in beiden Fällen der gleiche wird, muß $\Gamma_m^{(1)} = \Gamma_m^{(2)} + \frac{a}{4}$ sein. Setzen wir also $\Gamma_m^{(2)} = (1 - \delta)\,\Gamma_m^{(1)}$, d. h. $a = 4\delta\,\Gamma_m^{(1)}$, so wird die zum Auftrieb Null gehörige unterschiedliche Verteilung

$$\Gamma_d = \Gamma^{(1)} - \Gamma^{(2)} = \delta\, \Gamma_m^{(}$$

$$2x$$

also der zugehörige induzierte Widerstand

$$W_d = \rho\, \frac{3\,\delta^2}{2\,b}\, \Gamma_m^{(1)2} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2\,x}{b}\right)^2} \left[1 - 4\left(\frac{2\,x}{b}\right)^2\right] dx = \rho\, \frac{3\,\pi}{8}\, \delta^2\, \Gamma_m^{(1)2}.$$

Es wird also der zu (47) gehörige induzierte Widerstand

(48)

Da ja die Auftriebsverteilung $\frac{d\,A}{d\,x} = \rho\, v_\infty\, \Gamma$ [vgl. (26)] der Zirkulationsverteilung proportional ist, sind in Abb. 77 einige Auftriebsverteilungen mit gleichem Gesamtauftrieb in dem Bereich $-\frac{1}{2} < \delta < +\frac{1}{2}$ zusammengestellt. In Abb. 78 entsprechend die Winkel $\frac{v_1^{(2)}}{v_\infty}$, um die der Anstellwinkel des Flügels gegen die Hauptströmung v_∞ durch das Wirbelband heruntergesetzt ist. Weicht der Auftrieb in der Mitte nur wenig von der elliptischen Verteilung (Kurve I) ab, ist also δ klein, so wird der induzierte Widerstand auch nur wenig vom Minimum verschieden sein. Es wäre aber wohl denkbar, daß dieser Mittelauftrieb von dem der elliptischen Verteilung nicht unerheblich abweicht — man denke etwa an eine

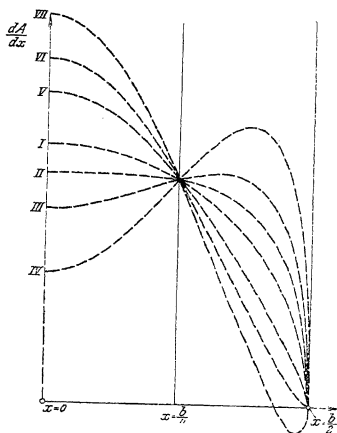



Abb. 77. Auftriebsverteilungen über die Flügelspannweite bei gleichem Gesamtauftrieb. I elliptische Verteilung (in der Mitte gleich 1 gesetzt). II Auftrieb in der Mitte konstant. III und IV Auftrieb in der Mitte verringert. V, VI, VII Auftrieb in der Mitte erhöht; bei VII Abtrieb an den Flügelenden.

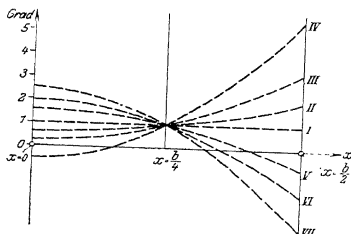



Abb. 78. Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband, entsprechend den Auftriebsverteilungen der Abb. 77. Für die elliptische Verteilung (I) ist dieser Winkel gleich 1° angenommen.

starke Herabsetzung durch einen Kühler oder eine Heraufsetzung durch den Propellerstrahl —, dann könnten auch für den induzierten Widerstand (48) starke Abweichungen vom Minimum die Folge sein: in den extremsten in unseren Abbildungen gezeichneten Fällen IV und VII, $\delta = \pm \frac{1}{2}$ würde diese Abweichung 75 vH betragen.

§ 11. Auftriebsverteilung bei gegebenem Tragflügelumriß.

Die zweite Frage der Eindeckertheorie besteht darin, daß für einen Flügel von vorgeschriebener Gestalt die Auftriebsverteilung gesucht wird. Wir wollen diese Aufgabe in dem einfachsten Falle lösen, daß es sich um einen Flügel von überall gleicher Profilform, konstanter Sehne t, also rechteckiger Umrißform, und konstantem Anstellwinkel α gegen die Hauptströmung handelt. Haben wir einen ebenen Tragflügel, so können wir, wenn wieder der wirksame Anstellwinkel α_∞ genannt wird (und α_∞ so gezählt wird, daß es den Wert Null beim Auftrieb Null hat) nach den Ergebnissen von Kapitel II § 7 für $\alpha_\infty = \alpha - \frac{v_1}{v_\infty}$ setzen:

$$\Gamma = t\pi\, v_\infty\, \alpha_\infty = t\pi\, v_\infty \left(\alpha - \frac{v_1}{v_\infty}\right) \tag{49}$$

Für andere Profile tritt an die Stelle von t der doppelte Bildkreisdurchmesser $4a$, welcher der Tiefe t proportional ist und praktisch nur wenig von ihr abweicht.

Wir haben also nun die Aufgabe $\Gamma(x)$ so einzurichten, daß, bei konstantem t, in dem Bereiche $-\frac{b}{2} < x < +\frac{b}{2}$ eine Konstante wird. Um diese Aufgabe in erster Näherung zu lösen, setzen wir:

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma_m^{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2} \left[1 + a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right], \quad v_1^{(1)}(x) = \frac{\Gamma_m^{(1)}}{2b}\left[1 - \frac{a}{2} + 3a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right].$$

Wird noch $\Gamma_m = t v_\infty \pi\, \alpha_\infty^{(m)}$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\alpha = \alpha_\infty^{(m)} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2} \left[1 + a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right] + \alpha_\infty^{(m)} \frac{\pi}{2}\frac{t}{b}\left[1 - \frac{a}{2} + 3a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right].$$

Wir wollen a so bestimmen, daß die zu α als Funktion von x gehörige Kurve bei $x = 0$ an ihre Tangente eine Berührung vierter Ordnung besitzt; dadurch erhält man:

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + \frac{3\pi}{2}\frac{t}{b}}.$$

Die zugehörige α-Kurve zeigt schon bei dieser ersten Näherung über mehr als die Hälfte der Tragfläche die verlangte Konstanz von α. Ein wesentlicher Abfall zeigt sich erst an den Enden.

Erheblich weiter würde man mit den Näherungen:

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma_m^{(2)} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2} \left[1 + a_2 \left(\frac{2x}{b}\right)^2 + a_4 \left(\frac{2x}{b}\right)^4\right],$$

$$\Gamma^{(3)} = \Gamma_m^{(3)} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2} \left[1 + a_2 \left(\frac{2x}{b}\right)^2 + a_4 \left(\frac{2x}{b}\right)^4 + a_6 \left(\frac{2x}{b}\right)^6\right]$$

usw. kommen, bei denen die Berührung der α-Kurve an ihre Tangente bei $x = 0$ bis zur 6., 8. usw. Ordnung gesteigert werden kann. Bei der dritten Näherung $\Gamma^{(3)}$ z. B. erhält man die verlangte Konstanz von α schon bis $x = 0{,}9 \frac{b}{2}$ praktisch ausreichend.

Wesentlich schneller aber führt das folgende Korrekturverfahren zum Ziele: Ist $\Gamma^{(n)}$ irgendeine Näherung und das zugehörige

$$v_1 = \frac{\Gamma_m^{(n)}}{2b} \left[c_0 + c_2 \left(\frac{2x}{b}\right)^2 + \ldots + c_{2n} \left(\frac{2x}{b}\right)^{2n}\right],$$

so ist der Mittelwert von α, für $x = 0$, $\alpha_0 = \alpha_\infty^{(m)} \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{t}{b} c_0\right)$. Von diesem Mittelwert wird α um einen Betrag abweichen, den wir mit $\varepsilon(x)$ bezeichnen wollen. Dieser Abweichung können wir dadurch Rechnung tragen, daß wir an Stelle von $\Gamma^{(n)}$ den korrigierten Wert $\Gamma^{(n)} \left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{\alpha_0}\right)$ treten lassen. Wenn man $\varepsilon(x)$ durch eine Parabel approximiert, kann man die Rechnung ohne Mühe durchführen und findet, daß der korrigierte α-Wert schon bei der ersten Näherung $\Gamma^{(1)}$ bis $x = 0{,}95 \frac{b}{2}$ hin praktisch konstant bleibt. Die Γ-Werte aber, die man bei dieser Korrektur bei den ersten drei Näherungen erhält, weichen praktisch überhaupt nicht mehr voneinander ab. Man kann sich also zur Erlangung der Auftriebsverteilung mit der ersten Näherung und Anwendung der Korrektur begnügen.

Für viele Fragen wird bei der Kleinheit der Unterschiede die erste Näherung auch schon ohne Korrektur genügen.

Der praktische Bereich für das Seitenverhältnis $\frac{t}{b}$ liegt in dem Intervalle $\frac{1}{10} < \frac{t}{b} < \frac{1}{6}$. Der Wert von c_0 ist: für $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$, 0,779; für $\frac{t}{b}$ [illegible], 0,824. Wenn nun $\alpha = \alpha_0$ konstant ist, erhält man:

$$\Gamma_m = t \pi v_\infty \alpha_\infty^{(m)} = \frac{2 b v_\infty \alpha}{\frac{2}{\pi} \frac{b}{t} + c_0},$$

also

$$\frac{dA}{dx} = \rho v_\infty \Gamma = \frac{2 \rho v^2_\infty b \alpha}{\frac{2}{\pi} \frac{b}{t} + c_0} \frac{\Gamma}{\Gamma_m}.$$

Führen wir also wieder $A = \frac{1}{2} c_a \rho v^2_\infty tb$ ein und machen uns durch die Bezeichnung $\xi = \frac{2x}{b}$ von dem zufälligen Werte von b frei, so erhält man

$$\frac{dc_a}{d\xi} = 2\pi \frac{\alpha^0}{180^0} \frac{b}{t} \frac{1}{2b} \frac{\Gamma}{\Gamma_m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (50)$$

In Abb. 79 ist diese Verteilung des Auftriebsbeiwertes für $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$ und $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$ dargestellt. Durch Integration erhält man daraus für $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$, $c_a = 0{,}088 \frac{\alpha^0}{1^0}$

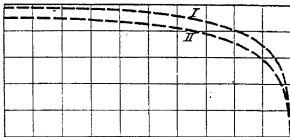



Abb. 79. Verteilung des Auftriebsbeiwertes beim rechteckigen Flügel über die Spannweite. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$ bei I; $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$ bei II.

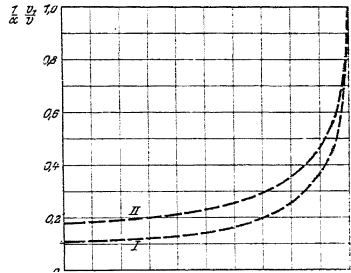



Abb. 80. Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband beim rechteckigen Flügel. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$ bei I; $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$ bei II.

und für $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$, $c_a = 0{,}0794 \frac{\alpha^0}{1^0}$. Beim unendlich breiten Flügel ist $c = \frac{2\pi}{57{,}3} \frac{\alpha^0}{1^0} = 0{,}11 \frac{\alpha^0}{1^0}$. Davon beträgt c_a, bei $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$, 80 vH, bei $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$, nur 72 vH. In Abb. 80 ist für dieselben Seitenverhältnisse die Verringerung des Anstellwinkels α durch das Wirbelband beim Anstellwinkel 1^0 gegeben nach der Formel:

$$\frac{v_1}{v_\infty} = \alpha \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{b}{t} \frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t} + c_0} \frac{\Gamma}{\Gamma_m} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (51)$$

In Abb. 81 endlich findet sich die Verteilung des Beiwertes des induzierten Widerstandes. Setzt man diesen wieder gleich $\frac{1}{2} c_{wi} \rho v^2_\infty bt$ so erhält man aus $\frac{dW}{dx} = \rho \Gamma v_1$, $\xi = \frac{2x}{b}$

$$= \frac{2b}{t}\left(\frac{\pi\alpha^0}{180^0}\right)^2 \frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t} + c_0} \Gamma_n \qquad \pi \; t \; 2 \; b \qquad \frac{\Gamma}{\Gamma_m} \quad \ldots \ldots (52)$$

Durch Integration findet man, daß c_{wi} bei $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$ um etwa 10 vH, bei $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$ um etwa 5 vH größer ist als das Minimum bei gleichem Gesamtauftrieb. Die für

Abb. 81. Verteilung des Beiwertes des induzierten Widerstandes beim rechteckigen Flügel über die Spannweite. Seitenverhältnis: $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$ bei I; $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$ bei II.

das Minimum geltende Formel $c_{wi} = \frac{c_a{}^2}{\pi}\frac{t}{b}$ wird man beim rechteckigen Flügel in dem Bereiche der praktisch vorkommenden Seitenverhältnisse etwa durch

$$_{wi} = \frac{c_a{}^2}{\pi}\left(0{,}96\,\frac{t}{b} \qquad 0{,}014\right.$$

ersetzen können.

IV. Kapitel.

Der Mehrdecker.

§ 1. Allgemeine Theorie.

Nach den Überlegungen des vorigen Kapitels ruft der tragende Faden und das von ihm ausgehende Wirbelband ein Geschwindigkeitsfeld hervor. Wir haben erkannt, daß dieses Feld am Orte des Tragflügels selbst eine abwärts gerichtete Geschwindigkeit ergibt, als deren Folge wir einen Widerstand, den induzierten Widerstand, erhielten. Sind nun noch andere Tragflügel vorhanden, so wird eine jede auch infolge des Geschwindigkeitsfeldes jeder anderen eine abwärts gerichtete Geschwindigkeit und damit einen induzierten Widerstand erfahren. Wir wollen diesen induzierten Widerstand, wie er durch das Feld eines Tragflügels I an einem Flügel II hervorgerufen wird, nach Prandtl berechnen. Wir denken uns die Tragflügel wieder als tragende Fäden; dann sei ds_2 ein Element von II und dn_2 die Normale dazu, die zugleich auf v_∞ in Richtung nach unten senkrecht steht; v_{12} sei die Komponente des von I am Orte von ds_2 hervorgerufenen Geschwindigkeitsvektors in Richtung n_2. Dann ist nach den Ergebnissen des III. Kapitel § 6 der induzierte Widerstand, den II durch das Feld von I erfährt,

$$\Gamma_2 v_{12}\, ds_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

wenn Γ_2 die Zirkulation in ds_2 ist und die Integration über die ganze Breite von II erstreckt wird.

Es möge zuerst der Fall betrachtet werden, daß die beiden tragenden Linien in einer Ebene liegen, die auf v_∞ senkrecht steht, also einer Querebene, wie wir sagen wollen, angehören.

Der vom gebundenen Wirbel herrührende Geschwindigkeitsvektor steht auf der Querebene senkrecht, hat also in Richtung n_2 keine Komponente. Es sei nun a die geradlinige Entfernung des Elementes ds_2 von einem Element ds_1 von I und β_2 der Winkel, den die Normale n_2 mit a bildet; dann ruft (vgl. S. 100) der geradlinige von ds_1 abgehende freie Wirbelfaden in ds_2 einen Geschwindigkeitsvektor hervor vom Betrage $-\frac{1}{4\pi a}\frac{d\Gamma_1}{ds_1}ds_1$, wenn Γ_1 die Zirkulation in ds_1 ist. Dieser Vektor liegt in der Querebene und steht auf a senkrecht, seine Komponente in Richtung n_2 ist daher $\frac{1}{\ }\frac{d\Gamma_1}{ds_1}\sin\beta_2\, ds_1$. Vom ganzen Flügel I hat man also an der Stelle ds_2 in Richtung n_2 die Komponente

$$v_{12} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\Gamma_1}{ds_1}\frac{\sin\beta_2}{a}\,ds_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wenn die Integration über die ganze Breite von I erstreckt wird. Da a bei der Integration nicht unendlich wird und Γ_1 an den Flügelenden verschwindet, kann an Stelle von (2) auch

$$v_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \Gamma_1 \frac{d}{ds_1}\left(\frac{\sin\beta_2}{a}\right) ds_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

treten. Denkt man sich, um dieses Integral umzugestalten, vorübergehend ein Koordinatensystem gelegt (Abb. 82), dessen Anfangspunkt in ds_2 liegt, dessen x-Achse die Richtung von ds_2 und dessen y-Achse die Richtung von dn_2 hat, so möge ds_1 in diesem die Koordinaten x und y haben, so daß $\sin\beta_2 = \frac{x}{a}$ ist. Ersetzt man dann die Ableitung nach s_1 durch die beiden Teilableitungen nach x und y, so erhält man, wenn β_1 den Winkel bedeutet, den a mit der Normalen zu ds_1 bildet,

$$v_{12} = \frac{1}{4\pi}\int_{b_1} \frac{\Gamma_1 \cos(\beta_1+\beta_2)}{a^2}\,ds_1.$$

Also entsprechend wird (1)

$$W_{12} = \frac{\rho}{4\pi}\int_{b_1}\int_{b_2} \frac{\Gamma_1\Gamma_2\cos(\beta_1+\beta_2)}{a^2}\,ds_1\,ds_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Wenn umgekehrt der Widerstand angegeben werden soll, der an I durch das Feld von II hervorgerufen wird, hat man in (4) nur β_1 und β_2 bzw. durch $\pi+\beta_1$, $\pi+\beta_2$ zu ersetzen, wodurch der Wert des Integrals ungeändert bleibt; man erhält also den zuerst von Munk bewiesenen Satz, daß der Widerstand, den II durch die Anwesenheit von I erfährt, ebensogroß ist, wie der Widerstand, der bei I durch II hervorgerufen wird.

Liegen die beiden Flügel untereinander, so daß $\beta_1 + \beta_2$ immer ein spitzer Winkel ist, so wird $W_{12} = W_{21}$ positiv, liegen sie aber so, so daß $\beta_1 + \beta_2$ überwiegend negativ ist, so wird dieser induzierte Widerstand negativ.

Im allgemeinen Falle, in welchem die beiden tragenden Linien nicht in einer Querebene liegen, ergibt sich folgendes Resultat, das wir nach Prandtl hier ohne [illegible]geben wollen:

[illegible] wieder ds_1 ein Element des einen, in der Flugrichtung zurückliegenden Tragflügels, ds_2 ein Element des anderen und r ihre gegenseitige Entfernung. Die x-Achse (Abb. 83) werde in die Richtung von ds_2 gelegt, die y-Achse in die Richtung von dn_2 (senkrecht zur Flugrichtung und ds_2), die z-Achse in die dem Fluge entgegengesetzte Richtung. Die Projektion von r in die $(x\ y)$-Ebene sei a. Der Winkel, den a mit dn_2 bildet, sei wieder β_2 und entsprechend β_1 der Winkel, den dn_1 mit der Parallelen zu a einschließt; α endlich sei der Winkel zwischen a und r.

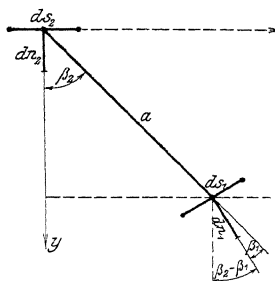



Abb. 82.

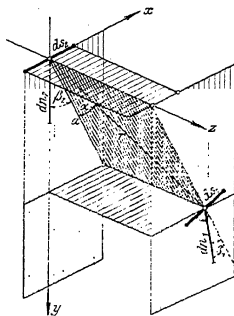



Abb. 83.

Dann ist die Komponente des Geschwindigkeitsvektors, den I am Element ds_2 Richtung dn_2 hervorruft:

$$v_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{b_1} \Gamma_1 \, ds_1 \left[\frac{(1 + \sin\alpha) \cos(\beta_1 + \beta_2)}{a^2} + \frac{\sin\beta \cos\beta_1 \cos\beta_2}{r^2} \right].$$

Man erhält also als induzierten Widerstand, den II durch I erfährt:

$$W_{12} = \text{[illegible]} \ (1 + \sin\alpha) \cos(\beta_1 + \beta_2) \ \text{[illegible]} \ \sin\alpha \cos\beta_1 \cos\beta_2 \ \text{[illegible]} \quad (5)$$

welcher Ausdruck für $\alpha = 0$ wieder in den Ausdruck (4) übergeht. Der Widerstand, der an I durch II hervorgerufen wird, kann aus (5) dadurch erhalten werden, daß an Stelle von α der Wert $\pi + \alpha$, an Stelle von β_1 und β_2 die Werte $\pi + \beta_1$ und $\pi + \beta_2$ gesetzt werden. Man erhält so:

$$W_{21} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{b_1} \int_{b_2} \Gamma_1 \Gamma_2 \, ds_1 \, ds_2 \left[\frac{(1 - \sin\alpha) \cos(\beta_1 + \beta_2)}{a^2} - \frac{\sin\alpha \cos\beta_1 \cos\beta_2}{r^2} \right]. \quad (6)$$

Die beiden Widerstände W_{12} und W_{21} sind also nur in dem vorher behandelten Falle $\alpha = 0$, wenn die beiden Fäden in einer Querebene liegen, einander gleich. Es ist aber von besonderer Wichtigkeit, daß ihre Summe

$$W_{12} + W_{21} = \frac{\rho}{2\pi} \int\limits_{b_1} \int\limits_{b_2} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \, ds_1 \, ds_2 \cos(\beta_1 + \beta_2)}{a^2} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

von α unabhängig wird. Dieser Ausdruck bleibt also ungeändert, wenn die beiden Fäden in der Flugrichtung parallel verschoben, insbesondere also in ein und dieselbe Querebene verlegt werden. Diese Tatsache ist ebenfalls zuerst von Munk ausgesprochen worden. Es darf aber bei dieser Schlußfolgerung nicht übersehen werden, daß bei einer solchen Parallelverschiebung die Zirkulationen Γ_1 und Γ_2 der beiden Fäden infolge der gegenseitigen Beeinflussung durch die beiden Geschwindigkeitsfelder ebenfalls verändert werden, weil ja der wirksame Anstellwinkel, dem die Zirkulation proportional ist, bei einer Veränderung der Lage der beiden Flügel in Richtung der Bewegung, der sog. Staffelung, nicht derselbe bleibt. Man kann sich aber vorstellen, daß bei der Parallelverschiebung die geometrischen Anstellwinkel der beiden Flügel so abgeändert werden, daß die wirksamen Anstellwinkel dieselben bleiben, so daß dabei die Zirkulationsverteilungen oder, was ja dasselbe ist, die Auftriebsverteilungen keine Änderung erfahren. Aber diese Abänderung der Auftriebsverteilungen durch die Veränderung der Staffelung ist proportional $\frac{v_{12}}{v_\infty}$ bzw. $\frac{v_{21}}{v_\infty}$, also entsprechend der Grundlage unserer Näherungstheorie als eine kleine Zahl anzusehen. In Übereinstimmung damit wird sich in § 6 ergeben, daß der Einfluß der Staffelung auf die Gestaltung des Polardiagrammes (c_w als Funktion von c_a) nur ein sehr geringer ist: wir haben ihn als einen Effekt 2. Ordnung anzusehen.

Da die Eigenwiderstände eines Flügels natürlich von einer Veränderung der Staffelung unabhängig sind, haben wir also, wenn wir nur die Effekte erster Ordnung berücksichtigen, das Resultat:

Der Gesamtwiderstand eines Tragwerks bleibt ungeändert, wenn die einzelnen Flügel desselben in der Flugrichtung verschoben werden, d. h. wenn die Staffelung abgeändert wird.

§ 2. Tragwerke kleinsten Widerstandes.

Haben wir es mit einem ungestaffelten Tragwerk zu tun, bei dem also alle tragenden Fäden in einer Querebene liegen, so läßt sich für dieses das Minimum des Widerstandes wieder durch eine ganz entsprechende Betrachtung finden, wie wir sie in Kapitel III § 10 kennengelernt haben.

Da das Geschwindigkeitsfeld am Orte der Fäden selbst jetzt wiederum nur durch die freien abgehenden Wirbel bedingt ist, so sind die Geschwindigkeiten in der Querebene der Fäden wieder halb so groß wie die Geschwindigkeiten, die von einem Wirbelbande herrühren, das sich von den Fäden aus nach beiden Seiten in das Unendliche erstreckt. In dem Raume außerhalb der doppelt unendlich langen,

zylindrischen Schalen, die die Wirbelbänder darstellen, haben wir es dann mit einer Potentialströmung zu tun. Ist wieder Γ die Zirkulation des tragenden Fadens, so ist die Zirkulationsstärke für die Breite ds des abgehenden Wirbelbandes (vgl. S. 102) $-\frac{d\Gamma}{ds}ds$ und es muß also $\frac{d\Gamma}{ds}$ gleich dem Unterschiede der Geschwindigkeitskomponenten der Strömung in Richtung des tragenden Fadens auf der Ober- und Unterseite sein. Nennen wir also das Potential der Strömung φ, so ist $\frac{d\Gamma}{ds} = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 - \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_u$, der Differenz der Ableitung von φ in Richtung s auf der Ober- und Unterseite. Da Γ an den Flügelenden gleich Null ist, erhalten wir also

$$\Gamma = \varphi_0 - \varphi_u \qquad \text{(8)}$$

Legen wir nun wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß die positive y-Achse senkrecht nach oben, die positive z-Achse der Flugrichtung entgegen gerichtet ist, so haben wir, wenn ε den Winkel bedeutet, den ds mit der x-Achse bildet, da die Luftkraft normal zu ds den Wert $\rho\,\Gamma v_\infty$ hat, für ds den Auftrieb $\rho\,\Gamma v_\infty \cos\varepsilon\, ds$, oder wenn dx die Projektion von ds auf die x-Achse bedeutet: $\rho\,\Gamma v_\infty\, dx$, also für den Auftrieb des Tragwerkes nach (8)

$$A = \rho v_\infty \sum_i \int_{C_i} \varphi\, dx \qquad \text{(9)}$$

wenn die C_i die Tragfäden eng umschlingende, geschlossene Kurven bedeuten und die Summation sich auf alle Fäden erstreckt.

Nehmen wir nun an, daß wir zwei verschiedene Strömungsvorgänge haben, die von zwei verschiedenen Zirkulationsverteilungen, aber mit demselben Gesamtauftrieb, herrühren, so erhalten wir für den induzierten Widerstand der Strömung, die durch Subtraktion der beiden Geschwindigkeiten erhalten wird, wie in § 10

$$W_d = \frac{\rho}{2} \sum_i \int_{C_i} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n}\right) ds$$

oder wie dort

$$W_d = W^{(1)} + W^{(2)} - \rho \sum_i \int_{C_i} \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n}\, ds \qquad \text{(10)}$$

Dieser Widerstand längs eines Weges l ausgeübt, ist wieder gleich der kinetischen Energie, die in dem entsprechenden Raumteil enthalten ist.

Es sei nun die erste Strömung von folgender Art: Die Wirbelbänder wollen wir uns durch starre zylindrische Schalen ersetzt denken und wollen annehmen, daß sich diese Schalen in Richtung der negativen y-Achse mit der Geschwindigkeit $2v_1$ vorwärtsbewegen oder, was praktisch auf dasselbe hinauskommt, daß diese Schalen sich in Ruhe befinden und von einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit $2v_1$ in Richtung der positiven y-Achse getroffen werden. Dann wird $\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} = 2v_1 \cos\varepsilon$ und wir erhalten aus (10)

$$W_d = W^{(1)} + W^{(2)} - 2\rho v_1 \sum_i \int_{C_i} \varphi^{(2)} \cos\varepsilon\, ds = W^{(1)} + W^{(2)} - 2\rho v_1 \sum_i \int_{C_i} \varphi^{(2)}\, dx\,. \qquad \text{(11)}$$

also nach (9)

$$W_d = W^{(1)} + W^{(2)} - \frac{2 v_1}{v_\infty} A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Wenn aber $2v_1$ am Orte der Flügel die von dem doppelt unendlichen Wirbelbande herrührende abwärts gerichtete Geschwindigkeitskomponente ist, so muß v_1 die Komponente des einfach unendlichen Wirbelbandes sein, und es wird wie früher, $W^{(1)} = \frac{v_1}{v_\infty} A$, so daß wir wie in § 10 erhalten

$$W^{(2)} = W^{(1)} + W_d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die oben charakterisierte Strömung ergibt also den kleinsten induzierten Widerstand, und wir erhalten das Resultat:

Von allen Zirkulationsverteilungen eines Tragwerkes gibt diejenige den kleinsten induzierten Widerstand, bei der das von den Wirbelbändern herrührende Geschwindigkeitsfeld von der Art ist, wie es von einer die Flügel umfließenden Parallelströmung, die senkrecht zur Flugrichtung nach unten gerichtet ist, hervorgerufen wird.

Bezeichnet man nach Prandtl die Integralsumme $\frac{1}{2 v_1} \Sigma \int \varphi \, dx$, welche die Dimension einer Fläche hat, mit F', so erhält man für den minimalen induzierten Widerstand, da ja $A = 2 \rho v_\infty v_1 F'$ wird, die Form

$$W = \frac{A^2}{2 \rho v_\infty^2 F'} = \frac{A^2}{4 q F'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

oder, wenn wieder $A = c_a q F$, $W = c_{wi} q F$ gesetzt wird,

$$c_{wi} = \frac{c_a^2 F}{4 F'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Diese Fläche F' hat eine anschauliche physikalische Bedeutung. Die vom induzierten Widerstand in der Sekunde geleistete Arbeit ist

$$W v_\infty = A v_1 = \rho v_\infty F' \frac{1}{2} (2 v_1)^2.$$

$\rho v_\infty F'$ ist die in der Sekunde durch F' hindurchgehende Luftmenge; erteilt man gerade nur dieser Luftmasse die Abwärtsgeschwindigkeit $2v_1$, so ist ihre kinetische Energie gleich der Widerstandsarbeit.

Stellt man sich vor, daß die konstante Parallelströmung ein ringförmig geschlossenes Tragwerk trifft, so erhält man im Innern des Ringes ruhende Flüssigkeit. Für dieses Innere kann man dem Potential der Strömung einen beliebigen konstanten Wert geben; dementsprechend kann man längs des ringförmig tragenden Fadens im Innern eine konstante Normalkraft wirken lassen. Die Summation dieser Normalkräfte würde den Wert Null ergeben, es wird durch sie weder am Gesamtauftrieb noch am Widerstande etwas geändert. Man kann auch weiter das Innere des Ringes durch eingeschaltete tragende Fäden, die von einem Punkte

der Berandung zu einem anderen gehen, in Fächer einteilen und in jedem Fache ein anderes konstantes Potential annehmen, weil die, durch die entstehenden Potentialdifferenzen entstehenden konstanten Normalkräfte weder den Gesamtauftrieb, noch auch, da ja bei konstanter Normalkraft auch die Zirkulation konstant bleibt, den induzierten Widerstand verändern; von diesen eingeschalteten Fäden gehen ja keine Wirbelbänder ab.

Auf diese Weise kommt Prandtl zu dem einfachen Schlusse, daß ein ringförmiges Tragwerk kleineren induzierten Widerstand besitzen muß als irgendein anderes mit demselben Gesamtauftrieb, das die Grenzen des Ringes nirgendwo überschreitet. Läßt man nämlich von einem Tragwerk Teile weg, ohne den Gesamtauftrieb zu verändern, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn man für das vollständige Tragwerk eine Auftriebverteilung annimmt, bei der die Auftriebsdichte in den fortgelassenen Teilen den Wert Null hat; diese Veränderung der Verteilung wird den minimalen induzierten Widerstand im allgemeinen vergrößern, aber niemals verkleinern. Nun kann man aber in ein ringförmiges Tragwerk, wie wir eben gesehen haben, nach Belieben Flügel einschalten, die von einem Punkte der Berandung zu einem anderen gehen, ohne den induzierten Widerstand zu verändern. Durch ein solches Hinzufügen von Flügeln und nachheriges Weglassen von Teilen wird man aber aus jedem ringförmigen Tragwerk jedes andere Tragwerk erhalten können, das ganz im Innern des Ringes gelegen ist, wenn es an keiner Stelle über die Berandung heraustritt. Damit ist der obige Satz bewiesen.

§ 3. Numerische Durchführung.

Bei der Berechnung des Minimalwertes des induzierten Widerstandes, wie er durch die Formel (15) gegeben ist,

kommt es also auf die Bestimmung der Fläche F' an. Wir hatten uns die zu allen Tragflügeln gehörigen, sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckenden Wirbelbänder durch zylindrische Schalen zu ersetzen und hatten dann anzunehmen, daß alle diese Schalen von einer Parallelströmung von der Stärke $2v_1$ getroffen werden. Ist φ das Potential dieser Strömung, so war $F' = \frac{1}{2v_1}\sum_i \int_{C_i} \varphi\, dx$, wo C_i Kurven bedeuten, die die Schalen eng umschlingen und die Summation sich auf alle Schalen erstreckt. Da aber $\frac{\varphi}{2v_1}$ das Potential derjenigen Strömung bedeutet, bei der die Geschwindigkeit im Unendlichen den Wert 1 hat, so stehen wir also bei der Bestimmung von F' der Aufgabe gegenüber, das Potential einer Parallelströmung zu suchen, die eine gegebene Schar von unendlich langen Zylinderflächen senkrecht zur Richtung der Erzeugenden trifft, wobei die Geschwindigkeit im Unendlichen den Wert 1 hat. Diese Aufgabe kann aber mit den Hilfsmitteln des Kapitels II, also mit den Hilfsmitteln der Funktionentheorie, gelöst werden. Wir haben nur zu bedenken, daß hier die Flügelbreite b dieselbe Rolle spielt, die damals der Flügel-

tiefe t zukam. Die Bestimmung der Fläche F' möge dementsprechend an einigen Beispielen durchgeführt werden.

1. Der Eindecker. Eine ebene, unendlich lange Platte von der Breite b möge von einer Strömung getroffen werden, die auf ihr senkrecht steht und im Unendlichen die Geschwindigkeit 1 hat. Legen wir die x-Achse in die Plattenbreite (Nullpunkt in die Plattenmitte), die y-Achse in die Richtung der Strömung, so ist das komplexe Potential dieser Strömung (vgl. S. 87 oder 113)

$$w = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2}, \quad z = x + iy,$$

also

$$F' = \int_C \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2}\, dz, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

wo C eine die Strecke $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$ unendlich nahe umschlingende Kurve bedeutet, also

$$F' = \pi \frac{b^2}{4}, \text{ d. h. } c_{wi} = c_a{}^2 \frac{F}{\pi b^2}$$

in Übereinstimmung mit der auf S. 117 gegebenen Eindeckerformel.

2. Ein Doppeldecker möge aus zwei geraden Eindeckern von gleicher Spannweite b bestehen, die voneinander die Entfernung h haben. Wir haben jetzt zwei ebene, unendlich lange Platten von der Breite b im Abstande h die von einer zu ihnen senkrechten Parallelströmung getroffen werden, wobei die Geschwindigkeit im Unendlichen gleich 1 ist. Die Bestimmung des komplexen Potentials kann mit den im § 13 des Kapitels II gegebenen Formeln erfolgen.

Setzen wir, wie dort angegeben,

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt,$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \qquad E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}}\, dt, \quad k'^2 = 1 - k^2,$$

$$K'(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \quad E'(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}}\, dt,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{E'}{K'}\right)^2}{1-k^2}},$$

so folgt durch Division der Gleichungen (79) und (80) des angegebenen Paragraphen, weil jetzt b an die Stelle von t zu treten hat,

$$\frac{h}{b} = \frac{E - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) K}{E(\tau) - \frac{E'}{K'} K'(\tau)},$$

oder wegen der Legendreschen Relation $E K' + E' K - K K' =$

$$\frac{h}{b} \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \frac{1}{\quad - E' K'(\tau)}, \tag{17}$$

diese Gleichung dient, bei gegebenem b und h zur Bestimmung des „Moduls“ k.

Um nun das Potential der Strömung anzugeben, bedenken wir, daß nach den Erörterungen des angegebenen Paragraphen einer Strömung in der Ebene des Doppeldeckers (ζ-Ebene) senkrecht zu den Tragflügeln in der Ebene der beiden hintereinander liegenden Flächen (z-Ebene) eine Strömung in Richtung der Tragflügel (x-Achse) entspricht, wobei die Abbildungsfunktion durch (77) S. 92 gegeben ist. Damit $\frac{dw}{d\zeta}$ im Unendlichen den Wert i erhält, muß das komplexe Potential

$$w = -\lambda z \tag{18}$$

sein. Wir haben also, da nach S. 53 Gleichung (20) bei der Integration das komplexe Potential benutzt werden darf,

$$F' = -\lambda \left[\int_{C_1} z\, d\zeta + \int_{C_2} z\, d\zeta\right]$$

wo C_1 und C_2 zwei in der ζ-Ebene die beiden Doppeldeckerplatten umschlingende Kurven bedeuten. Ersetzen wir nach II 13 Gleichung (77) $d\zeta$ durch $\frac{d\zeta}{dz}\, dz$, so wird

$$F' = \lambda^2 \left[\int_{C_1'} \frac{z\,(z^2 - m^2)}{\sqrt{(p^2 - z^2)\,(z^2 - q^2)}}\, dz + \int_{C_2'} \frac{z\,(z^2 - m^2)}{\sqrt{(p^2 - z^2)\,(z^2 - q^2)}}\, dz\right],$$

wo jetzt C'_1 und C_2' die entsprechenden Platten in der z-Ebene umschlingen. Die Berechnung der Integralsumme kann nach den Regeln der Funktionentheorie am besten durch Berechnung des Residuums für $z = \infty$ erfolgen, da ja $z = p$, $z = q$ die einzigen Singularitäten des Integranden sind.

Man findet, wenn man noch (II § 13 Gleichung (77)), $m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$ berücksichtigt,

$$F' = \pi \lambda^2 p^2 \left[1 + k^2 - 2\,\frac{E'}{K'}\right];$$

und da überdies nach (80) § 13 Kapitel II $\frac{b}{2} = \lambda p \left[E'(\tau) - \frac{E'}{K'}\, K'(\tau)\right]$, so erhält man

$$F' = \pi \frac{b^2}{4} \frac{1 + k^2 - 2\,\frac{E'}{K'}}{\left[E'(\tau) - \frac{E'}{K'}\, K'(\tau)\right]^2}, \tag{19}$$

woraus die Berechnung von F' mit Hilfe der früher angegebenen Tafeln für die elliptischen Integrale ohne weiteres erfolgen kann, nachdem k aus (17) berechnet ist.

3. Handele es sich um ein rechteckförmiges, ringartig geschlossenes Tragwerk, das aus einem Doppeldecker durch Einfügung von abschließenden Seitenwänden entstanden ist. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß dieses Tragwerk einen kleineren induzierten Widerstand besitzen muß, als alle in diesen Rahmen ein-

geschlossenen Mehrdecker, insbesondere also einen kleineren als der Doppeldecker, aus dem es entstanden ist.

Es kommt hier nur die Strömung im Außenraum des ringförmigen Gebildes in Betracht, d. h. die Strömung um einen unendlich langen Balken von der Breite b und der Höhe h, die senkrecht gegen die Breitenausdehnung erfolgt und wieder im Unendlichen den Wert 1 hat.

Die Abbildung eines Rechtecks (ζ-Ebene) mit den Seiten b und h auf die beiden Seiten einer Strecke von der Länge b (z-Ebene) erfolgt mit Hilfe einer Funktion der Form:

$$\zeta = -\lambda \int_0^z \frac{z^2 - q^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}}\, dz.$$

Daraus erkennt man, daß die Lösung unserer Aufgabe unmittelbar auf die der vorigen zurückgeführt werden kann, wenn man das $m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$ der vorigen Aufgabe hier durch $q^2 = p^2 k^2$, d. h. also $\frac{E'}{K'}$ in der vorigen Aufgabe hier durch k^2 ersetzt. Da dann τ durch 1 ersetzt werden muß, erhalten wir hier an Stelle der Gleichungen (17) bzw. (19), wenn wieder $k'^2 = 1 - k^2$ berücksichtigt wird:

$$\frac{h}{b} = \frac{E - k'^2 K}{E' - k^2 K'}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

$$F' = \pi \frac{b^2}{4} \frac{k'^2}{(E' - k^2 K')^2}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

aus (20) folgt wieder bei gegebenen h und b der Modul k und aus (21) sodann die gesuchte Fläche F'.

4. Endlich läßt sich mit den Hilfsmitteln des § 12 Kapitel II die Aufgabe für einen Eindecker von der Spannweite b mit einem Spalt von der Breite d lösen.

Entsprechend der dortigen Bezeichnungsweise haben wir $p = \frac{b}{2}$, $q = \frac{d}{2}$. Das komplexe Potential wird, da jetzt $v_{x\infty} = 0$, $v_{y\infty} = 1$, $\Gamma = 0$ zu nehmen ist:

$$w = \int_0^z \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(p^2 - z^2)(z^2 - q^2)}}\, dz.$$

Wir erhalten also

$$F' = \int_C w\, dz,$$

wo C eine Kurve bedeutet, welche die mit der Spaltbreite d versehene Strecke $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$ umschlingt. Bei der Auswertung dieses Integrals kann wieder das Residuum für z genommen werden. Man erhält dann

$$F' = \pi (p^2 + q^2 - 2 m^2)$$

also, wenn nach II 12 Gleichung (68) $m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$ gesetzt wird, wobei der Modul $k = \frac{q}{p} = \frac{d}{b}$, $= 1 - k^2$ zu nehmen ist:

$$F' = \pi \frac{b^2}{4} \quad {}^2 - 2 \quad E' \qquad 22)$$

Zur numerischen Berechnung dieser Beispiele vergleichen wir den Doppeldecker und den rechteckigen Rahmen jedesmal mit einem Eindecker, der denselben Auftrieb hervorbringt und die gleiche Spannweite besitzt. Das Verhältnis der induzierten Widerstände ist dann durch den Bruch $\varkappa = \frac{\pi}{4} \frac{b^2}{F'}$ gegeben Die Werte von $\varkappa$ sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen:

$\frac{h}{b}$ . . .	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
Doppeldecker . .	1	0,890	0,825	0,770	0,739	0,684	0,645	0,615
Rechteck	1	0,865	0,787	0,728	0,680	0,601	0,545	0,500

Wir erkennen die Überlegenheit des Doppeldeckers gegenüber dem Eindecker und, der Theorie entsprechend, die des rechteckigen Rahmens über den Doppeldecker.

Bei dem Eindecker mit Spalt wird der induzierte Widerstand am besten mit dem des Eindeckers verglichen, der durch Schließung des Spaltes entsteht, also die Spannweite $b - d$ besitzt. Das Verhältnis der induzierten Widerstände wird

Es ergibt sich für $\varkappa$ folgende Tabelle:

		0,001	0,01	0,05	0,10	0,25	0,50	1,00
	1	1,315	1,471	1,659	1,760	1,895	1,972	2,000

§ 4. Numerische Berechnung des induzierten Widerstandes beliebiger Tragwerke bei Annahme elliptischer Auftriebsverteilung.

Wollte man den induzierten Widerstand eines beliebigen Tragwerkes bei vorgeschriebener Verteilung des Auftriebes über die einzelnen Flügel in der Art der vorigen Paragraphen berechnen, so würde man auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen. Man wird aber von dem wirklichen Werte nicht wesentlich abweichen, wenn man mit Prandtl und seinen Mitarbeitern von dem Ansatz ausgeht, daß der Auftrieb über die Spannweite jedes einzelnen Flügels elliptisch verteilt ist, wie wir es ja auch bei der Eindeckertheorie getan haben. Zur Berechnung der gegenseitigen Beeinflussung der Tragflügel untereinander könnte man auch von der Annahme ausgehen, daß sich der Auftrieb gleichmäßig über die Spannweite verteilt. Diese zwar nicht ganz so befriedigende Annahme, die zuerst Betz durchgeführt hat, kann wegen ihrer Einfachheit zur Beantwortung einiger Fragen, die mit dem Prandtlschen Ansatz noch nicht behandelt werden können, herangezogen werden (vgl. § 5).

Hier machen wir zunächst den Ansatz, daß sich der Auftrieb über die Spannweite der Flügel eines Doppeldeckers elliptisch verteilt. Da es sich nur um die Effekte erster Ordnung handelt (vgl. S. 127), sehen wir von einer Staffelung der Flügel untereinander ab und nehmen also an, daß die beiden Flügel in einer Quer-

ebene, senkrecht zur Flugrichtung, liegen. Die Entfernung der Flügel sei h; alle Angaben für den Oberflügel seien mit dem Index o, für den Unterflügel mit dem Index u versehen.

Nach S. 113 Gleichung (36) ist der komplexe Wert des Geschwindigkeitsfeldes des Oberflügels (wir haben hier die Hälfte des dort angegebenen Wertes zu nehmen):

$$\frac{i\,\Gamma_{mo}}{2b}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2-\left(\frac{b_o}{2}\right)^2}}-1\right],$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel für die Oberseite +, für die Unterseite — zu nehmen ist. Der vertikale Anteil dieser Geschwindigkeit in einem Punkte des Unterflügels, der vom Mittelpunkt die Entfernung x hat, ist also, wenn Γ_{mo} nach S. 117 Gleichung (42) durch den Auftrieb A_o ersetzt wird:

$$v_{ou} = -\frac{2A_o}{\pi\rho b_o^2 v_\infty}\left[1+\Re\frac{x-ih}{\sqrt{(x-ih)^2-\left(\frac{b_o}{2}\right)^2}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

wenn $\Re$ wieder den reellen Teil eines Ausdruckes bedeutet. Der induzierte Widerstand, den der Unterflügel durch das Feld des Oberflügels erfährt, ist also (§ 6 des III. Kapitels)

$$W_{ou} = \rho\int_{-\frac{b_u}{2}}^{+\frac{b_u}{2}} v_{ou}\,\Gamma_u\,dx,$$

also

$$W_{ou} = \frac{8A_oA_u}{\pi^2\rho b_o^2 b_u v_\infty^2}\int_{-\frac{b_u}{2}}^{+\frac{b_u}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{b_u^2}\right)^2}\left[1+\Re\frac{x-ih}{\sqrt{(x-ih)^2-\left(\frac{b_o}{2}\right)^2}}\right]dx. \quad (24)$$

Setzt man in diesem Ausdruck $x = \xi\frac{b_u}{2}$ und überdies

$$\varepsilon = \frac{2h}{b_o+b_u},\quad \mu = \frac{b_u}{b_o},\quad q = \frac{\rho}{2}v_\infty^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

so erhält man:

$$W_{ou} = \frac{1}{\pi q}\frac{A_o}{b_o}\frac{A_u}{b_u}\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

wo

$$\sigma = \frac{2\mu}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\left[1+\Re\frac{\xi-\varepsilon\left(1+\frac{1}{\mu}\right)i}{\sqrt{\left[\xi-\varepsilon\left(1+\frac{1}{\mu}\right)i\right]^2-\frac{1}{\mu^2}}}\right]d\xi$$

oder

$$\sigma = \mu - \frac{2\mu}{\pi}\int_{-1}^{+1}\Re\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\varepsilon(1+\mu)+i\mu\xi}{\sqrt{[\varepsilon(1+\mu)+i\mu\xi]^2+1}}\,d\xi \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Dieser Faktor σ ist also eine Funktion von ε und μ; damit der Ausdruck zur Berechnung bei allen ε-Werten bis Null hin brauchbar sei, muß $\mu \leq 1$ sein. Da

$W_{ou} = W_{uo}$ (vgl. S. 125) ist, kann aber μ immer kleiner oder gleich 1 angenommen werden. Für $\varepsilon = 0$ wird dann $\sigma = \mu$, also $W_{ou} = \frac{\quad}{\pi}\,\iota$; ist also auch noch $b_o = b_u$, $A_o = A_u$, so wird $W_{ou} =$ gleich dem Eigenwiderstand der einzelnen Flügel.

Die numerische Berechnung des Faktors σ wird am besten nach irgendeinem Näherungsverfahren für Integrale ausgeführt. Aus Zahlentafel 1 und Abb. 84

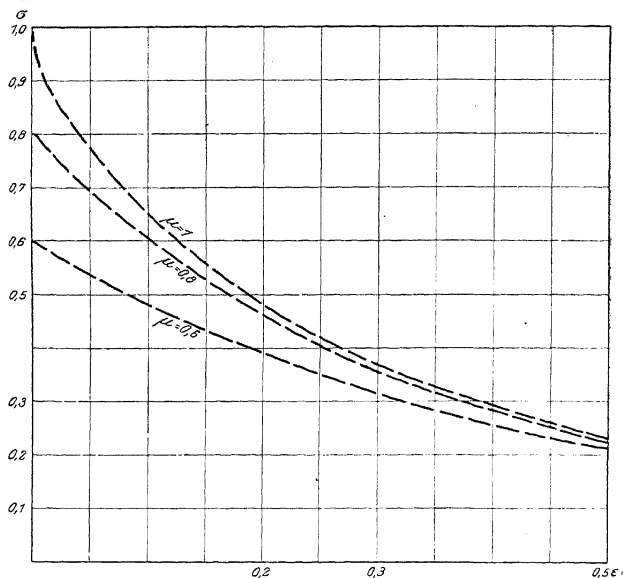



Abb. 84. Zur Doppeldeckerrechnung bei Annahme elliptischer Verteilung des Auftriebs über die einzelnen Flügel.

können die Werte für $\mu = 1; 0{,}8; 0{,}6$ entnommen werden. Bei gewöhnlichen Doppeldeckern, bei denen ja μ nicht viel von 1 abweicht, wird es genügen, wenn der Wert für $\mu = 1$ genommen wird, sonst hat man sich mit Interpolation zu helfen.

Zahlentafel der Werte σ für $\varepsilon = \frac{h}{\quad}$.

	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1,0	1,000	0,780	0,655	0,561	0,485	0,420	0,370	0,327	0,290	0,258	0,230
0,8	0,800	0,690	0,600	0,523	0,459	0,401	0,355	0,315	0,282	0,252	0,225
0,6	0,600	0,540	0,485	0,437	0,394	0,351	0,315	0,285	0,255	0,231	0,210

Liegt nun die Aufgabe vor, den Widerstand eines Doppeldeckers zu berechnen, bei dem die geometrischen Verhältnisse der einzelnen Flügel und ihre gegenseitige Entfernung und Einstellung gegeben sind, und bei dem überdies eine Modellmessung für die einzelnen Flügel, bei irgendeinem Seitenverhältnis ausgeführt ist, so hat man folgendermaßen zu rechnen: Zuerst müssen nach (46) S. 119 die Widerstandsbeiwerte c_{wo} und c_{wu} der Modellmessung auf die richtigen geometrischen Verhältnisse umgerechnet werden. Dem Auftriebsbeiwert c_{ao} des Oberflügels möge der Wert c_{au} des Unterflügels entsprechen; dabei ist zu berücksichtigen, daß die Einstellung des Unterflügels eine andere sein kann, wie die des Oberflügels; es muß also für den danach veränderten Anstellwinkel abgelesen werden.

Sind c_{wo} und c_{wu} jetzt diese umgerechneten Werte, so erhält man aus $W_d = W_o + W_u + 2\,\sigma\,W_{ou}$, wenn der Widerstandsbeiwert des Doppeldeckers mit c_{wd} bezeichnet wird:

$$\frac{F_u}{F} + 2\,\frac{\sigma}{\pi}$$

Beispiel: Beim Dfw C V ist $F_0 = 21{,}86\ \mathrm{m}^2$, $b_0 = 13{,}1$ m; $F_u = 19{,}4\ \mathrm{m}^2$, $b_u = 11{,}9$ m; $h = 1{,}84$ m. Ober- und Unterflügel haben dasselbe Profil. Wir erhalten also

$$\frac{2h}{b_o + b_u} = 0{,}147,\quad \mu = \frac{b_u}{b_o}$$

Die Interpolation aus Abb. 84 oder der zugehörigen Zahlentafel ergibt $\sigma = 0{,}548$. Aus einer Messung der Göttinger Versuchsanstalt wurde entnommen:

$$c_{ao} = 0{,}896;\ c_{au} = 1{,}048;\ c_{wo} = 0{,}0596;\ c_{wu} = 0{,}0772.$$

Der Messung lag ein Rechteck mit den Seiten 100 mm und 700 mm zugrunde.

Wir erhalten also nach (46) S. 119 für die wirklichen Flügel:

$$= 0{,}0596 + \frac{0{,}896^2}{\ } \qquad = 0{,}0772 \quad \frac{1{,}048^2}{\pi}\left(\frac{19{,}4}{11{,}9^2} - 7\right.$$

d. h. $c_{wo} = 0{,}0556$; $c_{wu} = 0{,}0751$.

Nach (28) ergibt sich also

$$\cdot\, c_{ao} \cdot c_{au} \cdot 0{,}023 = 0{,}0864.$$

Zum Auftriebsbeiwert 0,896 des Oberdecks und damit zum Auftriebswert des Doppeldeckers $\frac{c_{ao}\,F_o}{F}\quad \frac{{}_u\,F_u}{\ } = 0{,}968$ gehört also der Widerstandsbeiwert 0,0864 des Doppeldeckers.

Man kann sich die Frage vorlegen, in welcher Weise der Auftrieb auf den Ober- und Unterflügel verteilt werden muß, wenn dabei der induzierte Widerstand des Doppeldeckers möglichst klein werden soll. Der induzierte Widerstand des Oberflügels setzt sich aus dem Eigenwiderstand $W_o = \frac{1}{\pi q}\frac{A_o^2}{b_o^2}$ und dem vom unteren Flügel induzierten Widerstand $W_{uo} = \frac{\sigma}{\pi q}\frac{A_o\,A_u}{b_o\,b_u}$ zusammen; in derselben Weise der induzierte Widerstand des Unterflügels aus $W_u = \frac{1}{\pi q}\frac{A_u^2}{b_u^2}$ und $W_{ou} = \frac{\sigma}{\pi q}\frac{A_o}{b_o}\frac{A_u}{b_u}$.

Der induzierte Widerstand des Doppeldeckers wird also:

(31)

Zur Bestimmung des Minimums ist dann ein Ansatz: $A_u = A\lambda$ und also $A_o = A(1 - \lambda)$ zu machen und die Frage zu erörtern, für welchen Wert von λ W_d möglichst klein wird. Man findet mit der Bezeichnung $\frac{b_u}{b_o} = \mu$:

$$\lambda = \frac{\mu - \sigma}{+ \frac{1}{\mu} -} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

$$\varkappa = \quad 1 - \quad \frac{1}{\mu} \quad 2\sigma) \qquad (33)$$

Der Faktor q gibt den induzierten Widerstand eines Eindeckers, der denselben Auftrieb hervorbringt, wie der Doppeldecker und die Spannweite b_o des Oberflügels hat. Dieser Widerstand sei W_e; dann gibt $\varkappa$ das Verhältnis $W_d : W_\varepsilon$ an.

Zahlentafel.

1. Werte von $\varkappa = \frac{}{W_e}$ für den Doppeldecker.

h/b_0	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\mu = 0{,}6$	1,000	0,990	0,974	0,954	0,932	0,911	0,892	0,875	0,861	0,848	0,839
$\mu = 0{,}7$	1,000	0,982	0,956	0,926	0,897	0,871	0,849	0,830	0,812	0,797	0,783
$\mu = 0{,}8$	1,000	0,974	0,932	0,892	0,855	0,825	0,800	0,778	0,758	0,740	0,728
$\mu = 0{,}9$	1,000	0,950	0,893	0,847	0,807	0,773	0,744	0,719	0,699	0,683	0,671
$\mu = 1{,}0$	1,000	0,890	0,827	0,779	0,742	0,710	0,684	0,662	0,645	0,629	0,615

2. Werte von $\lambda = \frac{A_u}{A \quad A}$ für den Doppeldecker.

= 0,6	0	0,060	0,104	0,134	0,157	0,176	0,191	0,202	0,211	0,218	0,224
= 0,7	0	0,105	0,164	0,202	0,228	0,248	0,262	0,272	0,281	0,288	0,294
= 0,8	0	0,172	0,246	0,285	0,310	0,327	0,338	0,347	0,355	0,361	0,364
= 0,9	0	0,303	0,359	0,387	0,402	0,412	0,419	0,425	0,429	0,431	0,433
= 1,0	0,5	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	5,000

In Abb. 85 und Zahlentafel dazu sind die Zahlen $\varkappa = \frac{W_{d\,(\min)}}{W_e}$ und $\lambda = \quad A_u$ als Funktionen von $\frac{h}{b_o}$ und μ dargestellt. Im Falle $b_o = b_u$, also $\mu = 1$, erhält man

$$\frac{1}{2}, \quad \varkappa \quad 1 + \sigma$$

Der Vergleich mit Zahlentafel S. 134 zeigt, daß der günstigste Doppeldecker mit gleichen Spannweiten nur eine sehr geringe Abweichung vom induzierten Widerstand des günstigsten Doppeldeckers ($\mu = 1$) bei Annahme elliptischer Verteilungen über beide Flügel aufweist.

Aus dem gewonnenen Resultat darf man aber nicht den falschen Schluß ziehen, daß der Doppeldecker immer dem Eindecker, der denselben Auftrieb hervorbringt, überlegen ist; dieser Schluß gilt nur für den Eindecker, der dieselbe Spannweite wie der Oberflügel des Doppeldeckers besitzt.

Es möge z. B. festgestellt werden, um wieviel der Widerstand bei dem S. 137 behandelten Beispiel eines Doppeldeckers von demjenigen Doppeldecker abweicht,

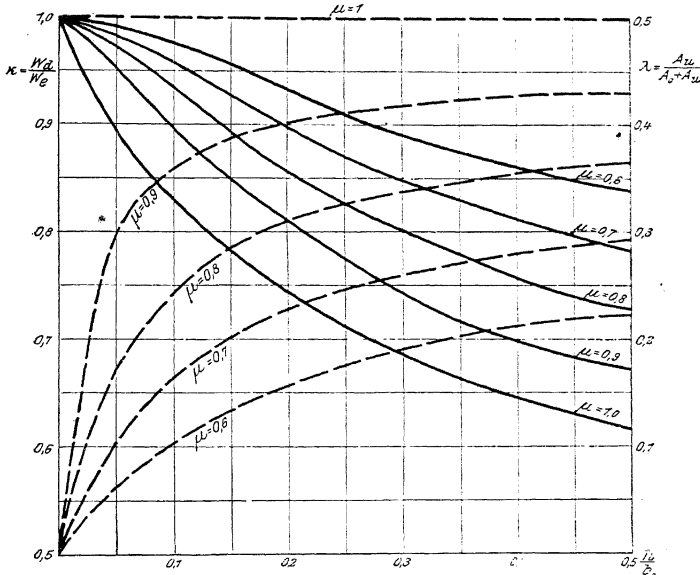



Abb. 85. Beiwerte zur Doppeldeckerrechnung.

der den geringsten Widerstand hat, wobei die Flügelbreiten und der Flügelabstand beibehalten werden. Der induzierte Widerstand des Doppeldeckers im allgemeinen hat den Beiwert

$$1 \quad F_o^2 \quad + 2\sigma \frac{F_o \; F_u \; c_{ao} \; c_{au}}{} + c_{au}^2 \; F_u^2$$

Für den induzierten Widerstand im günstigsten Falle erhalten wir

$$(\mathrm{min}) \quad (c_{ao} \; F_o + c_{au} \; F_u)^2$$

Die Berechnung ergibt für unser Beispiel im ersten Falle 0,0614; im zweiten Falle findet man, mit $\varkappa = 0{,}850$, den Wert 0,0607, also nur einen sehr geringen Unter-

schied. Zur Erzielung des geringsten induzierten Widerstandes, müßte beim Gesamtauftrieb $A = q\,(c_{ao}\,F_o + c_{au}\,F_u) = 39{,}9\,q$, $c_{ao} = \frac{39{,}9}{F_o}\,(1 - \lambda)$, $c_{au}\,\frac{39{,}9}{F_u}\,\lambda$ sein; oder da $\lambda = 0{,}396$ ist, $c_{ao} = 1{,}1$; $c_{au} = 0{,}815$. Man erkennt daraus, daß die Art der Einstellung der Flügel hinsichtlich des induzierten Widerstandes, wenn keine Staffelung vorhanden ist, von sehr geringer Bedeutung ist, was in § 6 noch deutlicher hervortreten wird.

§ 5. Der Hufeisenwirbel.

In 1 wurde erörtert, warum in erster Näherung der Gesamtwiderstand eines Tragwerkes bei einer Veränderung der Staffelung der Flügel untereinander ungeändert bleibt. Genau richtig ist dieser Satz aber nur, wenn bei dieser Abänderung die Einstellung der Flügel, d. h. ihre Schränkung so abgeändert wird, daß der Gesamtauftrieb der einzelnen Flügel derselbe ist wie vorher. Für manche feinere Untersuchung wird es notwendig, diese Effekte zweiter Ordnung, wie sie bei Abänderung von Staffelung und Schränkung auftreten, kennen zu lernen. Insbesondere

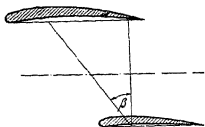



Abb. 86. Staffelungswinkel.

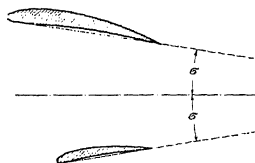



Abb. 87. Schränkungswinkel.

wird es oft wichtig sein, die Anteile der Luftkraft auf die Einzelflügel, die Lastverteilung, zu kennen; dabei kann dann natürlich der Einfluß von Staffelung und Schränkung nicht außer acht gelassen werden. Bei der Erörterung dieses Einflusses würde der Ansatz mit elliptischer Auftriebsverteilung noch zu unübersichtliche Rechenverfahren ergeben. Wir wollen daher hier noch kurz die Formeln zusammenstellen, die sich bei der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung des Auftriebes über die ganze Spannweite ergeben.

Die Werte der Staffelung und Schränkung mögen durch folgende Vereinbarung in die Rechnung eingeführt werden: Zur Bezeichnung der Staffelung (s. Abb. 86) denken wir uns in zwei übereinander liegenden Sehnen der beiden Flügel diejenigen Punkte verbunden, die in ein Drittel der Sehne von der Vorderkante liegen (dorthin kann man etwa das Zentrum der Zirkulation des gebundenen Wirbels verlegen); dann verstehen wir unter dem Staffelungswinkel β denjenigen Winkel, welcher von dieser Verbindungslinie und der Senkrechten zur Mittelfläche der beiden Flügel gebildet wird.

Der Schränkungswinkel 2σ ist der Neigungswinkel der beiden Tragflächen gegeneinander, positiv, wenn der Oberflügel, negativ, wenn der Unterflügel steiler angestellt ist (Abb. 87).

Wir haben hier für jeden der beiden Flügel den schon auf S. 101 beschriebenen Hufeisenwirbel (s. Abb. 68) anzusetzen und haben seine Einwirkung auf den anderen Flügel festzustellen. Dazu verwenden wir wieder die S. 100 entwickelte Formel für den von einem geradlinigen Wirbelstück hervorgerufenen Geschwindigkeitsvektor. Zunächst die Einwirkung des vorangestellten Oberflügels auf den Unterflügel.

1. Der Einfluß des gebundenen Wirbels (Abb. 88) AB auf das Element PQ

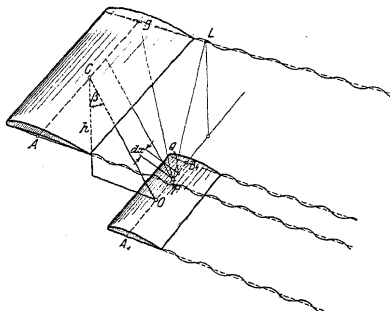



Abb. 88.

$= dx$ $(OP = x)$ des Unterflügels. Ist wieder h der Flügelabstand, also $\frac{h}{\cos}$ der Abstand des Punktes P von AB, so wird AB in dx einen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_1$ hervorrufen, der auf PAB senkrecht steht und den Betrag

$$v_1 = \frac{\Gamma_0 \cos\beta}{4\pi h}\left[\frac{\frac{1}{2}b_0 + x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}b_0 + x\right)^2 + \frac{h^2}{\cos^2\beta}}} + \frac{\frac{1}{2}b_0 - x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}b_0 - x\right)^2 + \frac{h^2}{\cos^2\beta}}}\right] \quad . \quad . \quad (34)$$

besitzt.

2. Der von B ausgehende freie Wirbelfaden gibt einen auf PLB nach unten senkrecht stehenden Vektor $\mathfrak{v}_2$. Da $PL = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b_0}{2} - x\right)^2}$, $BL = h \operatorname{tg}\beta$ ist, so hat der Vektor den Betrag

$$v_2 = \frac{\Gamma_0}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_0}{2} - x\right)^2}}\left[1 + \frac{h\sin\beta}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_0}{2} - x\right)^2\cos^2\beta}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

3. Der von A ausgehende Faden gibt, da seine Zirkulation entgegengesetzt gerichtet ist, einen auf PLA, gleichfalls nach unten, senkrecht stehenden Vektor $\mathfrak{v}_3$ vom Betrage:

$$v_3 = \frac{\Gamma_0}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_0}{2} + x\right)^2}}\left[1 + \frac{h\sin\beta}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_0}{2} + x\right)^2\cos^2\beta}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Nur der Vektor $\mathfrak{v}_1$ hat eine Komponente in der Flugrichtung, und zwar von der Größe $-v_1 \cos\beta$. Alle drei Vektoren aber besitzen eine Komponente, die senkrecht nach unten gerichtet ist. Es wird sich also einerseits eine Veränderung der Geschwindigkeit des Luftstromes Δv und andererseits infolge der Vertikalkomponente eine Änderung des Anstellwinkels $\Delta\alpha$ ergeben. Für beide wollen wir den Mittelwert für den Unterflügel dadurch berechnen, daß wir von $-\frac{b_u}{2}$ bis $+\frac{b_u}{2}$ integrieren und durch b_u dividieren. Die Vertikalkomponente von $\mathfrak{v}_2$ ist: $v_2 \cdot \dfrac{\frac{b_o}{2} - x}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_o}{2} - x\right)^2}}$, die von $\mathfrak{v}_3$: $v_3 \cdot \dfrac{\frac{b_o}{2} + x}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_o}{2} + x\right)^2}}$. Die Ausführung der Rechnung ergibt dann, wenn wir noch für Γ_o seinen Wert $\frac{A_o}{\rho v_\infty b_o} = \frac{1}{2}\frac{c_{ao} F_o}{b_o} v_\infty$ einführen:

$$\frac{\Delta v_{ou}}{v_\infty} = -\frac{c_{ao}}{4\pi}\frac{F_o}{b_o b_u}\mu \quad \text{. . . . . (37)}$$

$$\Delta\alpha_{ou} = -\frac{c_{ao}}{4\pi}\frac{F_o}{b_o b_u}(\nu + \varkappa) \quad \text{. . . . . (38)}$$

Dabei bedeuten, wenn $\lambda_1 = \frac{b_o + b_u}{2h}$, $\lambda_2 = \frac{b_o - b_u}{2h}$ gesetzt wird,

$$\mu = \mu(\lambda_1) - \mu(\lambda_2);\ \mu(\lambda) = \cos\beta\left[\sqrt{1 + \lambda^2\cos^2\beta} - 1\right], \quad \text{. . . . (39)}$$

$$\nu = \nu(\lambda_1) - \nu(\lambda_2);\ \nu(\lambda) = \sin\beta\left[\sqrt{1 + \lambda^2\cos^2\beta} - 1\right] + \log\text{nat}\,\frac{(1 + \sin\beta)\sqrt{1 + \lambda^2}}{\sin\beta + \sqrt{1 + \lambda^2\cos^2\beta}}, \quad \text{. . . . . (40)}$$

$$\varkappa = \varkappa(\lambda_1) - \varkappa(\lambda_2);\ \varkappa(\lambda) = \frac{1}{2}\log\text{nat}\,(1 + \lambda^2)\,. \quad \text{. . . . . (41)}$$

Die Werte für $\mu(\lambda)$, $\nu(\lambda)$, $\varkappa(\lambda)$ können aus den Abb. 89, 90, 91 für $\lambda = 0$ bis 10 und für $\beta = 0^0$ bis $\beta = 40^0$ entnommen werden.

Eine genauere Rechnung müßte natürlich eine Veränderung dieser Einflüsse längs der Flügeltiefe berücksichtigen. Betz, der diese Berechnung zuerst ausgeführt hat, setzt diese Veränderung dadurch in Rechnung, daß er eine Ablenkung des Luftstromes längs der Flügeltiefe durch eine Veränderung der Profilwölbung ausgleicht. Alle ausgeführten Rechnungen ergeben aber, daß diese Korrektur zu gering ist, um praktisch ins Gewicht zu fallen. In der einfachsten Weise geht nun aus (37) und (38) der Einfluß des Unterflügels auf den Oberflügel hervor: Man hat nur β durch $\pi + \beta$ zu ersetzen. Dadurch geht μ in $-\mu$, ν in $-\nu$ über, während natürlich $\varkappa$ seinen Wert beibehält. Es ergibt sich also:

$$\frac{\Delta v_{uo}}{v_\infty} = \frac{c_{au}}{4\pi}\frac{F_u}{b_o b_u}\mu \quad \text{. . . . . (37a)}$$

$$\Delta\alpha_{uo} = \frac{c_{au}}{4\pi}\frac{F_u}{b_o b_u}(\nu - \varkappa) \quad \text{. . . . . (38a)}$$

Will man nun danach bei einem gegebenen Anstellwinkel die Veränderung von Auftrieb und Widerstand berechnen, die den Abänderungen der Geschwindigkeit

Abb. 89. Beiwert μ bei der Doppeldeckerrechnung (Hufeisenwirbel).

Abb. 90. Beiwert ν bei der Doppeldeckerrechnung (Hufeisenwirbel).

und des Anstellwinkels entsprechen, so hat man zu bedenken, daß bei Abänderung von v um $\triangle v$ und α um $\triangle \alpha$ einmal A und W in

$$A_1 = A + \frac{\partial A}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \qquad \qquad \frac{}{\partial v}$$

übergehen; andererseits muß bedacht werden, daß die Stromrichtung nach unten abgelenkt worden ist, Auftriebs- und Widerstandskomponente somit eine neue Richtung erhalten haben (s. Abb. 92). Man findet also

$$A + \triangle A = A_1 \cos \triangle \alpha + W_1 \sin \triangle \alpha,$$
$$W + \triangle W = W_1 \cos \triangle \alpha - A_1 \sin \triangle \alpha,$$

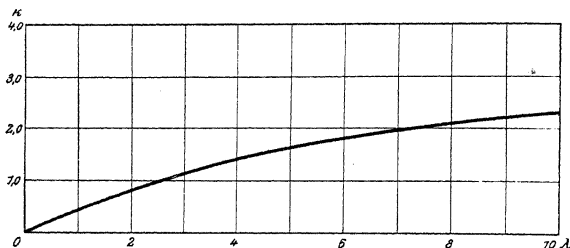



Abb. 91. Beiwert $\varkappa$ bei der Doppeldeckerrechnung (Hufeisenwirbel).

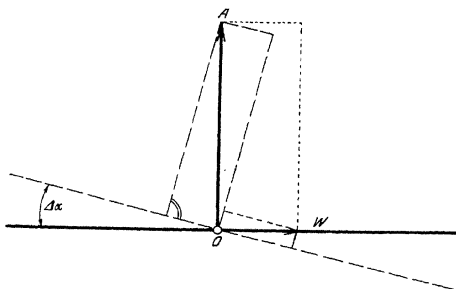



Abb. 92. Zur Doppeldeckerrechnung (Hufeisenwirbel). Ablenkung des Luftstroms.

oder, da $\cos \triangle \alpha = 1$, $\sin \triangle \alpha = \triangle \alpha$ gesetzt werden kann, bei Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung:

$$\triangle A = \frac{\partial A}{\partial v}\triangle v + \frac{\partial A}{\partial \alpha}\triangle \alpha + W \triangle \alpha,$$

$$\triangle W = \frac{\partial W}{\partial v}\triangle v + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\triangle \alpha - A \triangle \alpha.$$

Bei der Berechnung zeigt sich, daß W gegen $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ vernachlässigt werden kann. Wenn wir also nun zu den Beiwerten c_{ao}, c_{au}, c_{wo}, c_{wu} übergehen und den Ein-

fluß des Ober- auf den Unterflügel mit $\triangle c_{a\,o\,u}$ bzw. $\triangle c_{w\,o\,u}$, den des Unter- auf den Oberflügel mit $\triangle c_{a\,u\,o}$ bzw. $\triangle c_{w\,u\,o}$ bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned}
\triangle c_{a\,o\,u} &= -\frac{\mu}{2\pi}\frac{F_o}{b_o b_u} c_{a\,o} c_{a\,u} - \frac{57{,}3}{4\pi}(\nu + \varkappa)\frac{F_o}{b_o b_u} c_{a\,o}\frac{\partial c_{a\,u}}{\partial \alpha},\\
\triangle c_{a\,u\,o} &= +\frac{\mu}{2\pi}\frac{F_u}{b_o b_u} c_{a\,u} c_{a\,o} + \frac{57{,}3}{4\pi}(\nu - \varkappa)\frac{F_u}{b_o b_u} c_{a\,u}\frac{d\,c_{a\,o}}{d\,\alpha},\\
\triangle c_{w\,o\,u} &= -\frac{\mu}{2\pi}\frac{F_o}{b_o b_u} c_{a\,u} c_{w\,u} - \frac{\nu + \varkappa}{4\pi}\frac{F_o c_{a\,o}}{b_o b_u}\left(57{,}3\,\frac{\partial c_{w\,u}}{\partial \alpha} - c_{a\,u}\right),\\
\triangle c_{w\,u\,o} &= \frac{\mu}{2\pi}\frac{F_u}{b_o b_u} c_{a\,u} c_{w\,o} + \frac{\nu - \varkappa}{4\pi}\frac{F_u c_{a\,u}}{b_o b_u}\left(57{,}3\,\frac{\partial c_{w\,o}}{\partial \alpha} - c_{a\,o}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (42)$$

Beispiel: Es werden wieder die S. 137 benutzten Werte des Dfw C V: $F_o = 21{,}86$ m², $b_o = 13{,}1$ m; $F_u = 19{,}4$ m²; $b_u = 11{,}9$ m, $h = 1{,}84$ m und eine Schränkung von -2^0 zugrunde gelegt, dazu aber ein Staffelungswinkel $\beta = 20^0$ angenommen. Dann wird:

$$\lambda_1 = \frac{b_o + b_u}{2h} = 6{,}80, \quad \lambda_2 = \frac{b_o - b_u}{2h} = 0{,}326$$

und demgemäß nach Abb. 89 bis 91

$\mu = 5{,}14 - 0{,}04 = 5{,}1;\quad \nu = 2{,}15 - 0{,}05 = 2{,}1;\quad \varkappa = 1{,}93 - 0{,}21 = 1{,}72.$ Mit

$c_{a\,o} = 0{,}896;\;\; c_{a\,u} = 1{,}048;$ (Zunahme pro Grad) $= 0{,}076;\;\; c_{w\,o} = 0{,}0596;$

$c_{w\,u} = 0{,}0772;\;\; \frac{d\,c_{wo}}{d\,\alpha}$ (Zunahme pro Grad) $= 0{,}0055$, erhält man dann:

$\triangle c_{a\,o\,u} = -0{,}107 - 0{,}167 = -0{,}274;\qquad \triangle c_{a\,u\,o} = +0{,}095 + 0{,}017 = +0{,}112;$

$\triangle c_{w\,o\,u} = -0{,}0078 + 0{,}023 = +0{,}0152;\;\; \triangle c_{w\,o\,u} = +0{,}0063 - 0{,}0023 = +0{,}0040.$

Für die Anwendungen ist es noch von Interesse, die Ablenkung des Luftstromes zu kennen, die ein Flügel bei einer kleinen, in größerer Entfernung hinter dem Flügel liegenden Fläche hervorruft. Es handelt sich dabei hauptsächlich um den sog. Abwind, den das Höhenleitwerk unter der Einwirkung eines Flügels erfährt. Man geht dabei am besten auf die Formeln (34), (35), (36) zurück, nimmt $x = 0$ und h klein gegen die Spannweite b des Flügels. Die Entfernung der kleinen Fläche vom Flügel $\frac{h}{\cos\beta}$ werde mit l bezeichnet, im übrigen aber $\beta = 90^0$ gesetzt. Dann ergibt sich eine Ablenkung des Luftstroms um den Winkel

$$\triangle\alpha = -\frac{\quad}{\pi b v} \qquad\qquad 2\pi b^2 \;\; 1 + \sqrt{1 +} \qquad . \; (43)$$

Wir wollen diesen Abwind auch bei Annahme elliptischer Auftriebsverteilung berechnen. Es werde auch dabei die Höhenlage der kleinen Fläche gegen den Flügel außer acht gelassen. Dann wird der Anteil des gebundenen Wirbels, wenn Γ_m die Zirkulation in der Mitte des Flügels bedeutet (vgl. S. 117)

$$-\frac{\Gamma_m}{4\pi}\frac{1}{l^2 v_\infty}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2}\,dx = -\frac{1}{8\pi}c_a\frac{F}{l^2}.$$

Für das Wirbelband haben wir den doppelten Betrag der Ablenkung des Luftstromes am Flügel selbst zu setzen, also (vgl. S. 117)

$$\frac{\Gamma_m}{b\,v_\infty} = \frac{2\,c_a}{\pi}\,\frac{F}{b^2}.$$

Man findet also im ganzen:

$$\triangle\alpha = -\frac{c_a}{\pi}\,\frac{F}{b^2}\left[2 + \frac{1}{8}\,\frac{b^2}{l^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43\,a)$$

Die Ausrechnung zeigt, daß der Wert (43a) etwa doppelt so groß ist wie der Wert (43). Man darf aber nicht annehmen, daß die Theorie bei Annahme elliptischer Verteilung zuverlässiger ist wie die andere. Wie schon S. 110 hervorgehoben wurde, haben wir es ja in größerer Entfernung vom Flügel nicht mehr mit einem aus parallelen Fäden bestehenden Wirbelbande zu tun, sondern müssen vielmehr annehmen, daß sich das Band dort bereits aufgerollt hat (vgl. Abb. 70 S. 102). Auch die Experimente im Windkanal haben noch nicht sicher im Sinne der einen oder anderen Theorie entschieden. In der Praxis ist bisher meist mit der Formel (43) gerechnet worden.

§ 6. Einfluß von Staffelung und Schränkung.

Es soll nun mit den Formeln des vorigen Paragraphen festgestellt werden, in welcher Weise Staffelung und Schränkung die Leistung des Doppeldeckers beeinflussen. Wir bezeichnen diese Einflüsse als solche zweiter Ordnung, da sie, wie wir im § 1 S. 127 gesehen haben, nur klein gegenüber denjenigen sind, die durch die geometrischen Abmessungen des Doppeldeckers bedingt sind.

Wir wollen annehmen, daß die beiden Tragflügel das gleiche Profil mit den Auftriebs- und Widerstandsbeiwerten c_a und c_w besitzen. Die Bezeichnung der Staffelung und Schränkung erfolgt in der Weise, wie es auf S. 140 angegeben ist. Der Anstellwinkel der Mittelfläche zwischen den beiden Flügeln sei α, so daß also $\alpha + \sigma$ der Anstellwinkel des Oberflügels, $\alpha - \sigma$ der des Unterflügels ist, wobei σ auch eine negative Größe sein darf. Dementsprechend ist dann

$$= c_a\,(\alpha \qquad\qquad (\alpha \qquad\qquad = c_a\,(\alpha - \sigma),\ c_{wu} = c_w\,(\alpha - \sigma$$

Der Schränkungswinkel σ ist durchweg nur klein; wir wollen also diese Beiwerte nach Potenzen von σ entwickeln und nur die Glieder erster Ordnung mit σ beibehalten. Wenn man dann für den Doppeldecker

$$c_{ad} = \frac{(c_{ao} + c_{auo})\,F_o + (c_{au} + c_{aou})\,F_u}{F_o + F_u},$$

$$c_{wd} = \frac{(c_{wo} + c_{wuo})\,F_o + (c_{wu} + c_{wou})\,F_u}{F_o + F_u}$$

setzt, so ergeben sich die Formeln (42):

$$c_{ad} = c_a \,|\, 1 - \varkappa \quad 57{,}3\ d\,c_a \qquad \frac{F_o F_u}{b_o b_u\,(F_o + F_u)}\Big|$$

$$\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\left[\frac{F_o - F_u}{F_o + F_u} \qquad \nu\,\frac{57{,}3}{2\pi}\,\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\,\frac{F_o F_u}{b_o b_u\,(F_o +} \right. \quad \ldots (44)$$

$$c_{wd} = c_w + \varkappa \frac{c_a}{2\pi}\left(c_a - 57{,}3\frac{d c_w}{d\alpha}\right)\frac{F_o F_u}{b_o b_u (F_o + F_u)}$$
$$+ \sigma\left[\frac{d c_w}{d\alpha}\frac{F_o - F_u}{F_o + F_u} + \frac{\mu}{\pi}\left(c_a\frac{d c_w}{d\alpha} - c_w\frac{d c_a}{d\alpha}\right)\frac{F_o F_u}{b_o b_u (F_o + F_u)}\right.$$
$$\left. + \frac{\nu \cdot 57{,}3}{2\pi}\left(c_a\frac{d^2 c_w}{d\alpha^2} - \frac{d c_a}{d\alpha}\frac{d c_w}{d\alpha}\right)\frac{F_o F_u}{b_o b_u (F_o + F_u)}\right] \quad \dots\dots\dots \quad (45)$$

Betrachtet man c_{ad} als Funktion von c_{wd} (Polardiagramm), so spielen die Glieder $\frac{d c_a}{d\alpha}\frac{F_o - F_u}{F_o + F_u}$ und $\sigma\frac{d c_w}{d\alpha}\frac{F_o - F_u}{F_o + F_u}$, die nicht von der gegenseitigen Beeinflussung der Flügel herrühren, für unsere Betrachtung keine Rolle, da sie ja nur den Übergang vom Winkel α zum Winkel $\alpha + \sigma\frac{F_o - F_u}{F_o + F_u}$ ergeben, also nur zu einer anderen Stelle des Polardiagrammes hinführen.

Ist nun zunächst $\sigma = 0$, so kommt in c_{ad} und c_{wd} nur das Glied mit $\varkappa$ vor. Da aber $\varkappa$ vom Staffelungswinkel β unabhängig ist, so erkennt man, daß eine Staffelung ohne gleichzeitige Schränkung bedeutungslos ist.

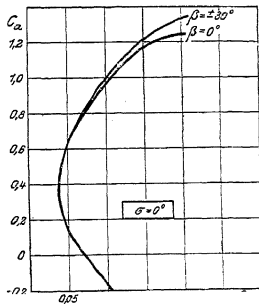



Abb. 93. Staffelung ohne Schränkung.

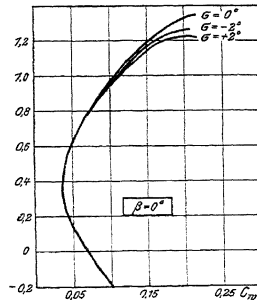



Abb. 94. Schränkung ohne Staffelung.

In Abb. 93 sind bei $\sigma = 0$ die Fälle $\beta = 0$ und $\beta = \pm 30^0$ einander gegenübergestellt (wobei $F_o = F_u$ gesetzt ist). Eine Abweichung zeigt sich erst bei den größeren Anstellwinkeln, für die ja unsere Theorie überhaupt nicht mehr so zuverlässig ist.

In den Faktoren von σ sind am wirkungsvollsten die Glieder mit ν. Da aber ν, für $\beta = 0$, verschwindet, so zeigt sich, daß sich das Polardiagramm in diesem Falle sehr wenig mit σ ändern kann. Es erweist sich also eine Schränkung ohne gleichzeitig vorhandene Staffelung wiederum als bedeutungslos. Dasselbe zeigt Abb. 94, in der bei $\beta = 0$ die Fälle $\sigma = -2^0$, $\sigma = 0^0$, $\sigma = +2^0$ einander gegenübergestellt sind; in diesem Falle ist $F_o = 2 F_u$ angenommen.

Wir betrachten nun Schränkungen, wenn zugleich eine Staffelung vorhanden ist. Wenn β zunimmt, so erkennt man aus Abb. 89 und 90, daß μ kleiner wird, aber ν zunimmt. Für die Veränderung des Polardiagramms kommen, wie schon gesagt,

im wesentlichen die Glieder mit ν in Betracht. Die Zahl ν ist bei positivem β positiv, bei negativem negativ. Die Formeln (44) und (45) zeigen daher bei positivem β, daß c_{ad} verkleinert, c_{wd} vergrößert wird, wenn σ von Null zu positiven Werten übergeht; umgekehrt wird bei negativem β c_{ad} vergrößert, c_{wd} verkleinert, wenn σ von Null zu negativen Werten übergeht. Die Leistung des Doppeldeckers

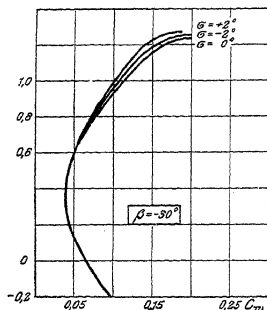



Abb. 95.
Schränkung bei negativer Staffelung.

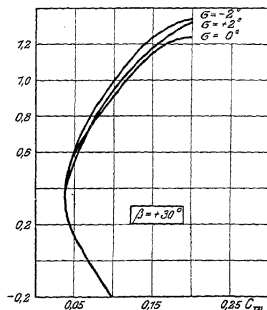



Abb. 96.
Schränkung bei positiver Staffelung.

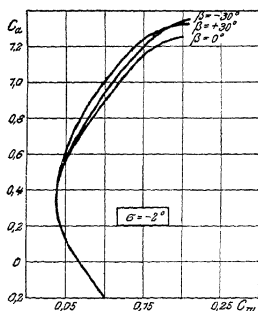



Abb. 97.
Staffelung bei negativer Schränkung.

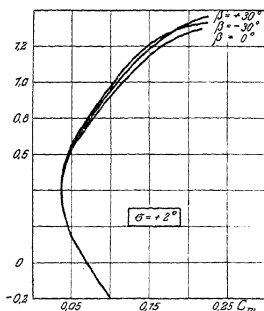



Abb. 98.
Staffelung bei positiver Schränkung.

wird also verbessert, wenn der weiter zurückliegende Flügel steiler angestellt wird.

In derselben Weise zeigt man, daß der steiler angestellte Flügel gegenüber dem anderen weiter zurückgeschoben werden muß, wenn die Leistung verbessert werden soll.

Die Abb. 95 und 96 zeigen dementsprechend ($F_o : F_u = 1$) bei $\beta = -30^0$ und bei $\beta = +30^0$ die Polardiagramme für $\sigma = -2^0$, $\sigma = 0^0$, $\sigma = +2^0$; die Figuren 97 und 98 zeigen ($F_o : F_u = 1$) bei $\sigma = -2^0$ und bei $\sigma = +2^0$ die Polardiagramme für $\beta = 30^0$, $\beta = 0^0$, $\beta = -30^0$.

V. Kapitel.

Theorie des Widerstandes.

§ 1. Die Helmholtzsche Diskontinuitätsfläche.

Alle unsere bisherigen Betrachtungen vermochten es nicht, eine erschöpfende Theorie des Widerstandes zu geben. Die Theorie des unendlich breiten Tragflügels ergab zwar schon eine recht gute Auftriebstheorie, aber überhaupt keine Möglichkeit für die Erklärung des Widerstandes. Bei der Theorie des endlichen Tragflügels führte uns das sich ablösende Band der freien Wirbelfäden zum induzierten Widerstand. Aber dieser Widerstand ist, wie schon wiederholt bemerkt wurde, nur ein Teil des Gesamtwiderstandes, und zur restlosen Erklärung des induzierten Widerstandes fehlt uns noch immer die Antwort auf die Frage, wie denn die Zirkulation des gebundenen Wirbelsystems, die sich in das System der freien Wirbel fortsetzt, überhaupt entstehen kann. Es mag im voraus bemerkt werden, daß die Theorie des Widerstandes bis heute noch der wundeste Punkt bei der Erklärung der Luftkraft ist. Eine abgeschlossene Theorie liegt durchaus noch nicht vor, und wir müssen uns dementsprechend hier damit begnügen, diejenigen Ansätze zu beschreiben, die bisher gemacht worden sind. Wir gehen dabei nicht auf alle die zahlreichen älteren Theorien zur Erlangung eines Widerstandsgesetzes ein, sondern beschränken uns auf die Ansätze von Newton und Helmholtz. Nach Newton besteht die Luft aus einer großen Zahl materieller Teilchen, die gleichmäßig im Raume verteilt sind. Bei der Bewegung durch ein solches Mittel erfahren die Körper einen Widerstand, der dem in der Sekunde mitgeteilten Impuls proportional ist. Man hat dabei zu unterscheiden, ob es sich beim Aufprallen der Luftteilchen auf den Körper um einen elastischen oder unelastischen Stoß handelt. Wird z. B. eine Platte von der Fläche F mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu ihrer Oberfläche bewegt, so wird im ersten Falle die den Luftteilchen zuerteilte Geschwindigkeit $2v$, im zweiten Falle v. Ist die Dichtigkeit der Luft ρ, so ist die sekundlich in Bewegung gesetzte Luftmasse $\rho F v$, also der ihr erteilte Impuls im ersten Falle $2\rho F v^2$, im zweiten Falle $\rho F v^2$. Treffen die Luftteilchen die Platte nicht senkrecht, sondern unter dem Winkel α gegen die Plattenfläche, so wird das Gesetz im ersten Falle

$$2\rho F v^2 \sin^2\alpha, \text{ im zweiten } \rho F v^2 \sin^2\alpha.$$

Auch der zweite Wert ist noch höher als der durch Experimente ermittelte. Newton war sich selbst schon dieser Tatsache bewußt und erklärte sie durch die Annahme eines nicht kontinuierlichen Mediums. Bei der Newtonschen Theorie spielt nur die Gestalt der vorderen Flächen des Körpers eine Rolle, während wir jetzt wissen, daß für den Widerstand die Vorgänge hinter dem Körper die bedeutungsvolleren sind.

Nachdem schon Stokes im Jahre 1847 darauf hingewiesen hatte, daß das Vorhandensein von Flächen, längs deren die Geschwindigkeit unstetig wird, sehr wohl bei der Bewegung einer vollkommenen Flüssigkeit möglich ist, machte Helmholtz im Jahre 1868 in seiner Abhandlung über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen darauf aufmerksam, daß es möglich ist, zu einer Erklärung des Widerstandes für

einen, durch eine Flüssigkeit bewegten Körper zu gelangen, wenn man es zuläßt, daß in einer — reibungslosen — Flüssigkeit zwei Schichten mit endlich verschiedenen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Wir haben ja schon früher (vgl. S. 96) auf solche Unstetigkeitsflächen hingewiesen und gezeigt, daß die Trennungsfläche durch eine Schicht von Wirbelfäden ersetzt werden kann.

Besitzt ein Körper scharfe Kanten (vgl. Abb. 99), so würde bei ihrer Umströmung eine unendlich große Geschwindigkeit auftreten müssen (vgl. S. 57), was natürlich nicht möglich ist. Man kann sich aber vorstellen, daß die Flüssigkeit an der scharfen Kante vorbeischießt. Infolgedessen würde der Bereich hinter dem Körper von Flüssigkeit erfüllt sein, die an der allgemeinen Bewegung nicht teilnimmt, wodurch ein sog. „Totwasser“ entstände. Längs der Fläche, die den Totwasserbereich abgrenzt, würde dann die Flüssigkeit außerhalb an ruhender Flüssigkeit vorbeigleiten, d. h. es würde sich eine Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit herausbilden. Während bei der Potentialströmung ohne Unstetigkeitsflächen, bei der die Stromlinien in der Körperoberfläche verbleiben und ihn umschlingen, wie wir

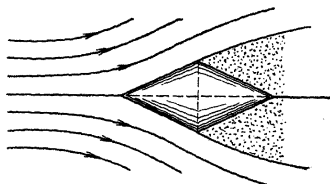



Abb. 99. Totwasser hinter einem Körper mit einer scharfen Kante.

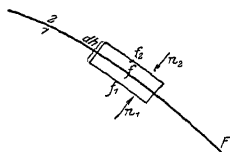



Abb. 100.

in I § 3 gesehen haben, auf den Körper keine Kraft wirken kann, also keine Energieübertragung vom Körper auf die Flüssigkeit und umgekehrt stattfindet, kann jetzt, wie wir an einem Beispiele sehen werden, vor dem Körper eine Druckerhöhung auftreten, während im Totwasserbereich der Druck der ruhenden Flüssigkeit herrscht. Wir verbleiben auch jetzt noch bei der Betrachtung stationärer Bewegungen von inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeiten und ermitteln zuerst die Grenzbedingung für eine Unstetigkeitsfläche. Wir haben dabei die Bernoullische Gleichung

$$p = \text{Const} - \frac{1}{2} \rho v^2 \tag{1}$$

zugrunde zu legen. Es werde ein Elementarzylinder betrachtet, dessen Grundflächen $f_1 = f_2 = f$ zu verschiedenen Seiten der Unstetigkeitsfläche liegen und dessen Höhe dh auf dieser Fläche senkrecht steht (vgl. Abb. 100).

Die Normalkomponente der Geschwindigkeit gegen die Unstetigkeitsfläche werde mit v_n bezeichnet, positiv in der Richtung von 1 nach 2. Wenn dh gegenüber f als unendlich klein angesehen wird, so ist die in der Zeiteinheit in den Zylinder einströmende Flüssigkeitsmenge $(v_{n1} - v_{n2}) f$, und da diese gleich Null sein muß, hat man:

$$v_{n1} = v_{n2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{2}$$

Die auf den Zylinder wirkende Druckkraft ist, wenn p_1 und p_2 die beiderseits herrschenden Drucke bezeichnen,

$$(p_1 - p_2)\, f;$$

also wirkt auf die Masseneinheit der Druck $(p_1 - p_2) : dh$, und da dieser nicht unendlich groß sein kann, muß

$$p_1 = p_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

sein. Daraus ergibt die Gleichung (1), in der die Konstante zu beiden Seiten der Fläche F verschiedene Werte haben kann,

$$v_1^2 - v_2^2 = \text{Const} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Wenn also angenommen wird, daß die Flüssigkeit etwa auf der Seite 2 in Ruhe ist, so muß auf der Seite 1

$$v_{n1} = 0, \; v_1 = \text{Const} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

sein. Die Flüssigkeit strömt also längs der Unstetigkeitsfläche nur in tangentialer Richtung, und die Geschwindigkeit ist über die ganze Fläche konstant.

Um nachher ein für uns besonders wichtiges Beispiel einer Unstetigkeitsfläche behandeln zu können, wollen wir jetzt wieder wie im Kapitel II (vgl. § 1) annehmen, daß die Strömung der Flüssigkeit so vor sich geht, daß ihr Zustand längs einer jeden auf der (x, y)-Ebene senkrechten Geraden überall derselbe ist, so daß also alle gegebenen und gesuchten Funktionen nur von x und y abhängen.

Die Grenzen des Gebietes der strömenden Flüssigkeit sind einerseits feste Wände, andererseits freie Grenzen, d. h. die Unstetigkeitsflächen, längs deren die Flüssigkeit an ruhender Flüssigkeit vorbeiströmt. Wir denken uns wieder die komplexe Variable $z = x + iy$ und bezeichnen in der z-Ebene das Gebiet der strömenden Flüssigkeit (also mit Ausschluß der ruhenden) durch Z. Sind wieder $\varphi = \text{Const}$ die Linien gleichen Potentials im Gebiete der (wirbelfreien) Strömung und $\psi = \text{Const}$ die Stromlinien, so nennen wir wie früher

$$w = \varphi + i\psi = f(z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

das komplexe Potential und bilden das Gebiet Z durch $f(z)$ auf ein Gebiet W der w-Ebene ab. Da alle Grenzen von Z, sowohl die festen Wände als auch die freien Grenzen, Stromlinien $\psi = \text{Const}$ sind, so erkennt man, daß alle Grenzen von W gerade Linien sein müssen, die der φ-Achse parallel sind.

Für die freien Grenzen haben wir außer $\psi = \text{Const}$ noch die Bedingung (5): $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{Const}$ zu erfüllen. Führen wir also wieder den komplexen Wert der Geschwindigkeit

$$v = \frac{dw}{dz} = v_x - i v_y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

ein und bilden das Gebiet Z auch mittels $v = \frac{dw}{dz} = f'(z)$ in die v-Ebene ab, so werden in dem Bilde V den freien Grenzen konzentrische Kreise um den Anfangspunkt $v = 0$ entsprechen.

Wir brauchen bei unserem Beispiel nur den Fall, daß die festen Wände in der z-Ebene als gerade Linien erscheinen. In diesem Falle kann auch das Bild der festen Wände in der V-Ebene angegeben werden. Aus $\psi = \text{Const}$ folgt für eine feste Wand $\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$, also $v_y + v_x \frac{dy}{dx} = 0$. Ist nun $y = \alpha x + \beta$ die Gleichung der Wand, also $\frac{dy}{dx} = \alpha$, so erhalten wir als Bild der Wand in der v-Ebene die Gerade $v_x + \alpha v_y = 0$ durch den Nullpunkt.

Sind also die festen Wände von Z gerade Linien, so besteht das Bild V aus konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt und radialen Geraden.

Da v nicht unendlich groß werden kann, so sieht man überdies, daß V immer nur ein endliches Stück der v-Ebene bedecken darf.

Hat man die Aufgabe, bei gegebenen festen Wänden die Stromlinien und damit auch die freien Grenzen zu suchen, so ist ihre Lösung nunmehr auf eine Abbildungsaufgabe zurückgeführt:

Wir suchen zuerst die Abbildung des aus geraden Linien bestehenden Bildes W auf V. Ist die zugehörige Abbildungsfunktion v als Funktion von w gefunden, so folgt aus $v = \frac{dw}{dz}$ durch eine Quadratur

$$z = \int \frac{dw}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

ebenfalls als Funktion von w. Da nun für jede Stromlinie $\psi = \text{Const}$ ist, so hat man aus (8) x und y in Parameterdarstellung als Funktionen von φ.

§ 2. Strömung gegen eine Platte mit Diskontinuitätsfläche.

Ein Brett von unendlicher Breite und der Tiefe t möge von einem Flüssigkeitsstrome unter dem Winkel α getroffen werden. Der Strömungszustand soll in allen Ebenen senkrecht zur Breitenausdehnung der gleiche sein, kann also in irgendeiner dieser Ebenen (x, y), in der das Brett als Strecke von $+a$ bis $-b$ längs der x-Achse erscheint, betrachtet werden. Von den Endpunkten der Strecke sollen freie Grenzen ins Unendliche gehen. Der Staupunkt der Strömung sei der Koordinatenanfangspunkt.

Abb. 101.

1. Das Gebiet Z besteht also jetzt aus der ganzen z-Ebene mit Ausschluß des Totwasserraumes (s. Abb. 103), der von der Strecke $+a$ bis $-b$ und den freien Grenzen abgegrenzt wird.

2. Das Bild V (Abb. 101). Da sich die feste Wand auf der reellen Achse von A $(+a, 0)$ nach B $(-b, 0)$ erstreckt, muß nach dem Ergebnis des vorigen Paragraphen ihr Bild in der v-Ebene jedenfalls eine reelle geradlinige Strecke sein. Nehmen wir zunächst an, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen, und also auch längs der freien Grenzen, den Absolutwert 1 hat, so muß das Bild der freien Grenzen in der v-Ebene der Halbkreis von $+1$ nach -1 sein. Das Bild V hat also zur Begrenzung den Halbkreis von $+1$ nach -1 und den zugehörigen Durchmesser (s. Abb. 101).

Gibt $\quad = -\operatorname{tg} \alpha$ die Geschwindigkeitsrichtung im Unendlichen an, so ist $v_\infty =$

$v_{x\infty} - i v_{y\infty} = e^{i\alpha}$, wodurch der dem Unendlichen entsprechende Punkt des Halbkreises festgelegt ist.

3. Das Bild W. Geht z von 0 bis $+a$, also v von 0 bis $+1$, so ist (Abb. 102) in $w = \int_0^z v\,dz$, $\psi = 0$, und φ geht von 0 bis zu einem Werte $+A$. Geht z von 0 bis $-b$, also v von 0 bis -1, so ist wieder $\psi = 0$, und φ geht von 0 zu einem Werte $+B$. Da längs der freien Grenzen ψ denselben Wert behält, muß ψ immer gleich Null sein. Aus $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$, $0 = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy$, also $0 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ folgt: $d\varphi = \frac{dy}{\partial\varphi/\partial y}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{dy}{\partial\varphi/\partial y}\cdot 1$. Da aber auf einer Stromlinie (Abb. 103) dy und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ beide beständig negativ sind, so sieht man, daß $d\varphi$ immer positiv sein muß. Das Bild W besteht also aus zwei nebeneinander längs der positiven φ-Achse von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \infty$ herlaufenden Geraden (s. Abb. 102).

Abb. 102.

Wir haben nun entsprechend den Überlegungen des § 1 zuerst die Abbildung von W auf V aufzusuchen. Die Funktion, welche diese Abbildung vermittelt, ist

$$v = \cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{w}} - \sqrt{\left(\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{w}}\right)^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Es entsprechen sich, während immer $\psi = 0$ ist:

$$\varphi = 0 \text{ und } v = 0;$$

$$\varphi = A = \frac{1}{(1-\cos\alpha)^2},\ \sqrt{\varphi} = +\frac{1}{1-\cos\alpha} \text{ und } v = 1;$$

$$\varphi = \infty,\ \sqrt{\varphi} = \pm\infty \text{ und } v = e^{i\alpha};$$

$$= B = \frac{1}{(1+\cos\alpha)^2},\ \sqrt{\varphi} = -\frac{1}{1+\cos\alpha} \text{ und } v = -1.$$

Dabei muß bedacht werden, daß die Wurzel $\sqrt{\left(\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{w}}\right)^2 - 1}$ beim Durchgang von φ durch A und B ihr Zeichen wechselt.

Weiter hat man nach (8)

$$= \int^{v}\frac{dw}{v} = \int^{w}\left[\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{w}} \quad \left(\left(\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{w}}\right)^2 - 1\right)\right] dw.$$

Führt man die Integration aus, so erhält man:

$$= w\cos\alpha + 2\sqrt{w} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{-\alpha}{\sin^3\alpha} \quad \frac{\sin^2\alpha\sqrt{w} - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\sqrt{(\cos\alpha\sqrt{w}+1)^2 - w} + \frac{1}{\sin^3\alpha}\arcsin\left[\sin^2\alpha\sqrt{w} - \cos\alpha\right] \quad \ldots \quad (10)$$

Daraus folgen die Stromlinien, wenn man in $w = \varphi + i\psi$, ψ durch eine Konstante ersetzt. Für die feste Wand und die freien Grenzen hat man $\psi = 0$ und $\varphi > 0$ zu setzen. Man erhält $z = a$ mit $\varphi = A = \frac{\quad}{(1 - \cos\alpha)^2}, \quad \frac{\quad}{1 - \cos\alpha}$, d. h.:

$$\frac{2(\cos\alpha + \sin^2\alpha)}{(1 - \cos\alpha)\sin^2\alpha} + \frac{\pi - \alpha}{\sin^3\alpha};$$

ebenso $z = -b$ mit $\varphi = B = \frac{1}{\quad + \cos\alpha)^2}, \sqrt{\varphi} = \frac{1}{1 + \cos\alpha}$, d. h.:

$$\frac{2(\cos\alpha - \sin^2\alpha)}{(1 + \cos\alpha)\sin^2\alpha} - \frac{\alpha}{\sin^3\alpha},$$

also die Tiefe des Brettes

$$a + b = \frac{4 + \pi\sin\alpha}{\sin^4\alpha} \tag{11}$$

Für die freien Grenzen erhält man eine einfache Parameterdarstellung, wenn man einerseits, im Anschluß an $z = a$, $\sin^2\alpha\sqrt{\varphi} - \cos\alpha = \mathfrak{Cos}\,\xi$ setzt:

$$x = \quad \frac{1}{\sin^4\alpha}\left[\cos\alpha\,\mathfrak{Sin}^2\xi + 2(\mathfrak{Cos}\,\xi - 1)\right]$$

$$y \quad \sin^3\alpha\,[\quad 2 \tag{12}$$

andererseits hat man, im Anschluß an $z = -b$, mit $\sin^2\alpha\sqrt{\varphi} + \cos\alpha = \mathfrak{Cos}\,\xi$,

$$= -b + \frac{1}{\sin^4\alpha}\left[\cos\alpha\,\mathfrak{Sin} \quad 2(\mathfrak{Cos}\,\xi - 1)\right] \quad \ldots\ldots \tag{13}$$

Da der Unterschied der beiden x-Werte gleich

$$a + b = \frac{4(\mathfrak{Cos}\,\xi - 1)}{\sin^4\alpha}$$

der Unterschied der y-Werte aber gleich Null ist, so erkennt man, daß sich die beiden freien Grenzen nach dem Unendlichen hin immer weiter voneinander entfernen. Die zum Spaltungspunkt $z = 0$ hinführende, aus dem Unendlichen kommende Stromlinie erhält man, wenn man $\psi = 0$, $\varphi < 0$, also $\sqrt{w}$ rein imaginär setzt. Das Ergebnis der Rechnung ist für $\alpha = 60^0$ in Abb. 103 gezeichnet.

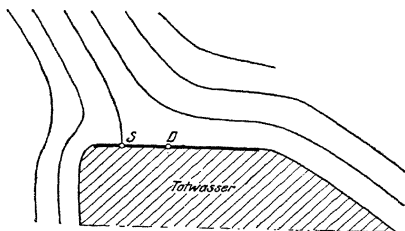



Abb. 103.

Der in der Flüssigkeit herrschende Druck ist nach der Bernoullischen Gleichung (1) für die strömende Flüssigkeitsmenge $p =$

$C - \frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2)$. Im Totwasser, wo die Geschwindigkeit den Wert Null hat, möge $p = p_0$ sein. Zu beiden Seiten der freien Grenzen ist der Druck nach (3) der gleiche; und da längs der freien Grenzen $v = v_\infty = 1$ ist, so hat man

$$ \tag{14}$$

also allgemein

$$\frac{\rho}{2}[1 - v_x^2 - v_y^2] \tag{15}$$

Längs der in der reellen Achse gelegenen festen Wand strömt die Flüssigkeit der Wand parallel, so daß $v = v_x$ ist. Der Überdruck der bewegten Flüssigkeit gegenüber der ruhenden auf der anderen Seite des Brettes ist längs des Elementes dx und der Breite 1 des Brettes danach

$$\overline{\partial x} \quad d\varphi.$$
$$\overline{\partial x}$$

Nach Gleichung (9) hat man also, wenn wieder $A = \frac{1}{(1 - \cos\alpha)^2}$ und $B = \frac{1}{(1 + \cos\alpha)^2}$ gesetzt wird, für den Überdruck längs der ganzen festen Wand den Wert

$$\cos\alpha + \frac{1}{\ }\Big) - 1\, d\varphi + \rho \qquad \cos\alpha - \quad - \tag{16}$$

Wir haben uns nun noch in einfacher Weise von den Beschränkungen $v_\infty = 1$ und der speziellen Größe der Wandtiefe $a + b$ freizumachen: Setzt man an Stelle von w den Wert $\frac{w'}{n} = \frac{\varphi'}{n} + \frac{i\psi'}{n}$ und läßt z ungeändert, so bleibt das Stromlinienbild genau dasselbe, da ja $\psi' = \text{Const}$ und $\psi = \text{Const}$ dieselbe Kurvenschar ergibt. Dagegen tritt an die Stelle von $\mathfrak{v} = \frac{dw}{dz}$ der Wert $\mathfrak{v}' = n\mathfrak{v}$, und der Überdruck längs der Wand wird proportional n^2. Damit also die Geschwindigkeit im Unendlichen und längs der freien Grenzen den Wert v_∞ bekommt, haben wir $n = v_\infty$ zu nehmen. Setzt man andererseits $z = \frac{z'}{m}$ und $w = \frac{w'}{m}$, so ändert sich die Geschwindigkeit nicht, während das Stromlinienbild in ein ähnliches übergeführt wird. Alle linearen Dimensionen werden proportional m abgeändert. Damit die Tiefe des Brettes den Wert t erhält, haben wir also

$$\frac{m\,(4 + \pi\sin\alpha)}{\sin^4\alpha} = t, \quad m = \frac{t\sin^4\alpha}{4 + \pi\sin\alpha}$$

zu setzen und erhalten den Druck

$$D = \varepsilon\rho\,\frac{t\sin^4\alpha}{4 + \pi\sin\alpha}\,v_x^2,$$

wenn ε einen noch zu bestimmenden Faktor bedeutet. Da D für $t =$ $\qquad \pi\sin\alpha$

$v_\infty = 1$ den Wert $\rho \frac{\pi}{\sin^3\alpha}$ haben muß, so erhalten wir endlich

$$D = \rho \frac{\sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha} v_\infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Der Druckmittelpunkt habe den Wert $z = z_0$ (reell); dann erhält man:

$$\frac{\pi}{\sin^3\alpha} = \int z \sqrt{\left(\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{}}\right)^2 \quad \left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{}}\right)^2 - 1}\; d\varphi,$$

$$\frac{}{\sin^4\alpha}\left(4\cos\alpha - 2\cos^3\alpha - \frac{}{}\cos\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha\right) \quad (18)$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem Mittelpunkt des Brettes und ändert die Dimension wieder proportional $m = \frac{t\sin^4\alpha}{4+\pi\sin\alpha}$ ab, so erhält man: Der Druckmittelpunkt ist von der Mitte der Platte aus um die Strecke

$$\frac{3}{4}\,\frac{\cos\alpha}{4+\pi\sin\alpha}\,t \quad (19)$$

nach der Vorderkante vorgeschoben. Seine Lage ist für $\alpha = 60^0$ in Abb. 103 eingezeichnet.

Vergleicht man die Werte des Widerstandsbeiwertes, wie sie sich aus Gleichung (17) ergeben mit den Werten, die die Messungen an Platten mit kleinerem Seitenverhältnis $\left(\frac{t}{b}\right)$ ergeben haben, so zeigt es sich, daß diese Übereinstimmung eine sehr schlechte ist: die Werte von D bleiben weit unter den Werten der Messung. Der Grund dafür ist der, daß durch unsere Theorie die Druckverhältnisse vor der Platte vielleicht annähernd richtig wiedergegeben werden, aber sicherlich nicht hinter der Platte. Versuche, die mit Rauchfäden angestellt worden sind, zeigen nämlich, daß die Flüssigkeit hinter der Platte im Totwasserraum, die nach der Theorie ruhen müßte, in Wirklichkeit in stark wirbelnder Bewegung begriffen ist. Infolge von Saugwirkung entsteht darum hinter der Platte eine Druckverminderung, und der Drucküberschuß wird größer, als es die Theorie verlangt. Eine ausführliche Erörterung der Streitfragen, die im Anschluß an die Diskontinuitätsflächen entstanden sind, und eine Weiterbildung der Theorie im Sinne der Mechanik zäher Flüssigkeiten hat Lanchester gegeben.

§ 3. Instabilität der Diskontinuitätsflächen. Kármánsche Wirbelstraßen.

Das erheblichste Bedenken, das gegenüber der Möglichkeit der Bildung von Diskontinuitätsflächen geltend gemacht worden ist, ist die Tatsache, daß solche Flächen, die man sich ja immer durch eine gleichmäßig mit parallelen Wirbelfäden bedeckte Schicht ersetzt denken kann, nicht stabil sind. Helmholtz selbst äußert sich darüber so, daß sich die Fläche bei der geringsten Störung in immer enger werdende Spiralwindungen aufrollt, welche weiter und weiter greifende Teile der

Fläche in ihren Wirbel hineinziehen. Es soll hier die Tatsache dieser Instabilität noch kurz erörtert werden.

Längs einer Fläche, die durch $y = 0$ dargestellt ist — wir nehmen wieder an, daß die Vorgänge in allen Ebenen senkrecht zur z-Achse die gleichen sind und betrachten die x, y-Ebene — mögen zwei Flüssigkeiten mit den konstanten Geschwindigkeiten U für $y < 0$ und U' für $y > 0$ aneinander vorbeiströmen. Wir nehmen eine kleine Störung des stationären Zustandes an, durch welche die Ebene $y = 0$ in $y = \eta(x, t)$ übergeht; η soll dabei als unendlich klein angesehen werden. Zum komplexen Potential

$$w = Uz, \text{ für } y < 0 \text{ und } w' = U'z, \text{ für } \quad > 0$$

möge der Störung entsprechend

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1 \text{ für } y < 0 \text{ und } w_1' = \varphi_1' + i\psi_1' \text{ für } y$$

hinzutreten. Die y-Komponente der Geschwindigkeit längs der Diskontinuitätsfläche wird dann, wenn wir uns auf kleine Größen erster Ordnung beschränken, auf der einen Seite: $\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x}$ bzw. $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial}\right)$ so daß wir also für diese Seite erhalten:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_y \tag{20}$$

und entsprechend für die andere Seite:

$$\partial t \quad \partial x \quad \left(\partial\right.$$

Die für nicht stationäre Bewegung geltende Gleichung für den in der Flüssigkeit herrschenden Druck lautet (vgl. S. 41):

$$\rho \qquad \partial t \qquad 2 \left[\left(\partial x\right) \quad \left(\partial y\right)\right. \quad + C(t).$$

Wir haben hier für $\varphi = Ux + \varphi_1$ zu setzen und erhalten also, wenn wir uns wieder auf Glieder erster Ordnung beschränken:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + C(t)$$

für die eine und

$$p = -\ \varphi_2 - U' \ \varphi_1 +$$

für die andere Seite der Diskontinuitätsfläche. Wegen der Stetigkeit des Druckes [vgl. (3)] haben wir also:

$$\partial t \quad - \quad \partial t \quad U \ \partial x \qquad = 0 \tag{21}$$

Auch in dieser Gleichung ist, bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung, $y = 0$ zu setzen. Die Störungen $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ und $w_1' = \varphi_1' + i\psi_1'$ des komplexen Potentials müssen der Laplaceschen Gleichung $\triangle w = 0$ genügen. Wir erhalten also eine mögliche Störung durch den Ansatz

$$w_1 = a e^{ik(x - iy)}, \quad w_1' = a' e^{ik(x + iy)}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \tag{22}$$

wenn a und a' Funktionen von t und k eine reelle Konstante bedeuten. Da die Gleichungen (20), (20′), (21) linear sind, können wir φ_1 und φ_1' durch w_1 und w_1' ersetzen, d. h. wir können zur Erleichterung der Rechnung die Imaginärteile durch die Rechnung mitführen. Dementsprechend machen wir den Ansatz

(23)

wo auch b eine Funktion von t bedeutet. Zur Bestimmung von a, a' und b ergeben dann die Gleichungen (20), (20′), (21)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{db}{dt} + Ubki = ak, \\ &\frac{db}{dt} + U'bki = -a'k, \\ &\frac{da}{dt} - \frac{da'}{dt} + Ukia - U'kia' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$U'^{2}) = 0 \quad (25)$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Ansatz:

$$b = ce^{i\lambda}, \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

wo c und λ Konstanten bedeuten. Während c beliebig bleibt, muß λ der quadratischen Gleichung:

$$U + U') - \frac{1}{2} k$$

genügen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\lambda_1 = + \frac{k}{2}(U - U') - \frac{ki}{2}(U + U'), \quad \lambda_2 = - \qquad J') \quad . \quad (27)$$

Wir erhalten also für die Diskontinuitätsfläche

$$y = \qquad = \Re \quad (28)$$

wo c_1 und c_2 willkürliche Konstanten bedeuten. Da der reelle Teil entweder von λ_1 oder von λ_2 positiv ist, so sieht man, daß sich immer Störungen angeben lassen, die mit wachsendem t nicht wieder zu $y = 0$ zurückführen, sondern mit der Zeit anwachsen. Damit ist die Instabilität der Diskontinuitätsfläche bewiesen.

Eine Folge der Labilität ist, wie schon die obige Bemerkung von Helmholtz zeigt, das Bestreben der Wirbelschicht, sich aufzurollen. Dieses Bestreben der Flüssigkeit wird durch den Versuch durchaus bestätigt. Man findet, daß die Wirbelstärke in einzelnen Punkten konzentriert wird und zwei Straßen von isolierten Wirbelfäden entstehen. Die Entstehung dieser Wirbelstraßen ist, wie überhaupt das Entstehen von Wirbeln, in einer reibungslosen Flüssigkeit unmöglich und wird erst in § 5, wenn wir uns mit dem Vorgang in einer zähen Flüssigkeit und der Prandtlschen Grenzschichtentheorie beschäftigen, verständlich werden. v. Kármán

hat sich nun mit der Frage beschäftigt, wie man sich diese Wirbelstraßen, die man als das Überbleibsel der labilen Wirbelschicht — Diskontinuitätsschicht — anzusehen hat, bei einem symmetrischen Körper, der in Richtung der Symmetrieachse angeströmt wird, vorzustellen hat. Insbesondere hat er die Frage erörtert, ob es stabile Anordnungen solcher isolierter Wirbel gibt. Es ergibt sich das überraschende Resultat, daß nur eine ganz bestimmte Anordnung der beiden Wirbelreihen allen Störungen gegenüber beständig ist, und dieses Resultat stimmt mit der Erfahrung recht gut überein. Wir wollen im folgenden Paragraphen die Kármánsche Theorie dieser Wirbelstraßen erörtern und dabei die Annahme machen, daß keiner der Fäden in seiner Bewegungsfreiheit gehemmt ist, so daß wir es also mit unendlich vielen Freiheitsgraden zu tun haben. Diese Annahme dürfte zweifellos in solchen Entfernungen hinter dem Körper zutreffen, die gegenüber seinen Abmessungen groß sind. In unmittelbarer Nähe des Körpers muß man aber wohl annehmen, daß die Bewegungsfreiheit der Wirbel stärker gehindert ist.

§ 4. Die Stabilität der Wirbelstraßen.

Wir betrachten in der $z = x + iy$-Ebene zwei zur reellen Achse parallele gerade Linien. Auf jeder von ihnen nehmen wir eine unendliche Reihe von Punkten in immer gleichen Abständen l voneinander an, so daß die eine Reihe durch die Werte $z_1 + kl$, die andere durch $z_2 + kl$ gegeben ist, wo k alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft. Durch jeden Punkt jeder Reihe gehe ein gerader Wirbelfaden, der auf der x, y-Ebene senkrecht steht. Entsprechend der Entstehung der beiden Wirbelstraßen aus zwei Diskontinuitätsflächen, längs deren die Flüssigkeit mit gleicher Geschwindigkeit bei der einen oberhalb, bei der anderen unterhalb des ruhenden Totwassers vorbeiströmte, wollen wir annehmen, daß die Zirkulation bei allen Wirbeln der einen Straße $+\Gamma$, bei denen der anderen Straße $-\Gamma$ ist. Das komplexe Potential eines Wirbels mit dem Mittelpunkte z_0 und der Zirkulation Γ ist $-\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln(z_0 - z)$ und also der komplexe Wert der Geschwindigkeit seines Feldes

$2\pi \quad z_0 - z$

Danach ergibt sich, daß der Geschwindigkeitszuwachs, den irgendein Wirbel beider Straßen durch die Felder aller übrigen Wirbel erfährt, derselbe ist und den

$$\frac{\Gamma i}{2\pi}\left[\frac{1}{z_1 - z_2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z_1 - z_2 + kl} - \frac{1}{kl}\right)\right]$$

Wert hat, wo durch den Strich am Summenzeichen angedeutet wird, daß bei der Summation die Zahl $k = 0$ auszuschließen ist. Der Wert dieses Ausdrucks kann leicht angegeben werden. Setzt man nämlich $z_1 - z_2 = \zeta l$, so findet man

$$\frac{\Gamma i}{2\pi l}\left[\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{\zeta + k} - \frac{1}{k}\right)\right] = \frac{i\Gamma}{2l}\operatorname{ctg}\pi\zeta.$$

Wir erhalten danach als Geschwindigkeitszuwachs eines jeden Wirbels den Wert

$$\frac{\Gamma i}{2l} \operatorname{ctg} \pi \frac{z_1 - z_2}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Es zeigt sich also, daß die beiden Wirbelstraßen, wenn ihre Beweglichkeit ungehindert ist, immer im Gleichgewicht sind und mit konstanter Geschwindigkeit parallel verschoben werden. Wenn wir nun aber verlangen, daß diese Bewegung in Richtung der Straßen, d. h. in Richtung der reellen Achse erfolgt, so muß der Ausdruck (29) reell sein.

Dieser Ausdruck kann, wenn

$$z_1 - z_2 = l(\alpha + i\beta) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

gesetzt wird, in die Form

$$\frac{\Gamma}{2l} \frac{\operatorname{tg} \pi\alpha \operatorname{Sin} \pi\beta + i \operatorname{Cof} \pi\beta}{\operatorname{tg} \pi\alpha \operatorname{Cof} \pi\beta + i \operatorname{Sin} \pi\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

gebracht werden. Man erkennt, daß (31) nur dann reell werden kann, wenn α entweder den Wert 0 oder den Wert ½ hat. Es gibt also nur zwei Gleichgewichtslagen, bei denen die beiden Straßen in ihrer Richtung mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten:

$$\text{a) } z_1 - z_2 = l\beta i \text{ oder b) } z_1 - z_2 = \frac{l}{2} + l\beta i.$$

Im Falle a) stehen die Elemente der beiden Wirbelreihen einander paarweise gegenüber, im Falle b) stehen sie „auf Lücke“, d. h. mit halber Teilung (½ l) gegeneinander verschoben.

Bei der Erörterung der Frage nach der Stabilität dieser Gleichgewichtslagen wollen wir zuerst die Aufgabe für eine einzige Wirbelreihe erledigen. Die Straße liege in der reellen Achse. Die Wirbel mögen durch die Punkte $x + kl$ hindurchgehen und jeder möge die Zirkulation Γ besitzen. Diese Wirbelreihe befindet sich in der Gleichgewichtslage in Ruhe, da jedes Element durch das Feld des übrigen den Zuwachs $\frac{\Gamma i}{2-^{l}}$ [illegible] $\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{k}\Big) = 0$ erhält. Durch irgendeine Störung möge das Element $x + kl$ um den Betrag $\zeta_\varkappa$ aus seiner Lage herausgebracht werden. Dann ist der komplexe Wert des Geschwindigkeitszuwachses (Spiegelbild des Geschwindigkeitsvektors) einerseits, wenn $\zeta_\varkappa$ zu $\zeta_\varkappa$ konjugiert komplex ist, $\frac{d\zeta_\varkappa}{dt}$ und andererseits

$$\frac{i\Gamma}{2\pi} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(\varkappa - \lambda) l + \zeta_\varkappa - \zeta_\lambda}.$$

Wenn wir nur die Glieder erster Ordnung der Störungen bei der Entwicklung der Summanden beibehalten, so erhalten wir

$$\frac{d\zeta_\varkappa}{dt} = -\frac{\Gamma i}{2\pi l^2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty}{}' \frac{\zeta_\varkappa - \zeta_\lambda}{(\varkappa - \lambda)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Setzen wir nun: $\zeta_\varkappa = \xi_\varkappa + i\eta_\varkappa$, so erhalten wir aus (32):

$$\frac{d\xi_\varkappa}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi l^2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty}{}' \frac{\eta_\varkappa - \eta_\lambda}{(\varkappa-\lambda)^2}, \quad \frac{d\eta_\varkappa}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi l^2} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\xi_\varkappa - \xi_\lambda}{(\varkappa-\lambda)^2} \quad \ldots\ldots \quad (32\,a)$$

Zur Lösung dieses Systems von unendlich vielen Gleichungen machen wir den Ansatz:

$$\xi_\varkappa = \Re\,(\xi_0 e^{i\varkappa\varphi}), \quad \eta_\varkappa = \Re\,(\eta_0 e^{i\varkappa\varphi}$$

$\Re$ bedeutet dabei wieder den reellen Teil eines Ausdruckes. ξ_0 und η_0 sind jetzt komplexe, mit der Zeit veränderliche Zahlen, während φ einen reellen, von der Zeit unabhängigen Wert bedeutet. D. h. physikalisch: wir suchen Störungen, bei denen jeder Faden dieselbe periodische Bewegung ausführt, wobei er gegenüber dem Vorhergehenden die Phasenverschiebung φ besitzt. Es läßt sich zeigen, worauf wir hier nicht eingehen, daß jede beliebige Störungsbewegung aus solchen Schwingungen (33) entstanden gedacht werden kann. Die Wirbelstraße wird also dann und nur dann stabil sein, wenn bei keinem Werte von φ die Störungen (33) mit der Zeit zunehmen. Wir erhalten, wenn wir die imaginären Teile von $\xi_\varkappa$ und $\eta_\varkappa$, was ja bei linearen Gleichungen erlaubt ist, durch die Rechnung mitführen, an Stelle der unendlich vielen Gleichungen (32) nur die beiden:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \eta_0 \frac{\Gamma}{\pi l^2} K(\varphi),$$

$$\frac{d\eta_0}{dt} = \xi_0 \frac{K}{\pi l^2} K(\varphi), \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

wobei sich mit Benutzung bekannter trigonometrischer Reihen

$$K(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1 - e^{\lambda i\varphi}}{\lambda^2} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\lambda\varphi}{\lambda^2} = \frac{\pi}{2}\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2, \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad . \ (35)$$

ergibt. Aus (34) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= \frac{\Gamma^2}{\pi l^2}\left[\frac{\pi}{2}\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2\right]^2 \xi_0, \\ \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= \frac{\Gamma^2}{\pi^2 l^2}\left[\frac{\pi}{2}\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2\right]^2 \eta_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Wird $a = \frac{1}{\pi l}$ [illegible] $^2]$ gesetzt, so erscheint danach ξ_0 sowohl wie η_0 in der Form $c_1 e^{+at} + c_2 e^{-}$ [illegible] Es lassen sich also bei jedem beliebigen φ Störungen angeben, bei denen sich die Wirbel mit wachsendem t immer weiter aus der Gleichgewichtslage entfernen. Eine einzige Wirbelstraße muß also immer unstabil sein. Da man eine Diskontinuitätsfläche immer als eine Wirbelstraße ansehen kann, bei der die Wirbel sehr nahe aneinander liegen, so ist damit die Instabilität einer solchen Fläche von neuem gezeigt.

Wir gehen nunmehr zu den beiden Wirbelstraßen über, verlegen in der z-Ebene die eine Straße in die reelle Achse:

$$kl, \; l \text{ reell}, \; k = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \; \pm 3 \ldots,$$

die zweite parallel dazu im Abstande h, also im ersten Falle, wo die Wirbel einander paarweise gegenüberstehen,

$$kl + i\,h.$$

Die Störungen mögen nun die Wirbel der ersten Reihe um die Werte ζ_{1k}, die der zweiten um ζ_{2k} aus der Gleichgewichtslage herausbringen. Dann erhält man entsprechend (32)

$$\frac{d\zeta_{1\varkappa}}{dt} = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\zeta_{1\varkappa}-\zeta_{1\lambda}}{(\varkappa-\lambda)^2 l^2} + \frac{\Gamma i}{2\pi}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\zeta_{1\varkappa}-\zeta_{2\lambda}}{[(\varkappa-\lambda)l - i}$$

$$\frac{d\zeta_{2\varkappa}}{dt} = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\zeta_{2\varkappa}-\zeta_{1\lambda}}{[(\varkappa-\lambda)\,l + hi]^2} + \frac{\Gamma i}{2\pi}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\zeta_{2\varkappa}}{(\varkappa -}$$

Wir zerlegen nun wieder $\zeta_{1\varkappa} = \xi_{1\varkappa} + i\eta_{1\varkappa}$, $\zeta_{2\varkappa} = \xi_{2\varkappa} + i\eta_{2\varkappa}$, und machen zur Lösung der Gleichungen (37) und (38) den Ansatz:

$$\xi_{1\varkappa} = \Re\,(\xi_1 e^{\varkappa i\varphi}),\ \eta_{1\varkappa} = \Re\,(\eta_1 e^{\varkappa i\varphi}),\ \xi_{2\varkappa} = \Re\,(\xi_2 e^{\varkappa i\varphi}),\ \eta_{2\varkappa} = \Re\,(\eta_2 e^{\varkappa i\varphi}) \quad (39)$$

Dann erhalten wir, wenn wieder die imaginären Teile dieser Ausdrücke durch die Rechnung mitgeführt werden, an Stelle der unendlich vielen Gleichungen (37) und (38)

$$\frac{2\pi}{\Gamma}\frac{d\xi_1}{dt} = A(\varphi)\,\eta_1 - i\,B(\varphi)\,\xi_2 + C(\varphi)\,\eta_2, \quad \ldots \quad (40)$$

$$\frac{2\pi}{\Gamma}\frac{d\eta_1}{dt} = A(\varphi)\,\xi_1 + i\,B(\varphi)\,\eta_2 + C(\varphi)\,\xi_2, \quad \ldots \quad (41)$$

$$\frac{2\pi}{\Gamma}\frac{d\xi_2}{dt} = -A(\varphi)\,\eta_2 - i\,B(\varphi)\,\xi_1 - C(\varphi)\,\eta_1, \quad \ldots \quad (42)$$

$$\frac{2\pi}{\Gamma}\frac{d\eta_2}{dt} = -A(\varphi)\,\xi_2 + i\,B(\varphi)\,\eta_1 - C(\varphi)\,\xi_1. \quad \ldots \quad (43)$$

Dabei ergeben sich, wiederum mit Summation trigonometrischer Reihen, für A, B, C die Ausdrücke:

$$\infty \quad 2\,7\,2 - h^2 \quad \pi\varphi \quad \frac{1}{2}\,\frac{\varphi^2}{l^2} + \frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{h\pi}{l}}, \quad (44)$$

$$\frac{\mathfrak{f}\,(\pi-\varphi)\,\frac{h}{l}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{l}} - \frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\varphi}{l}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{h\pi}{l}}, \quad \ldots \quad (45)$$

$$2\sum^{\infty}\frac{(\lambda^2 l^2 - h^2)\cos\lambda\varphi}{(\lambda^2 l^2 + h^2)^2} = -\frac{\pi\varphi}{l^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,(\pi-\varphi)\,\frac{h}{l}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{l}} - \frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{h\varphi}{l}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{h\pi}{l}}$$

Die Summation dieser trigonometrischen Reihen gilt für das Intervall $0 < \varphi < 2\pi$. Für die drei Funktionen $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ gilt die Beziehung:

$$A^2 + B^2 - C^2 = \frac{4}{l^4}[K(\varphi)]^2 = \frac{4}{l^4}\left|\frac{\pi\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4}\right|^2 \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

Aus den Gleichungen (40) bis (43) folgt, daß die vier Funktionen ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 einer Differentialgleichung 4. Ordnung mit (in t) konstanten Koeffizienten genügen. Diese Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen zweiter Ordnung. Es genügen nämlich $\xi_1 + \xi_2 = p_1$ und $\eta_1 - \eta_2 = p_2$ der Gleichung:

$$\frac{p}{dt^2} \qquad (48)$$

und ξ_1 $+ \eta_2 = q_2$ der Gleichung

$$(49)$$

Macht man den Ansatz $p = c e^{\frac{1}{2\pi} r t}$, $q = d e^{2\pi}$, so ergeben sich zur Bestimmung von r und ϱ die Gleichungen:

$$(r + iB)^2 = A^2 - C^2, \quad (\varrho - iB)^2 = A^2 - C^2.$$

Sollen p und q, also auch ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 mit wachsendem t nicht anwachsen, so dürfen r und ϱ keinen positiven reellen Teil haben; das ist aber nur möglich, wenn bei beliebigem φ

$$C^2 > A^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

ist. Nun zeigen aber (44) und (46) für $\varphi = \pi$

1

l

also offenbar $|A(\pi)| > |C(\pi)|$. Wir sehen also:

Wenn sich die Wirbel der beiden Straßen paarweise gegenüberstehen, so ist diese Anordnung instabil.

Gehen wir nun zu der Anordnung über, bei der die Wirbel der beiden Reihen „auf Lücke" stehen, also um die halbe Teilung gegeneinander verschoben sind, so daß sie den Punkten

$$\frac{1}{2} \quad . \quad (51)$$

angehören, so können wir die vorhergehende Betrachtung beibehalten, wenn wir an Stelle von (39)

$$\xi_{1\varkappa} = \Re(\xi_1 e^{\varkappa i\varphi}), \quad \eta_{1\varkappa} = \Re(\eta_1 e^{\varkappa i\varphi}), \quad \xi_{2\varkappa} = \Re\left(\eta_1 e^{\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)i\varphi}\right), \quad \eta_{2\varkappa} = \Re\left(\eta_2 e^{\left(\varkappa-\frac{1}{2}\right)i\varphi}\right) \quad (52)$$

setzen. Die Gleichungen (40) bis (43) bleiben ungeändert bestehen, wenn wir nur unter den Funktionen $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ jetzt die folgenden Ausdrücke verstehen, bei denen die Summation der Reihen auch wieder für $0 < \varphi < 2\pi$ gilt:

$$A(\varphi) = 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1-\cos\lambda\varphi}{\lambda^2 l^2} - 2\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2 - h^2}{\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2 + h^2\right]^2} = \frac{\pi\varphi}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{l^2} - \frac{\pi^2}{l^2}\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{h\pi}{l}}, \quad (53)$$

$$B(\varphi) = 4\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^1 l h \sin\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2 + h^2\right]^2} = \frac{\pi\varphi}{l^2}\frac{\mathfrak{Sin}\,(\pi-\varphi)\frac{h}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{h\pi}{l}} + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\varphi}{l}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{h\pi}{l}}, \quad \ldots \quad (54)$$

$$C(\varphi) = 2\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2 - h^2\right]\cos\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2 + h^2\right]^2} = -\frac{\pi\varphi}{l^2}\frac{\mathfrak{Cof}\,(\pi-\varphi)\frac{h}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{h\pi}{l}} + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{h\varphi}{l}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{h\pi}{l}}. \quad (55)$$

Auch hier gilt die Beziehung

$$A^2 + B^2 - C^2 = \frac{4}{l^4}\left[\frac{\pi\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Auch diesmal erhalten wir dann und nur dann keine Instabilität, wenn für beliebige Werte von φ

$$C^2 > A^2$$

ist. Nach (56) wird:

$$C^2 - A^2 = \left[B + \frac{1}{l^2}\left(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right]\left[B - \frac{1}{l^2}\left(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

Aus (54) folgt, daß B für $0 < \varphi < \pi$ positiv ist. Da aber

$$B(\pi-\varphi) = B(\pi+\varphi) = -\frac{\pi\varphi}{l^2}\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\varphi}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{h\pi}{l}} + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{l}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{h\varphi}{l}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{h\pi}{l}},$$

so ist $B(\varphi)$ für alle Werte $0 < \varphi < 2\pi$ positiv und hat bei $\varphi = \pi$ seinen größten Wert $\frac{\pi^2}{l^2}\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{l}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{h\pi}{l}}$. Auch $\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{l^2}$ hat für $\varphi = \pi$ seinen größten Wert $\frac{\pi^2}{2}$. Der größte Wert aber, den $\pi^2\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{l}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{h\pi}{l}}$ bei Veränderung von $\frac{h}{l}$ annehmen kann, ist gerade erst gleich $\frac{\pi^2}{2}$. Wir erhalten also die Bedingung

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{l}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{h\pi}{l}} = \frac{1}{2}, \text{ oder } \mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{l} = 1, \ \mathfrak{Cof}\,\frac{h\pi}{l} = \sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Aus (58) folgt

$$\frac{h\pi}{l} = 0{,}8814; \ \frac{h}{l} = 0{,}2806. \tag{59}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so zeigt es sich, daß nunmehr $B - \frac{1}{l^2}\left(\pi\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2\right)$ und also auch $C^2 - A^2$ für alle Werte von φ positiv bleibt. Setzt man nämlich

$$\pi - \varphi = \alpha\pi$$

so wird

$$B - \frac{1}{l^2}\left(\pi\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2\right) = \frac{\pi^2}{l^2}\alpha^2(1 - \alpha^2)(0{,}0709 + 0{,}0028\,\alpha^2 + \ldots),$$

wo in der letzten Klammer nur positive Glieder stehen, so daß der Ausdruck also für $-1 < \alpha < +1$ immer positiv bleibt. Bei allen anderen Werten von $\frac{h}{l}$ wird in einer mehr oder weniger großen Umgebung von $\varphi = \pi$, $C^2 - A^2$ negativ, so daß also solche Anordnungen labil sein müssen.

Es gibt also eine und nur eine Zahl: $\frac{h}{l} = 0{,}2806$ bei der die beiden Wirbelstraßen nicht labil sind.

Auch bei dieser Anordnung „auf Lücke" mit ganz bestimmter Teilung handelt es sich, wie ausdrücklich hervorgehoben sei, nicht eigentlich um ein stabiles, sondern vielmehr um indifferentes Gleichgewicht: die Störungen nehmen bei keinem Werte von φ mit der Zeit zu, klingen aber bei $\varphi = \pi$ auch nicht auf Null ab. Im Übrigen macht der Fall keine Schwierigkeit; zwar fallen dann wegen $A = C = 0$ die Wurzeln der quadratischen Gleichungen, die zu (48) und (49) gehören zusammen, aber zu Folge der Gleichungen (40) bis (43) genügen jetzt $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ alle der Schwingungsgleichung $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{B^2\Gamma^2}{4\pi^2}\xi = 0$.

Wir sehen also, daß bei der einzig möglichen beständigen Anordnung der Wirbel die Fäden in bestimmten Zeitabständen abwechselnd an beiden Seiten des Körpers entstehen müssen; eine Folge, dieser unsymmetrischen Entstehungsweise ist die, daß hinter dem Körper eine periodische pendelnde Bewegung entstehen muß. Eine solche pendelnde Bewegung ist in der Tat aus photographischen Aufnahmen, die in den Versuchsanstalten gemacht worden sind, zu ersehen. Irgendwelche Ansätze für eine Theorie des Überganges von der stetigen Diskontinuitätsfläche zu der unstetigen Wirbelanordnung fehlen bis jetzt noch vollständig. Es wurde hier die Annahme eines unendlich breiten, symmetrischen Körpers gemacht. Für den Fall des endlichen Körpers liegen noch keinerlei Ansätze zu einer Theorie vor. v. Kármán spricht in seiner Arbeit die Vermutung aus, daß für einen endlichen Körper an Stelle des unstetigen, aus einzelnen Wirbeln bestehenden Bewegungsbildes höchst wahrscheinlich stetige, schraubenförmige Wirbelfäden als beständige Anordnung entstehen werden.

§ 5. Berechnung des Widerstandes.

Wir wollen nun mit v. Kármán annehmen, daß hinter dem Körper in einer Entfernung, die gegenüber seinen Abmessungen groß ist, die Strömung durch die

im vorigen Paragraphen charakterisierte nicht labile Wirbelanordnung gegeben ist, daß dagegen die Flüssigkeit in hinreichender Entfernung vor dem sich mit der Geschwindigkeit v_∞ bewegenden Körper in Ruhe ist. Bei dieser Annahme läßt sich die Widerstandskraft berechnen.

Nach der Formel (29) des vorigen Paragraphen schreitet die Wirbelanordnung mit einer konstanten Geschwindigkeit u in ihrer Richtung fort. Da jetzt $z_1 - z_2 = \frac{l}{2} + ih$ ist, wird

$$u = \frac{i\Gamma}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}\left(\frac{l}{2} + ih\right) = \frac{\Gamma}{2l} \mathfrak{Tg} \frac{h\pi}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (60)$$

Wir wollen nun unserer Betrachtung ein Koordinatensystem zugrunde legen, das diese Bewegung mitmacht, so daß die Wirbel ihm gegenüber in Ruhe sind. Vor dem Körper herrscht dann eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit $-u$, und der Körper schreitet gegen das Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit $v_\infty - u$ fort. Die x-Achse werde in die Mittellinie der beiden Wirbelreihen gelegt, die y-Achse so, daß ein Wirbelpaar die Koordinaten $\left(+\frac{l}{4}, \frac{h}{2}\right)$ und $\left(-\frac{l}{4}, \frac{h}{2}\right)$ erhält. Dann wird das komplexe Potential der Strömung vor dem Körper

$$w = -uz \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

und in hinreichend großer Entfernung hinter dem Körper, wenn $z_0 = \frac{l}{4} + \frac{ih}{2}$ gesetzt wird:

$$w = -uz + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\prod\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (z_0 + \lambda l - z)}{\prod\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (z_0 + \lambda l + z)}$$

oder

$$w = -uz + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\frac{z_0 - z}{l} \prod\limits_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_0 - z}{\lambda l}\right)^2}{\frac{z_0 + z}{l} \prod\limits_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_0 + z}{\lambda l}\right)^2},$$

d. h. aber:

$$w = -uz + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin (z_0 - z)\frac{\pi}{l}}{\sin (z_0 + z)\frac{\pi}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62)$$

Zur Bestimmung der Kraft, welche auf die Breite 1 des Körpers wirkt, wollen wir wieder den Impulssatz der Mechanik (vgl. S. 44) anwenden. Zu dem Zwecke grenzen wir um den Körper als „Kontrollfläche" einen Quader von der Breite 1 ab, dessen Vorderansicht in der xy-Ebene (vgl. Abb. 104) durch vier Gerade, $x = \xi_1$, $x = -\xi_2$, $y = \pm\eta$, gegeben ist. Die Werte ξ_1 und ξ_2 sind hinreichend groß zu denken, η werden wir gegen unendlich gehen lassen. ξ_1 ist überdies so gewählt, daß die Ebene $x = \xi_1$ nicht gerade durch einen Wirbelfaden hindurchgeht, und daß im Innern

der Kontrollfläche gleichviel Wirbel mit dem einen und dem entgegengesetzten Drehsinn vorhanden sind.

a) Wäre der Zustand stationär, würden also mit der Zeit keine neuen Wirbel entstehen, so wäre nach dem Ergebnis von Kapitel II § 4 das Spiegelbild des auf den Körper wirkenden Kraftvektors $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{P}' = \frac{\rho i}{2}\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$ gegeben, wo die Integration über die Kontrollfläche zu erstrecken ist.

b) Wir haben aber zu bedenken, daß in der Zeit, in welcher der Körper um die Strecke l fortschreitet, jedesmal ein neues Wirbelpaar entsteht. Dadurch bekommen wir im Innern der Kontrollfläche in der Zeiteinheit einen Impulszuwachs, der zu dem Ausdruck für die Kraft hinzugefügt werden muß, wie aus den Betrachtungen von II § 4 hervorgeht.

a) Zur Berechnung des Integrals $\frac{\rho i}{2}\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$ setzen wir für das komplexe Potential

$$w = -uz + w_1.$$

In großer Entfernung hinter dem Körper hat w_1 den aus (62) zu entnehmenden Wert und dementsprechend

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{i\Gamma}{l}\,\frac{\sin 2z_0\frac{\pi}{l}}{\cos 2z_0\frac{\pi}{l} - \cos 2z\frac{\pi}{l}},$$

Abb. 104.

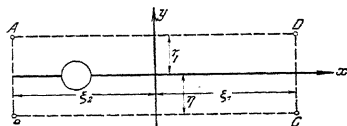
während w_1 im übrigen Teil der Ebene unbekannt ist. Da aber die Gesamtzirkulation im Innern der Kontrollfläche den Wert Null hat, also $\int\frac{dw}{dz}dz$ und also auch $\int\frac{dw_1}{dz}dz$ über diese Fläche erstreckt verschwinden muß, und da weiter für die Konstante u das Integral $\int u^2 dz$ ebenfalls verschwindet, so kann $\int\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$ durch

$\ldots)^2 \ldots z$ ersetzt werden. Längs BC und DA geht aber, wenn η unendlich $\frac{dw_1}{dz}$ gegen Null, man sieht also, daß von dem geschlossenen Integral $\int\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 dz$ nur

$$\int_{-i\eta}^{+i\eta}\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 dz \quad \text{mit } \eta \to \infty$$

zur Berechnung übrig bleibt.

Zur Berechnung dieses Integrals formen wir mit Berücksichtigung von (60) $\left(\frac{dw_1}{dz}\right.$ identisch in folgender Weise um:

$$\ldots_1\Big)^2 = \ldots\Gamma^2\; d \ldots \frac{\sin 2\pi \ldots}{\cos 2\pi\frac{z_0}{l} - \cos 2\pi \ldots} \ldots \frac{dw_1}{dz}.$$

Dadurch erhalten wir also für das Integral den Wert ($z = x + i\eta$)

$$\left[\frac{\rho\, i}{2}\,\frac{\Gamma^2}{2\pi l}\,\frac{\sin 2\pi \frac{z}{l}}{\cos 2\pi \frac{z_0}{l} - \cos 2\pi \frac{z}{l}} \;.\; \Gamma i \ln \frac{\sin (z_0 - z)\frac{\pi}{l}}{\sin (z_0 + z)\frac{\pi}{l}}\right]_{\eta = -\infty}^{\eta = +\infty}$$

Zur Berechnung des Widerstandes interessiert uns nur die x-Komponente des Kraftvektors, also der reelle Teil dieses Ausdruckes.

Wir erhalten für ihn:

$$\rho \frac{\Gamma^2}{2\pi l} - \rho \frac{\Gamma}{l}\, u h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

b) Sei T die Zeit, in welcher der Körper um die Strecke l fortschreitet. In dieser Zeit bildet sich gerade ein neues Wirbelpaar, dessen Impuls für das Innere der Kontrollfläche als Zuwachs berechnet werden muß. Bedenkt man, daß nach Ablauf der Zeit T das Bild der Strömung wieder genau dasselbe ist wie vorher, so wird der Impuls gerade ebenso groß sein wie der in einem Quader weit hinter dem Körper von der Breite 1 und der Länge l, dessen Vorderansicht durch die Geraden $y = \pm \eta$ abgegrenzt wird. Auch hier interessiert uns nur die Komponente des Impulses in Richtung der x-Achse. Diese Komponente hat offenbar den Wert

$$\Re \rho \iint \frac{d w_1}{d z}\, dx\, dy,$$

wo die Integration über die Vorderansicht des Quaders zu erstrecken ist und wieder den reellen Teil des Ausdruckes bedeutet. Wir erhalten also

$$\Re \rho \int_0^l dx\, \frac{1}{i} \Big[w_1 \Big]_{x - i\eta}^{x + i\eta}.$$

Dabei ist zu beachten, daß ja $\frac{d w_1}{d z}$ das Spiegelbild des Geschwindigkeitsvektors ist, darin also $+i$ mit $-i$ vertauscht werden muß. Wir erhalten danach in der Zeit T als Komponente des Impulses in Richtung der x-Achse, wenn wieder $\eta \to \infty$ geht,

$$\rho\, \Gamma h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

Der Körper hat die Strecke l mit der Geschwindigkeit $v_\infty - u$ zurückgelegt; wir erhalten also für die Zeiteinheit im Mittel die Impulszunahme

$$\rho\, \Gamma (v_\infty - u) \frac{h}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Aus (63) und (65) setzt sich dann der Widerstand des Körpers in der Form

$$W = \rho\, \Gamma (v_\infty - 2u) \frac{h}{l} + \rho \frac{\Gamma^2}{2\pi l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

zusammen. In diesem Ausdruck für W haben wir nun einerseits nach (60) den

Wert $\Gamma = u \cdot 2\,l\,\mathfrak{C}\mathrm{tg}\,\frac{h\pi}{l}$ zu setzen und andererseits aus (58) und (59) $\frac{h}{l} = 0{,}2806$, $\frac{h\pi}{l} = \sqrt{2}$ einzuführen. Dann erhält man

$$W = \qquad 0{,}7936\,\frac{u}{v_\infty} - 0{,}3141\left(\frac{u}{v_\infty}\right)^2\Big].$$

Führt man eine geeignet gewählte Längenabmessung d des Körperprofils ein, und setzt für den Widerstand der Breite 1

$$W = \frac{1}{2}\,c_w\,\rho\,d\,v_\infty^{\,2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

so erhält man für den Beiwert c_w den Ausdruck

Um die Ergebnisse der Stabilitätsbetrachtung und die Widerstandsformel (67), (68) durch den Versuch zu bestätigen, hat v. Kármán zusammen mit Rubach einige Beobachtungen angestellt. Einerseits wurde das Stromlinienbild

$$\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \qquad \sin\,(z_0 + z)\,\frac{\pi}{l}$$

durch Rechnung bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. 105 wiedergegeben. Andererseits wurde das Strömungsbild hinter einem durch ruhendes Wasser geschleppten

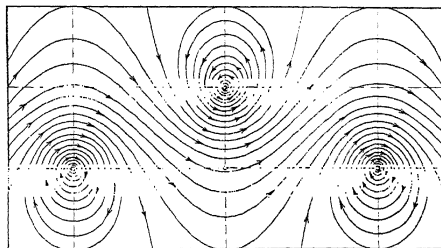



Abb. 105. Kármánsche Wirbelstraße.

Körper (schmale Platte, Kreiszylinder) durch Bestreuung der Wasseroberfläche mit Lykopodiumsamen sichtbar gemacht und photographisch festgehalten. Das Ergebnis eines dieser Versuche ist in Abb. 106 wiedergegeben. Die regelmäßig abwechselnde Anordnung der Wirbelfäden ist dabei deutlich zu erkennen.

Für den Kreiszylinder von 1,5 cm Durchmesser ergab sich, wenn man über die ersten zwei oder drei Wirbelpaare hinausgegangen war:

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ l &= 6{,}4\ \text{cm}, \end{aligned} \quad \text{also}\ \frac{h}{l} = 0{,}282.$$

Für eine Platte von 1,75 cm Tiefe fand sich

$$\begin{matrix} h = 3{,}0 \text{ cm}, \\ l = 9{,}8 \text{ cm}, \end{matrix} \quad \text{also } \frac{h}{l} = 0{,}306.$$

Die Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert 0,281 ist also, besonders für den Kreiszylinder, eine recht gute.

Die Widerstandsziffer (68) ist durch zwei Verhältniszahlen

$$\frac{u}{v_\infty} = \frac{\text{Geschwindigkeit des Wirbelsystems}}{\text{Geschwindigkeit des Körpers}}, \quad \frac{l}{d} = \frac{\text{Teilung der Wirbelreihen}}{\text{Längenmaß des Körpers}}$$

ausgedrückt. Diese beiden Zahlen können im Bereich der Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes nur von der Körperform abhängen, können sich also

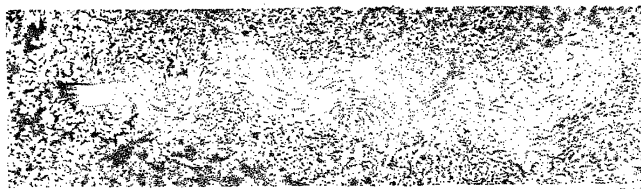



Abb. 106. Aufnahme von Wirbelstraßen nach v. Kármán und Rubach.

bei ähnlicher Vergrößerung des Körpers und bei Veränderung der Geschwindigkeit nicht ändern. Die Zahl $\frac{l}{d}$ kann direkt der photographischen Aufnahme entnommen werden, während $\frac{u}{v_\infty}$ aus der Anzahl der entstehenden Wirbel gewonnen wird. In der folgenden Tabelle findet man für die Platte und den Kreiszylinder die Messungsergebnisse und den daraus nach (68) berechneten Widerstandsbeiwert zusammengestellt. Der Widerstandsbeiwert ist überdies mit den Messungen von Foeppl für eine lange Platte und einen langen Zylinder verglichen (der Klammerwert bei der Platte ist einer Eiffelschen Messung entnommen).

	I	II	III	IV	V
	$\frac{u}{v_\infty}$	$\frac{l}{d}$	$\frac{h}{d}$	c_w berechnet	c_w gemessen
Platte	0,20	5,6	1,57	1,61	1,44 (1,56)
Zylinder . . .	0,14	4,3	1,21	0,91	0,90

Die Übereinstimmung der c_w-Werte ist sehr gut beim Zylinder, befriedigend bei der Platte, besonders wenn man die Eiffelsche Zahl nimmt. In Spalte III ist noch die Zahl $\frac{h}{d}$ hinzugefügt, welche zeigt, daß die Entfernung der beiden Wirbelstraßen größer als die Plattentiefe bzw. als der Zylinderdurchmesser wird.

§ 6. Prandtlsche Grenzschicht.

Die Theorie der Luftkraft, wie wir sie bisher aufgebaut haben, enthält noch eine Schwierigkeit, welche mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht gelöst werden kann. In einer Potentialströmung ohne Wirbel (I 8) wird überhaupt keine Kraft durch eine Strömung auf einen Körper ausgeübt. Nach den Helmholtzschen Sätzen über Wirbel können in einer reibungslosen Flüssigkeit Wirbel nicht neu entstehen (III 2). Die Theorie der reibungslosen Flüssigkeit gibt uns daher keine Möglichkeit die Entstehung der Zirkulation, die für das Verständnis des Auftriebs unbedingt erforderlich war, zu erklären. Wir müssen daher annehmen, daß die Zähigkeit oder innere Reibung einer Flüssigkeit, von der bisher abgesehen worden ist, doch irgendwie eine wesentliche Rolle bei der Theorie der Luftkraft spielen muß.

Wir nehmen also jetzt an, daß die Flüssigkeitsteilchen einer Formänderung einen Widerstand entgegensetzen. Dabei können wir auf den § 2 der Einleitung verweisen, wo der Ansatz gemacht wurde, daß zwei Flüssigkeitsschichten, die mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander vorbeigleiten, aufeinander Schubkräfte ausüben. Wir haben für die Schubkraft pro Flächeneinheit dort den Ansatz

$$\mu \frac{dv}{dy} \tag{69}$$

kennengelernt, wenn dv der infinitesimale Geschwindigkeitsunterschied und dy die Entfernung der Schichten ist. μ heißt Reibungskoeffizient und $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet, der kinematische Reibungskoeffizient. Für Luft bei 0° C und 760 mm Luftdruck ist $\mu = 0{,}000170\ \mathrm{cm}^{-1}$ gr-Masse s^{-1} (C. G. S. Einheiten) $= 1{,}74 \cdot 10^{-}\ \frac{kg\ s}{}$ $\nu = 0{,}132\ cm^2$

Bei Berücksichtigung der inneren Reibung wird der Druck nicht mehr auf jeder Fläche in der Flüssigkeit senkrecht stehen. Es läßt sich aber zeigen, daß durch jeden Punkt der Flüssigkeit drei aufeinander senkrechte Ebenen hindurchgehen, an denen keine Tangentialkomponenten vorhanden sind. Bezeichnen wir mit p_1, p_2, p_3 die Drucke auf diese drei Flächen, so läßt sich weiter zeigen, daß das arithmetische Mittel der drei Normalkomponenten zu irgendwelchen drei aufeinander senkrechten Ebenen denselben Wert $\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}$ hat. Diesen Mittelwert des Druckes, der nun eine bestimmte Funktion des Ortes in der Flüssigkeitist, bezeichnen wir mit p.

Die Differentialgleichungen der Bewegung mit Berücksichtigung der inneren Reibung sind zuerst von Stokes aufgestellt worden. Sie lauten für die inkompressible Flüssigkeit ohne äußere Kräfte

$$\rho \frac{dv_x}{dt} \qquad \partial x \qquad \rho \quad \frac{}{dt}{}^{y} = \qquad \partial y \qquad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z \quad . \quad . \quad . \tag{70}$$

wenn wieder $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ der Laplacesche Differentialausdruck ist;

dazu kommt wieder die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

In vektorieller Form können diese Gleichungen geschrieben werden:

$$\rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \triangle \mathfrak{v}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0.$$

Sind wieder c_x, c_y, c_z die Komponenten des Vektors $\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}$ (III 2), so lassen sich aus (70) die Gleichungen

$$d c_x \qquad c_x \, \partial v_x$$

und analog für c_y und c_z herleiten.

Was nun die Grenzbedingung für die Oberfläche eines in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers anbetrifft, so haben die Versuche ergeben, daß ein Gleiten der Flüssigkeit an einem festen Körper eine Schubkraft nötig machen würde, die praktisch als unendlich groß gegenüber den Schubkräften benachbarter Flüssigkeitsschichten gegeneinander wäre. Wir können also annehmen, daß ein Gleiten der Flüssigkeit an einem festen Körper unmöglich ist und erhalten als Grenzbedingung für einen ruhenden in einen Flüssigkeitsstrom eingetauchten Körper

$$v_x = v_y = v_z = 0$$

Die allgemeine Lösung der Stokesschen Gleichungen (70), (71) bereitet bisher unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten. Sie ist nur in einzelnen speziellen Fällen, von denen einige in der Einleitung S. 8 und 9 hervorgehoben wurden, möglich geworden. Wir folgen daher dem Gedanken von Prandtl, der davon Gebrauch macht, daß der Reibungskoeffizient μ in Luft ein sehr kleiner Wert ist. Entsprechend unserem Ansatz (69) wird sich daher die Reibung nur da bemerkbar machen, wo die Geschwindigkeit von Punkt zu Punkt stark veränderlich ist. Das kommt aber praktisch nur dort vor, wo die Flüssigkeit mit festen Körpern in Berührung kommt. Wir wollen also auch weiterhin in der freien Flüssigkeit die Wirkung der Reibung vernachlässigen. Dagegen wollen wir um den eingetauchten Körper herum eine dünne Flüssigkeitsschicht, die sog. Grenzschicht, abgrenzen. In dieser Schicht ändert sich in kleinem Abstand die Geschwindigkeit vom Werte Null bis zu dem großen Werte, den sie in der freien Strömung hat. Dort wird also bei noch so kleinen Werten von μ der Einfluß der Reibung von entscheidender Bedeutung werden. Bei der Behandlung der Flüssigkeitsströmung haben wir also einerseits den unendlich ausgedehnten freien Flüssigkeitsstrom, in welchem nach wie vor die Eulerschen Gleichungen mit allen ihren Folgerungen bestehen bleiben und andererseits die sehr schmale Grenzschicht mit großem Geschwindigkeitsgefälle, in der die Reibungsglieder berücksichtigt werden müssen. Wir werden aber sehen, daß diese beiden Gebiete fortwährend aufeinander einwirken, indem die freie Flüssigkeit die Druckverhältnisse in der Grenzschicht regelt und die Grenzschicht ihrerseits fortwährend die Strömung, hauptsächlich hinter dem Körper, dadurch umgestaltet, daß von ihr aus Wirbel in den freien Flüssigkeitsraum hinausgehen.

Zur Behandlung des Vorganges in der Grenzschicht beschränken wir uns wieder auf zweidimensionale Vorgänge, d. h. wir nehmen an, daß das Strömungsbild in allen Ebenen senkrecht zu einer Geraden (z-Achse) dasselbe ist. Wir führen überdies ein krummliniges Koordinatensystem ein, in dem wir (Abb. 107) die x-Achse in die Körperoberfläche verlegen und die y-Achse senkrecht dazu (positiv in die Flüssigkeit hinein) wählen. Bei der Dünne der Grenzschicht können wir dann bei der y-Koordinate von einer Krümmung absehen.

Abb. 107.

An die Stelle der Gleichungen (70) und (71) treten in den neuen Koordinaten, wenn r den Krümmungsradius der x-Achse bedeutet, die folgenden:

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{r} v_x v_y\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad 2\ \partial v_y \quad 1 \quad 1\ dr\right.$$

$$\frac{v_y}{x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + 1 \qquad \partial p \qquad \partial x^2 \quad \partial y^2 + \frac{}{r\ \partial x} \quad \frac{1}{r}\frac{y}{\partial y} \quad 1\ dr$$

$$\partial v_x + \frac{\partial v_y}{} - \ldots v_y = 0.$$

Da in der Grenzschicht y nur sehr kleine Werte annimmt, so setzen wir

(73)

wo ε eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist; nun kann η in der Grenzschicht jeden Wert von Null bis ∞ annehmen, so daß $\eta = \infty$ das Ende der Grenzschicht angibt. Weiter bedenken wir, daß in großer Nähe des Körpers bei der reibungslosen Flüssigkeitsbewegung v_y noch einen sehr kleinen Wert haben wird, während v_x in der Grenzschicht von Null bis zu dem großen Werte der freien Strömung geht. Entsprechend der dritten der Gleichungen (72) (Kontinuitätsgleichung) machen wir daher den Ansatz

$$v_y = \varepsilon v_\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73a)$$

während x und v_x unverändert bleiben. Die Gleichungen (72) gehen mit dieser Bezeichnung über in

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial v_x}{} - \ldots v_x v_\eta \,| = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \partial x^2 \qquad \varepsilon r \quad \varepsilon\, dr \quad r\ \partial x \quad r^2 \quad r^2\, dx$$

$$\rho \left[\varepsilon \frac{\partial v_\eta}{\partial t} + \varepsilon v_x \frac{\partial v_\eta}{\partial x} \quad v_\eta \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \quad \frac{1}{r} v_x^2\right] = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \eta} + \mu \left[\varepsilon \quad \partial x^2\right.$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon}{r^2} v_\eta - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon}{r} v_\eta = 0.$$

In diesen Gleichungen denken wir uns nun alle in der Grenzschicht veränderlichen Größen nach Potenzen von ε entwickelt. Für den Reibungskoeffizienten μ setzen wir $\mu = \mu_1 \varepsilon^\lambda$. Sammeln wir dann in erster Näherung in allen drei Gleichungen die Glieder mit niedrigster Potenz von ε, so sehen wir folgendes: Damit die Reibung in dieser ersten Näherung einen Beitrag liefert, darf λ nicht größer als 2 sein. Aber auch $\lambda < 2$ kommt nicht in Betracht, da dann die erste Gleichung $\frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} = 0$ ergeben würde, was unmöglich ist, weil sonst v_x Null wäre oder für $\eta = \infty$ einen unendlich großen Wert erhalten würde. Wir müssen also $\mu = \mu_1 \varepsilon^2$ wählen. Dann lauten die Gleichungen der ersten Näherung:

$$\left.\begin{aligned} \rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (75)$$

Bei dieser ersten Näherung haben wir daher anzunehmen, daß der Druck sich mit η nicht ändert, bei konstantem x also durch die Grenzschicht hindurch konstant bleibt. D. h. aber, daß der Grenzschicht ihr Druck durch die freie Flüssigkeit eingeprägt wird. Die y-Komponente der Geschwindigkeit in der freien Strömung dicht an der Grenzschicht kann gegen die x-Komponente vernachlässigt werden und diese x-Komponente ist dort außerdem nur als Funktion von x anzusehen, wir wollen sie mit $\bar{v}_x$ bezeichnen. Dann erhalten wir mit Benutzung der ersten Eulerschen Gleichung für den Vorgang in der Grenzschicht folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right] &= \rho\left[\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}\right] + \mu_1 \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (76)$$

Als Grenzbedingungen ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned} \eta = 0 &: \ v_x = 0, \ v_\eta = 0, \\ \eta = \infty &: \ v_x = \bar{v}_x. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (77)$$

Im stationären Zustand sind $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ und $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$ gleich Null zu setzen. Denkt man sich in diesem Falle in (76) und (77) x mit α, v_x mit β, $\frac{\mu_1}{\rho}$ mit γ und η mit δ multipliziert, so bleiben diese Gleichungen ungeändert, wenn man $\delta = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$ wählt. Daraus folgt, daß die Dicke der Grenzschicht proportional

$$\sqrt{\frac{\mu l}{\rho \bar{v}_x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

ist, wenn l die Längsausdehnung des Körpers bedeutet; dieser Ausdruck hat tatsächlich die Dimension einer Länge, wie man durch Einsetzen der Dimensionen

von $\rho\, u$ (vgl. Einl. § 2) erkennt. Insbesondere wird also innerhalb gewisser Grenzen eine Vergrößerung des Reibungskoeffizienten nur die Dicke der Grenzschicht ändern, während sonst das Strömungsbild ungeändert bleibt.

Nehmen wir an, daß sich im Falle des stationären Zustandes in der Umgebung von $\eta = 0$, v_x und v_η nach Potenzen von η entwickeln lassen, so müssen diese Entwicklungen entsprechend der zweiten der Gleichungen (76) und den Grenzbedingungen (77) lauten:

$$v_x = f_1\eta + f_2\eta^2 + \ldots$$
$$v_\eta = -\frac{1}{2} f_1'\eta^2 - \frac{1}{3} f_2'\eta^3 + \ldots,$$

wo die Striche Ableitungen nach x bedeuten. f_1 bleibt dabei beliebig, wie es ja nötig ist, wenn wir noch der Grenzbedingung für $\eta = \infty$ gerecht werden wollen. f_2 wird $-\frac{1}{4}\frac{\rho}{\mu_1}\frac{d(\bar{v}_x^2)}{dx}$ und für die folgenden Koeffizienten erhält man die Rekursionsformel:

$$(n+2)(n+1) f_{n+2} = \frac{\rho}{\mu_1}\left[\frac{n-1}{n} f_1 f'_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} f_2 f'_{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} f_{n-1} f'_1\right].$$

Wir erhalten also:

$$v_x = f_1\eta - \frac{1}{4}\frac{\rho}{\mu_1}\frac{d(\bar{v}_x^2)}{dx}\eta^2 + \frac{1}{4}\frac{\rho}{\mu_1} f_1 f'_1 \eta^4 + \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Wir wollen nun annehmen, daß in der äußeren Strömung $\bar{v}_x^2$ abnimmt, also entsprechend der Bernoullischen Gleichung $p = C - \frac{\rho}{2}\bar{v}_x^2$ Druckanstieg vorhanden ist. Dies wird z. B. eintreten, wenn die Querabmessung des Körpers kleiner wird. Sei x_0 ein Wert, für den f_1 von positiven Werten

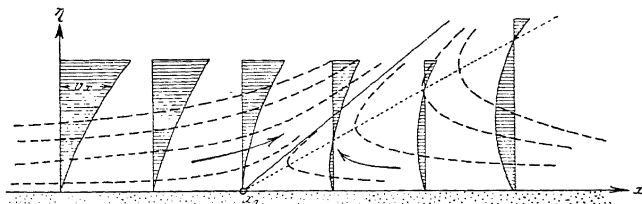



Abb. 108. Rückströmung in der Grenzschicht.

durch Null zu negativen Werten übergeht, so daß f_1 daselbst die Form $f_1 = -m(x - x_0)$ besitzt. Dann läßt sich mit den ersten Gliedern von (79) die Abhängigkeit der Größe v_x von x und η übersehen. In Abb. 108 sind die Werte von v_x als Profile eingezeichnet; die Körperoberfläche ist dabei, da es sich nur um einen kleinen Bereich um x_0 herum handelt, eben gezeichnet; längs der punktierten Linie ist v_x gleich Null, auf der einen Seite von ihr strömt die Flüssigkeit in derselben Richtung wie draußen,

statt. Bei der Ausbildung des stationären
zwischen Wand und
immer neuen Flüssig-

der Druckzunahme zur Um
rasch an Breite zunehmen u... wird sich von dem Körper ablösen. Im Falle des ebenen Problems existiert auch bei Berücksichtigung der Reibung eine Stromfunktion $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = v_x$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_\eta$. Da ψ aus (79) durch Integration nach x erhalten wird, können auch die Stromlinien $\psi = \text{Const}$ leicht eingezeichnet werden, was in Abb. 108 ebenfalls geschehen ist. Man erkennt, daß die ... ausgeht, die Grenze der Vorwärtsströmung

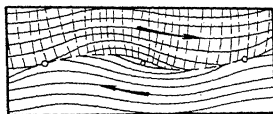



Abb. 109a.

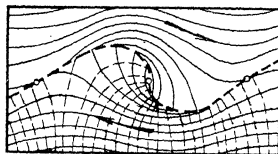



Abb. 109b.

An der Stelle x_0 beginnt also eine Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit nach Art einer Helmholtzschen Diskontinuitätsfläche, oder wie wir auch sagen können: es löst sich bei x_0 eine Wirbelschicht vom Körper ab. Als Bedingung für die Ablösungsstelle haben wir, da $f_1 = \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)$ ist,

$$\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = 0, \text{ für } \eta = 0 \tag{80}$$

Physikalisch erklärt sich eine solche Ablösung nach Prandtl in folgender Weise: in der äußeren Strömung besitzt die Flüssigkeit eine genügend große kinetische Energie, um in die Region vergrößerten Druckes einzudringen. In der Grenzschicht aber, wo ja nach dem Vorhergehenden derselbe Druckanstieg herrscht, hat die Flüssigkeit infolge der Reibung ihre kinetische Energie schon größtenteils abgegeben: sie kann in das Gebiet höheren Druckes nicht mehr eindringen und wird ihm daher seitlich ausweichen.

Wie wir (V § 3) gesehen haben, sind solche Wirbelschichten labil: die vom Körper ausgehende Wirbelschicht wickelt sich auf, so daß die Wirbelstärke in einzelnen Punkten konzentriert wirkt. Die theoretische Verfolgung dieses Vorganges stößt zur Zeit — noch viel mehr beim räumlichen Problem — auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Legt man in der Art, wie wir es (V § 3) getan haben, eine kleine sinusförmige Störung bei einer bis dahin ebenen Wirbelschicht zugrunde, so kann man den ersten Anfang der Umänderung verfolgen. Abb. 109 a und 110 b zeigen diesen

Beginn nach Prandtl in zwei Stadien. Man sieht schon deutlich, wie durch das Ineinandergreifen der beiden Strömungen sich Wirbelzentren zu bilden beginnen. Ein Teil der Flüssigkeit wird von der äußeren Strömung als spiralig sich aufwickelnde Trennungsschicht fortgeführt, und daher wird von der Grenzschicht aus das ganze Strömungsbild hinter dem Körper umgewandelt.

Noch deutlicher zeigt sich der Vorgang in Photogrammen nach Prandtlschen Versuchen vom Beginn der Trennungsfläche bis zum Beharrungszustand. Abb. Nr. 110a, b, c geben solche Prandtlsche Aufnahmen als Beispiel wieder.

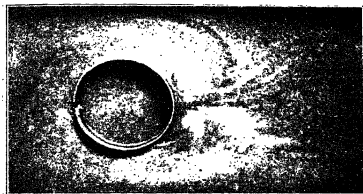



Abb. 110a.
Entstehung der Wirbel nach Prandtl.

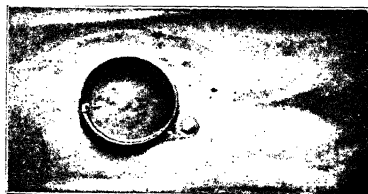



Abb. 110b.
Entstehung der Wirbel nach Prandtl.

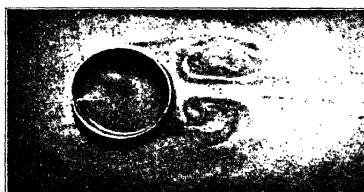
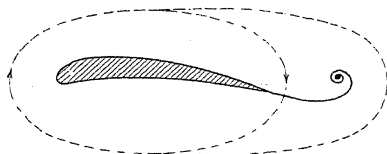



Abb. 110c.
Entstehung der Wirbel nach Prandtl.

Aus unserem Ansatz (79) läßt sich noch eine wichtige Folgerung ziehen. Fügt man zu η und v_η den Faktor $\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho}}$ und läßt v_x und x ungeändert, so tritt in (76) an Stelle von $\frac{\mu_1}{\rho}$ der Faktor 1; in derselben Weise kann man es im stationären Falle durch Hinzufügen eines Faktors zu v_η und η erreichen, daß alle Geschwindigkeiten proportional vergrößert werden. Bei dem Ansatz (79) wird dann das veränderte f_1 sich von dem früheren f_1 nur um einen von x unabhängigen Faktor unterscheiden, so daß eine Nullstelle von f_1 davon ganz unberührt bleibt. Wir folgern daraus, daß die Ablösungsstelle weder vom Reibungskoeffizienten noch von der Dichte, noch auch von einer proportionalen Vergrößerung aller Geschwindigkeiten abhängig ist.

§ 7. Anwendungen der Grenzschichtentheorie.

Wir haben uns zunächst klarzumachen, daß die Zirkulation der sich in der Grenzschicht vom Körper ablösenden Wirbel die Ursache für die immer wieder neu entstehende, den Körper umkreisende Zirkulation ist, welche für das Verständnis des Auftriebs unbedingt erforderlich war. Da, wie wir gesehen haben, die freie Strömung in einiger Entfernung vom Körper, nach wie vor als reibungslos angesehen werden kann, so muß die Gesamtzirkulation auf einer Kurve, die den Körper und einen von der Grenzschicht ausgesandten Wirbel — Anfahrwirbel in der Bezeichnungsweise von Prandtl — umschlingt, den Wert Null haben, da sie anfangs natürlich den Wert Null gehabt hat. Nach Prandtl muß daher die Zirkulation jedes sich ablösenden Wirbels ein Äquivalent in einer entgegengesetzten Zirkulation haben (vgl. Abb. 111), die den Körper umfließt. Da jeder abgehende Wirbel ein Äquivalent um die Körperkontur herum auslöst, müßte diese Reaktionszirkulation immer mehr auswachsen; dies geschieht aber nicht, weil die Zirkulation in der Grenzschicht abgebremst wird. So kommt es, daß sich ein stationärer Mittelwert für diese Zirkulation herausbildet. Streng genommen wird die Zirkulation und mit ihr der Auftrieb entsprechend der periodischen Wirbelablösung periodisch schwanken, so daß alle unsere in dieser Hinsicht angestellten Berechnungen genau gesagt nur Mittelwerte darstellen.

111. Anfahrwirbel und Zirkulation.

Zur Entstehung eines Auftriebes ist es daher notwendig, daß die Summe aller Zirkulationen, die von der Grenzschicht hinausgeschickt werden, bei einem Flug (in der Abb. 111) von rechts nach links einen Betrag ergibt, der entgegen der Richtung des Uhrzeigers wesentlich positiv ist, damit, wie es für den Auftrieb verlangt wurde, die Reaktionszirkulation im Uhrzeigersinne um die Kontur fließt. Hieraus folgt z. B., daß eine symmetrische Kontur keinen Auftrieb ergeben kann, wenn sie in Richtung der Symmetrieachse angeströmt wird, da die Gesamtzirkulation der sich aus Symmetriegründen paarweise ablösenden Wirbel den Mittelwert Null haben muß.

Bei dem ebenen Tragflügel, die unter dem Winkel α $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{y\infty}}{v_{x\infty}}\right)$ angeströmt wird, fanden wir, wenn noch keine Zirkulation vorhanden ist, den Geschwindigkeitsvektor (vgl. S. 87)

$$\mathfrak{v}' = v_{x\infty} - i\, v_{y\infty} \frac{z}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}}, \quad z = x + y\,i;$$

am Flügel selbst, $y = 0$, erhalten wir also

$$v = v_{x\infty} - v_{y\infty} \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - x^2}},$$

wobei die Wurzel auf der Saug-(Ober)seite positives, auf der Druck-(Unter-)seite negatives Vorzeichen besitzt. Die beiden Spaltungspunkte $v = 0$ sind $x_1 = -\frac{t}{2}\cos\alpha$ für die Druckseite, $x_2 = \frac{t}{2}\cos\alpha$ für die Saugseite. Daraus folgt, daß auf der ganzen Unterseite die Luft beschleunigt, auf der Oberseite verzögert wird. Da somit nur auf der Oberseite die Luft gegen zunehmenden Druck strömt, ist auch nur auf der Oberseite eine Wirbelablösung zu erwarten. In Abb. 112 sind die Werte von v^2 (bei $\alpha = 45^0$) gezeichnet und die Strömungsrichtungen eingetragen. Bei einer Flugrichtung in der Abb. 112 von rechts nach links ist, wie man sieht, die Abnahme von v^2 rechts erheblich größer als links und somit auch der Druckanstieg rechts größer. Die sich an der Vorderkante im Uhrzeigersinne ablösende Wirbelung ist also kleiner als die an der Hinterkante gegen den Uhrzeigersinn drehende, so daß tatsächlich ein Auftrieb erwartet werden kann. Der Mittelwert der Reaktionszirkulation bildet sich so aus, daß der hintere Spaltungspunkt in die Hinterkante rückt (Abb. 43 S. 71). Es möge darauf hingewiesen werden, daß nur für kleine Anstellwinkel die sich links ablösenden Wirbel eine wesentlich kleinere Zirkulation haben als die von rechts abgehenden. Es ist wohl möglich, daß der plötzliche Abfall des Auftriebes für größere Anstellwinkel (etwa 15^0), den alle Tragflügelmessungen zeigen, darin seine Ursache hat, daß von dieser Stelle an die links auftretende Zirkulation erheblich stärker ins Gewicht fällt.

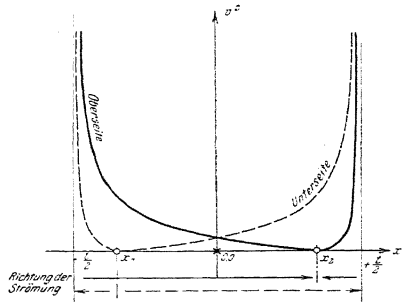



Abb. 112.

Beim gewölbten Profil liegen die Ablösungsverhältnisse folgendermaßen: Wir haben gesehen, daß auf einem Kreise die beiden Spaltungspunkte symmetrisch zu einer Geraden, die auf der Anströmungsrichtung senkrecht steht, liegen (S. 50). Vergleicht man daher Abb. 33 S. 57 mit den Betrachtungen auf S. 72, 73 und Abb. 45 und bedenkt dabei, daß $\operatorname{tg}\beta = \frac{f}{2} \frac{t}{4}$ ist, so sieht man Folgendes: Ist $\frac{2f}{t} = \operatorname{tg}\alpha$, so liegt ($\alpha = \beta$) der vordere Spaltungspunkt in der Vorderkante des Kreisbogens; ist aber $\frac{2f}{t} > \operatorname{tg}\alpha$, so rückt der vordere Spaltungspunkt auf die Oberseite des Kreisbogens. Im ersten Falle ist die Geschwindigkeit an der Vorderkante nicht mehr unendlich groß, so daß dort erhebliche Verzögerungen, die zur Wirbelablösung führen, vermieden werden. Im zweiten Falle kann die Wirbelablösung nur in der Weise erfolgen, daß die Zirkulation denselben Drehsinn wie an der Hinterkante hat. In beiden Fällen ist daher die ungünstige Wirkung der Wirbelablösung an der Vorderkante vermieden. Daraus folgern wir einerseits von neuem eine Überlegenheit der gebogenen Kontur hinsichtlich des Auftriebs über

die ebene und andererseits eine günstige Wirkung stark vornüber geneigter Vorderkanten. Weiter sehen wir von neuem die Nützlichkeit der Abrundung der Vorderkante, denn auch hierdurch werden an der Vorderkante starke zur Wirbelablösung führende Geschwindigkeitsgefälle vermieden.

Wir haben aber noch zu erkennen, daß die Reibung der Flüssigkeit an der Körperoberfläche auch ohne Wirbelablösung zu einem Widerstand, dem Reibungswiderstand, führt.

Zu dem Zwecke wollen wir mit Blasius die Grenzschicht einer ebenen, parallel zur Strömung liegenden Platte betrachten.

Da jetzt die außerhalb der Grenzschicht herrschende Potentialströmung $\bar{v}_x =$ Const ist, so haben wir, auch in der Grenzschicht, keine Druckveränderung, also auch keine Wirbelablösung zu erwarten. In diesem Falle lauten die Gleichungen (76) und die Grenzbedingungen (77) für den stationären Zustand

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right) &= \mu_1 \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} &= 0, \\ \eta = 0:\ v_x = 0,&\ v_\eta = 0, \\ \eta = \infty:\ v_x = \bar{v}_x &= \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

Führt man hier die Stromfunktion $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = v_x$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_\eta$ ein, so zeigt es sich, daß die partiellen Differentialgleichungen auf eine gewöhnliche zurückgeführt werden können. Diese und die Grenzbedingungen werden am einfachsten, wenn man als unabhängige Veränderliche

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho u}{\mu_1}}\frac{\eta}{\sqrt{x}}$$

einführt und

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\rho}} \cdot \psi_1 \sqrt{x}$$

setzt. Dann wird nämlich ψ_1 bloße Funktion von ξ und man erhält:

$$v_x = \frac{1}{2}\bar{u}\frac{d\psi_1}{d\xi},\quad v_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_1 u}{\rho}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\xi\frac{d\psi_1}{d\xi} - \psi_1\right), \quad \ldots\ldots (82)$$

$$\psi_1 \frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} + \frac{d^3\psi_1}{d\xi^3} = 0,$$

$$\xi = 0:\ \psi_1 = 0,\ \frac{d\psi_1}{d\xi} = 0,$$

$$\xi = \infty:\ \frac{d\psi_1}{d\xi} = 2.$$

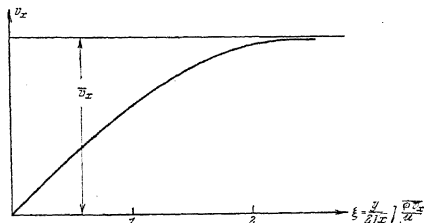
Man kann die hier vorliegende Aufgabe entweder durch numerische Integration lösen, indem man bei $\xi = 0$ von den Werten $\psi_1 = 0$ $\frac{d\psi_1}{d\xi} = 0$, $\frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} = \alpha$ ausgeht

und zunächst α noch willkürlich läßt. Man findet dann, daß bei $\alpha = 1{,}3$ die Lösung sich für große ξ dem Werte $\frac{d\psi_1}{d\xi} = 2$ anpaßt. Oder man rechnet nach **Blasius** mit einer Reihenentwicklung

$$\psi_1 = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{c_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \xi^{3n+2}, \quad c_0 = 1,$$

die man ebenfalls so einzurichten hat, daß sich $\frac{d\psi_1}{d\xi}$ für $\xi = \infty$ asymptotisch dem Werte 2 annähert. Blasius findet mit Berücksichtigung der acht ersten Koeffizienten dieser Reihe $\alpha = 1{,}327$. Danach ergibt sich für v_x das Kurvenbild (Abb. 113). Um den Widerstand zu berechnen, den eine Platte von der Breite b und der Tiefe t erfährt, wenn sie parallel zu ihrer Fläche fortbewegt wird, bedenken wir, daß nach (69) die Reibungskraft pro Flächeneinheit

Abb. 113.

$$\mu = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

ist. Wenn wir also $\mu = \mu_1 \varepsilon^2$, $y = \varepsilon\eta$ und (82) berücksichtigen, so erhalten

$$\frac{\mu}{4}\,\bar u\,\frac{d^2\psi_1}{d\xi^2}\sqrt{\frac{\rho u}{\mu}}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{\mu\rho u^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Daraus folgt durch Integration über die Tiefe t und Multiplikation mit der Breite b bei Berücksichtigung beider Plattenseiten:

$$W = 1{,}327\, b \sqrt{\mu \rho t \bar u^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

Dieser Reibungswiderstand nimmt also schwächer als proportional der Plattentiefe und schwächer als proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit zu. Setzt man trotzdem auch hier:

$$= \frac{1}{2} c_w \rho b t u^2,$$

so erkennt man, daß die Widerstandszahl c_w mit wachsender Tiefe und wachsender Geschwindigkeit abnehmen muß, was die Versuche bestätigen. Dabei ist angenommen, daß es sich um glatte Flächen handelt; die Verhältnisse liegen anders, wenn es sich um erkennbare Rauhigkeiten handelt. Aber diese Blasiussche Formel (83) gilt, wie ausdrücklich hervorgehoben werden muß, nur unter der Voraussetzung, daß es sich um eine durchweg laminare (nichtwirbelige) Strömung in der Grenzschicht handelt. In dem Falle turbulenter (wirbeliger) Strömung in

der Grenzschicht müssen andere Ansätze für den Reibungswiderstand gemacht

hat
Ablösungsstelle für ei
zu seiner Symmetrieachse
im wesentlichen auf ei
ist. Mißt man x vom
, da v

Methode kommt
in (79) gemacht worden
mung aus (Abb. 114), so
ist, für die stationäre Strömung
x^3 mach

stens qualitativ die Vorgänge
nehmen wir:

$$m_0 = 1,74\, a_0 \sqrt{\frac{a_0 \rho}{2\mu_1}}, \quad m_1 = 4,12\, a_1 \sqrt{\frac{a_0 \rho}{2\mu_1}}.$$

Daraus ergibt sich die Ablösungsstelle der Wirbel, durch $f_1 = 0$, als

$$x_0 = \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} = 0,65 \sqrt{\frac{a_0}{a_1}}.$$

Das Minimum der Geschwindigkeit der äußeren Strömung, also das Druckminimum, liegt bei

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{a_0}{a_1}} = 0,577 \sqrt{\frac{a_0}{a_1}},$$

die Ablösungsstelle also um 11—12 vH der Gesamtlänge der Grenzschicht hinter dem Druckminimum. Auch der Winkel, unter dem die Stromlinie $\psi = 0$, welche den in Wirbelung versetzten Teil der Strömung abgrenzt (vgl. Abb. 108 S. 175), vom Körper abgeht, läßt sich hiernach abschätzen. Aus

$$0 = \psi = \frac{1}{2} f_1 \eta^2 - \frac{1}{12} \frac{\rho}{\mu_1} \frac{d\,(v_x^2)}{dx} \eta^3$$

folgt, wenn man in der Umgebung von $x = x_0$ entwickelt,

$$\eta = 11,5 \sqrt{\frac{2\mu_1\, a_1}{\rho\, a_0^2}}\,(x - x_0),$$

oder auch, wenn man zu $y = \eta\,\varepsilon$, $= \mu_1 \varepsilon^2$ zurückkehrt:

$$y = 11,5 \sqrt{\frac{2\mu\, a_1}{\rho\, a_0^2}}\,(x - x_0).$$

[1]) Eine bedeutungsvolle Weiterbildung in dieser Hinsicht esentli Vereinfachungen hat in allerjüngster Zeit die Grenzschichtent durch seine Mitarbeiter erfahren. Leider konnten diese Arbeite Berücksichtigung mehr finden, da sie erst nach Abschluß unserer Manuskripts ind (vgl. das Literaturverzeichnis).

Für den Kreiszylinder hat man (S. 49) das komplexe Potential der äußeren Strömung $w = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z}\right)$, wenn v_∞ die Geschwindigkeit der Parallelströmung bedeutet und a der Zylinderradius ist; setzt man also $z = r e^{i\left(\pi - \frac{\varphi}{a}\right)}$, so findet man

$$\bar{v}_x = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{r=a} = 2 v_\infty \sin \frac{x}{a}.$$

Nähert man nach der Methode der kleinsten Quadrate den Sinus im Intervalle $0 < x < a\pi$ durch eine möglichst gute Funktion dritten Grades an, so findet man: $a_0 = 0{,}856 \cdot \frac{2 v_\infty}{a}$, $a_1 = 0{,}093 \cdot \frac{2 v_\infty}{a^3}$ $= 3{,}03\, a$; somit erhält man für das Druckminimum:

$$0{,}577 \cdot 3{,}03\, a = 1{,}75\, a \ (101^0)$$

und die Ablösungsstelle:

$$0{,}65 \cdot 3{,}03 = 1{,}97\, a \ (113^0).$$

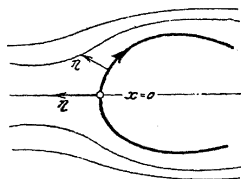
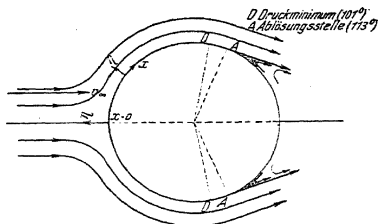



Abb. 114.

Abb. 115. Ablösungsstelle und Druckminimum für einen Kreiszylinder.

Als Gleichung der Stromlinie $\psi = 0$ findet man:

$$y = 4{,}1 \sqrt{\frac{\quad}{\rho\, a\, v_\infty}} \; - x_0$$

In Abb. 115 ist das Druckminimum, die Ablösungsstelle und die Stromlinie $\psi = 0$ für einen Kreiszylinder gezeichnet ($v_\infty = 4$ m/s, $a = 36$ mm).

Wird ein Körper plötzlich aus dem Ruhezustand in Bewegung gesetzt, so können wir annehmen, daß sich im ersten Augenblick die Potentialströmung herausbildet. Diese wird aber durch die Wirkung der Reibung alsbald umgestaltet werden. Denken wir etwa an den eben behandelten Zylinder, so hat $v_x = 2 v_\infty \sin \frac{x}{a}$ bei $x = a\pi$, also an der Rückseite des Körpers, das stärkste Gefälle, dort ist daher die Druckzunahme am größten. Wir haben also an dieser Stelle zuerst eine Ablösung von Wirbeln zu erwarten. Infolge der Umgestaltung auch der äußeren Strömung werden dann die Ablösungsstellen beiderseits weiter nach vorn rücken, bis sich schließlich der stationäre Zustand, wie wir ihn vorher geschildert haben, heraus-

bildet. Eine Theorie
spielt sich nach Prandtl
für
Platte, die senkrecht
Stadien angegeben ist. Die

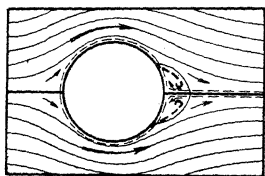



Abb. 116a. Entstehung der Ablösung bei einem Kreiszylinder.

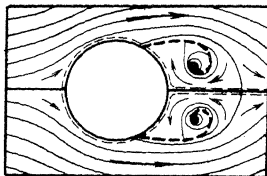



Abb. 116b. Entstehung der Ablösung bei einem Kreiszylinder.

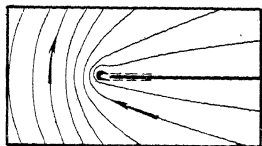



Abb. 117a. Entstehung der Ablösung bei einer Platte.

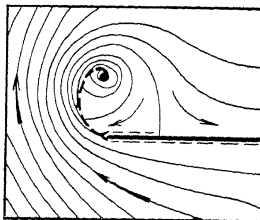



Abb. 117b. Entstehung der Ablösung bei einer Platte.

stelle rückt immer weiter gegen die Strömung vor, bis der Druckanstieg fast ganz beseitigt ist. Sind scharfe Kanten am Körper vorhanden, so heftet sich die Ablösungsstelle regelmäßig an diese, weil ja dort der Druckanstieg bei weitem am größten ist.

VI. Kapitel.

Messungsergebnisse.

§ 1. Das Ähnlichkeitsgesetz.

Wenn die Theorie der Luftkräfte, wie wir sie im I. bis V. Kapitel auseinandergesetzt haben, uns schon manchen Aufschluß über die Natur der Luftkräfte gegeben hat, so sind wir doch nach dem heutigen Stand der Wissenschaft noch längst nicht soweit, daß wir die Größe der Kraft angeben können, welche die Luft auf irgendeinen Körper ausübt, der mit gegebener Geschwindigkeit vorwärtsbewegt wird. Die hauptsächlichste Grundlage der praktischen Flugtechnik bilden daher die Meßergebnisse der Versuchsanstalten.

Abgesehen von dem (in Kapitel V § 7) behandelten Falle eines Reibungswiderstandes haben uns alle theoretischen Betrachtungen zu einem Gesetz geführt, bei dem die Luftkraft dem Geschwindigkeitsquadrat proportional ist.

$$K = \zeta\, q\, F, \; q = \frac{1}{2}\, \rho v^2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei einen Zahlenfaktor, $\rho = \frac{\gamma}{g}$ die Luftdichte, d. h. die Masse der Raumeinheit und F eine geeignet gewählte Fläche des Körpers bedeutet.

Es ist aber nicht zweifelhaft, daß dieses Gesetz der Wirklichkeit nur sehr unvollkommen gerecht wird. Unsere theoretischen Betrachtungen stützen sich vorwiegend auf die Theorie einer idealen Flüssigkeit, d. h. einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Und gerade da, wo die Berücksichtigung der Reibung einsetzte, mußten wir erkennen (vgl. Kapitel V § 6 und 7), daß die Theorie noch außerordentlich große Lücken aufweist. Wenn wir uns aber daran erinnern, daß die Vorgänge in der Grenzschicht und die von ihr sich ablösenden Wirbel die Ursache einerseits für die Entstehung der den Auftrieb bewirkenden Zirkulation andererseits für den Profilwiderstand sind, so wird klar, daß unser Ansatz (1) noch auf schwachen Füßen steht.

Im § 2 der Einleitung haben wir schon die Theorie der mechanischen Ähnlichkeit kennen gelernt und sind dabei zu dem Resultat gelangt, daß das Gesetz (1) der Luftkraft allgemein richtig ist, wenn wir ζ als eine Funktion der Reynoldsschen Zahl

$$R = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}, \; \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ansehen, wobei μ den Koeffizienten der inneren Reibung und l eine Längenabmessung des Körpers bedeutet. Über die Natur dieser Funktion sagt das Ähnlichkeitsgesetz natürlich nichts aus, aber es folgt aus ihm sofort, daß für die Übertragbarkeit eines Modellversuches auf die Flugtechnik neben der geometrischen Ähnlichkeit des Versuchskörpers und des wirklichen Körpers eine genaue Übereinstimmung der Reynoldsschen Zahl gefordert werden muß; dann und nur dann werden die Strömungsvorgänge mechanisch ähnlich.

Der Ausführung solcher Versuche stehen aber bedeutende Schwierigkeiten entgegen. Einerseits bringt schon die Herstellung genauer geometrischer Ähnlichkeit Schwierigkeiten mit sich und wird geradezu unmöglich, wenn es sich um Berücksichtigung der bei Rauhigkeit der Oberfläche vorhandenen Höcker handelt. Eine noch erheblichere Schwierigkeit bietet aber die Tatsache, daß die Dimensionen der Modelle immer wesentlich kleiner sind als die des Körpers. Um also dieselbe Reynoldssche Zahl zu erhalten, müßte man die Geschwindigkeit entsprechend vergrößern. Abgesehen davon, daß dies praktisch unmöglich ist, würde man bei so hohen Geschwindigkeiten die Schallgeschwindigkeit überschreiten, also in ein Gebiet kommen, bei dem (s. Einleitung S. 7) die Zusammendrückbarkeit der Luft nicht mehr außer acht bleiben kann. Man muß daher versuchen, die Natur dieser Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl zu ergründen. In Abb. 118 ist die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes c_w von der Reynoldsschen Zahl für eine

Kugel von 70,4 cm Durchmesser nach einer Versuchsreihe von Prandtl wiedergegeben. Man erkennt daraus, daß in dem Gebiete $R = 260000$ bis 280000 ein sehr starker Abfall der c_w-Werte stattfindet; danach nähert sich c_w wieder einer Konstanten, die aber nur noch etwa die Hälfte des Wertes bei $R = 200000$ ist. Solche kritischen Gebiete plötzlichen Abfalls des Widerstandsbeiwertes zeigen sich bei gewölbten Körperformen fast immer; es kann sogar vorkommen, daß mehrere solche Gebiete vorhanden sind. Nach Prandtl hat man sich als Grund für den starken Abfall Folgendes zu denken: Im Gebiete der kleineren Geschwindigkeiten strömt die Flüssigkeit in der Grenzschicht laminar, d. h. ungefähr parallel zur Körperoberfläche bis zur Ablösungsstelle hin. Bei den größeren Geschwindigkeiten dagegen wird die Strömung schon vor der Ablösungsstelle wirbelig, so daß der schmale Keil ruhender Luft hinter der Ablösungsstelle (s. Abb. 115) wieder weggespült wird. Der Luft-

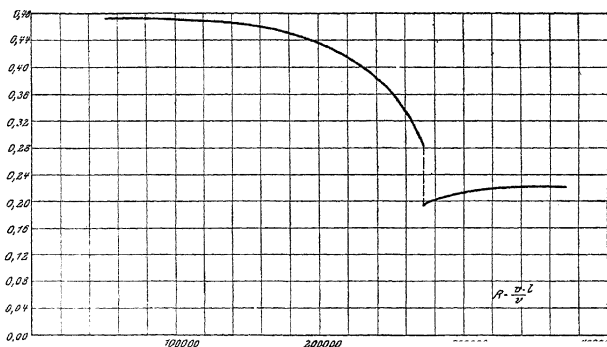



Abb. 118. Kritisches Gebiet der Reynoldsschen Zahl bei einer Kugel.

strom legt sich infolgedessen wieder an die Körperoberfläche an, die Ablösungsstelle rückt immer mehr nach hinten, bis sich ein neuer Gleichgewichtszustand herausgebildet hat. Die Verkleinerung des Wirbelsystems gibt eine Verkleinerung des Widerstandes. Die kritische Region der Grenzschicht ist die, wo die Flüssigkeit schon vor der Ablösungsstelle mit Druckanstieg fließt, sie liegt also zwischen dem Geschwindigkeitsmaximum und der Ablösungsstelle. Dieses Gebiet ist bei abgeplatteten Körperformen klein, bei den verlängerten dagegen verhältnismäßig groß; und je länger es ist, bei um so kleineren Geschwindigkeiten wird in ihm Turbulenz der Strömung zu erwarten sein, so daß die kritische Reynoldssche Zahl zu kleineren Werten abrückt. Nach der einen Seite hin muß die senkrecht zu ihrer Fläche bewegte Platte die Grenze bilden: bei ihr müssen wegen der scharfen Kante Geschwindigkeitsmaximum und Ablösungsstelle zusammenfallen, so daß der Charakter der laminaren Grenzschichtsströmung mit großem Widerstandsbeiwert dauernd erhalten bleibt. Diese Schlußweise wird durch Göttinger Messungen bestätigt. Abb. 119 gibt das Ergebnis für solche Messungen an Ellipsoiden mit 20 cm

Äquatorialdurchmesser und den Achsenverhältnissen 0,75 : 1,33; 1,8; 3,0 sowie an einem ellipsoidförmigen Luftschiffmodell (Achsenverhältnis 1 : 6) und einer kreisförmigen Platte.

In Abb. 120 sind, auch nach Göttinger Messungen (Wieselsberger) die Widerstandszahlen von Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt ($C = 100\,c$), die senkrecht

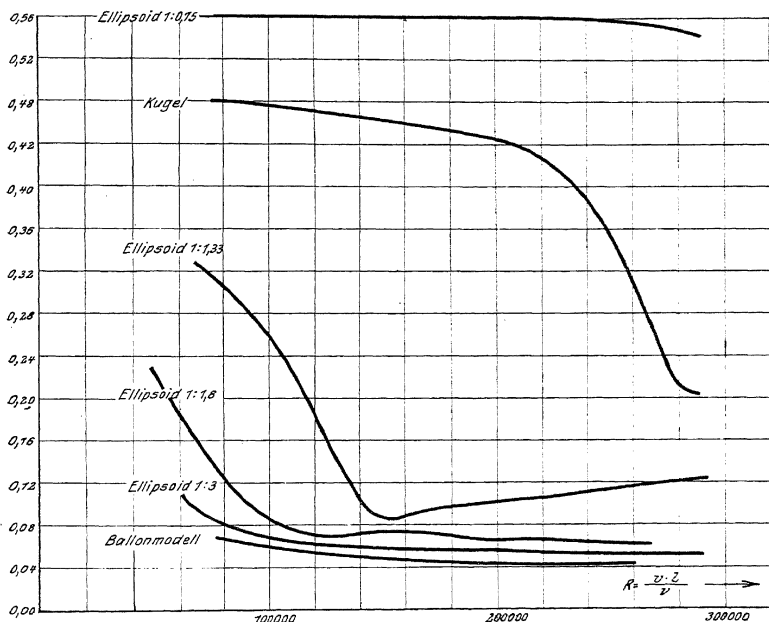



Abb. 119. Widerstandsbeiwerte und kritische Reynoldssche Gebiete für verschieden stark abgeplattete Körperformen.

zur Achse angeströmt werden, in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl in logarithmischen Skalen wiedergegeben. Die ganz kleinen Reynoldsschen Zahlen sind durch Anschluß an die Theorie, also nicht aus Messungen, hinzugefügt. Man sieht eine deutliche auch sonst beobachtete Einsenkung bei $R = 2000$; bei $R = 200\,000$ aber setzt wieder ein sehr starker Abfall des Widerstandswertes ein: C fällt von etwa 1,2 auf 0,3 ab; hier liegt also diesmal die kritische Reynoldssche Zahl. Der Abfall ist so stark, daß der Widerstand eines Zylinders von bestimmtem

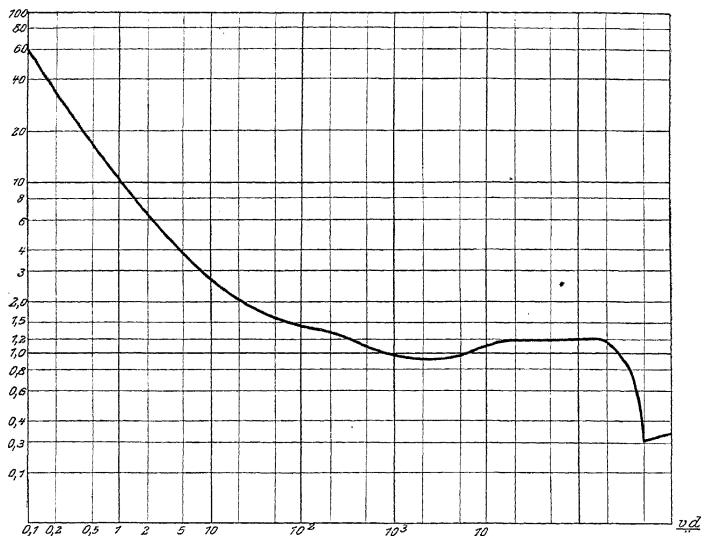



Abb. 120. Widerstandsbeiwerte von Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt.

Durchmesser in diesem Gebiete sogar mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Abb. 120a zeigt dies an einem Zylinder von 30 cm Durchmesser, wobei der Widerstand in Kilogramm pro Meter Länge angegeben ist; die gestrichelt gezeichneten Parabeln geben das quadratische Widerstandsgesetz vor und nach der kritischen Stelle.

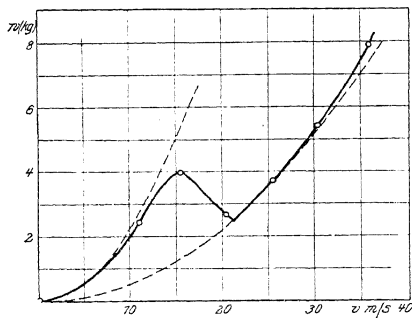



Abb. 120a. Abnahme des Widerstandes mit wachsender Geschwindigkeit im Gebiet der kritischen Reynoldsschen Zahlen.

Nach diesen Messungen kann man erwarten, daß bei allen schlanken Körperformen die kritische Reynoldssche Zahl so niedrig ist, daß sie nicht zwischen der der Messung und der der Ausführung im Großen liegt, die Widerstandsbeiwerte also von der Messung auf die wirklichen Flugzeugteile übertragen werden können. Schlanke Flugzeugteile, wie Tragflächen, Rumpf, Leitwerk, können also am Modell gemessen werden, während Spannkabel, Streben, Fahrgestell usw. lieber in Original-

größe zu messen sind. Die Richtigkeit dieses Prandtlschen Gedankenganges wird durch die neuen Göttinger Messungen bestätigt. Durch eine neue Versuchsanordnung ist es gelungen, sehr große Reynoldssche Zahlen zu erreichen: es werden bei 40 m/s Geschwindigkeit Flügel von 60 cm Tiefe gemessen.

Da sich der kinematische Reibungskoeffizient $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ bei Laboratoriumsversuchen nur sehr wenig im Vergleich zu den Körperdimensionen und der Luft-

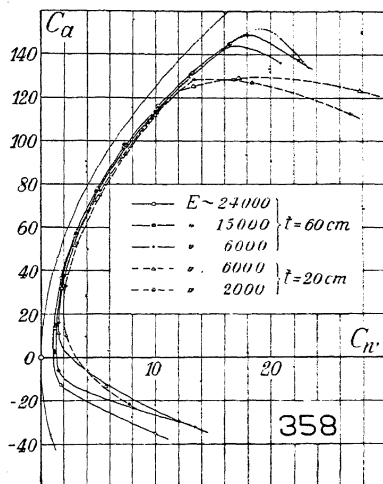



Abb. 121 a. Einfluß des Kennwertes bei einem schlanken Profil.

geschwindigkeit ändert, wird dort an Stelle der Reynoldsschen Zahl als praktisches Maß der sog.

$$\text{Kennwert} = \text{Luftgeschwindigkeit mal Körperlänge}$$

eingeführt. Und zwar wird die Geschwindigkeit durch $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$, die Länge aber durch Millimeter ausgedrückt, so daß der Kennwert, E genannt, die Benennung m/s mal mm trägt. Bei 13° C und 760 mm Barometerstand ist $\nu = 0{,}143$, so daß dann E gleich dem 70. Teil von R wird.

In Abb. 121 a und 121 *b* sind die Messungsergebnisse für ein schlankes Profil und ein dickes Profil durch Polardiagramm und die Profile[1]) selbst wiedergegeben (Seiten-

[1]) Die Zahlen 358 und 390 entsprechen einer Göttinger Numerierung; dasselbe gilt für solche im folgenden beigegebene Zahlen.

verhältnis 1 : 5). Dabei sind in der jetzt üblichen Weise, wie im folgenden immer, an Stelle von c_a und c_w die hundertmal so großen Werte C_a und C_w eingezeichnet. Wenn dabei der Kennwert 6000 zweimal vorkommt, so liegt das daran, daß derselbe Flügel in zwei Ausführungen gemessen worden ist: das eine Mal, bei normalen Abmessungen 100 cm mal 20 cm und $v = 10$ und 30 m/s, ein Gipsmodell, das andere Mal, die oben erwähnte große Ausführung mit 60 cm Tiefe, ein Modell mit Stoffüberzug. Bei dem dicken Profil ist die Übereinstimmung der Polardiagramme

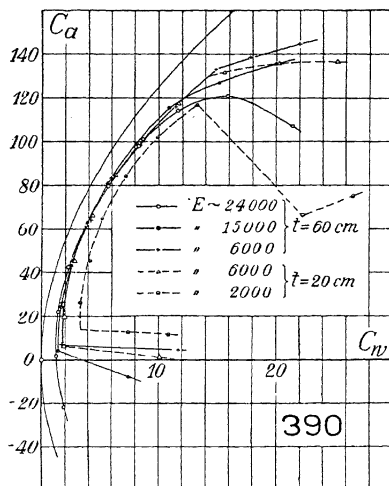



Abb. 121 b. Einfluß des Kennwertes bei einem dicken Profil.

mit dem gleichen Kennwert 6000 befriedigend; die mangelnde Übereinstimmung beim dünnen Profil für große Anstellwinkel, ist wohl durch nicht völlige geometrische Ähnlichkeit, besonders hinsichtlich der Oberflächenreibung zu erklären. Bei allen Diagrammen liegen vom Kennwert $E = 6000$ an die Polardiagramme für die mittleren Auftriebsbeiwerte befriedigend nahe aneinander, während das Diagramm für $E = 2000$ herausfällt. Bei großen Anstellwinkeln tritt eine Abhängigkeit vom Kennwert deutlich hervor, und zwar in verschiedener Weise bei dem schlanken und dem dicken Profil. Beim schlanken Profil wird mit wachsendem Kennwert der Profilwider-

stand kleiner und gleichzeitig bei großen Anstellwinkeln der Auftrieb größer. Beim dicken Profil erkennt man innerhalb eines gewissen Anstellwinkelbereiches eine Abnahme des Widerstandes, von etwa 10⁰ an aber Zunahme des Widerstandes und Abnahme des Auftriebes.

Die Versuchsanstalt weist dabei darauf hin, daß der Flug der größeren Vögel in demjenigen Bereiche von Kennwerten vor sich geht, in welchem die größten Auftriebszahlen erreicht werden, und daß damit vielleicht die günstige aerodynamische Wirkung des dicken Vogelflügels in enger Beziehung steht.

§ 2. Flügelkräfte.

Die Natur der am Tragflügel angreifenden Luftkraft, der wir uns durch unsere theoretischen Betrachtungen zu nähern gesucht haben, ist noch nicht nach allen

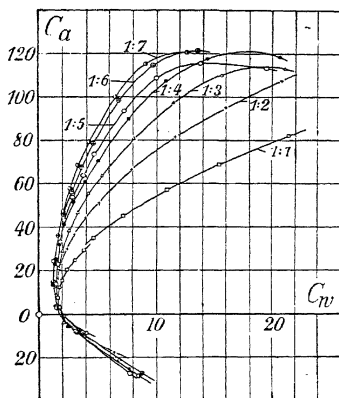



Abb. 122a. Polardiagramme von Flügeln mit verschiedenem Seitenverhältnis.

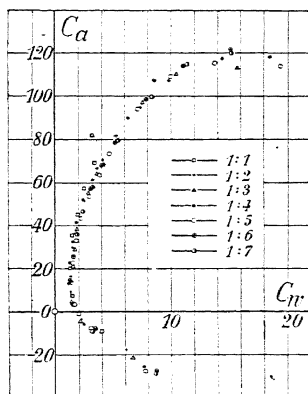



Abb. 122b. Umrechnung der Polardiagramme der Abb. 122a auf das Seitenverhältnis 1:5.

Richtungen hin geklärt; dies gilt ganz besonders für den Widerstand. Wir haben beim Widerstand zwischen induziertem und Profilwiderstand unterschieden. Während die Theorie den induzierten Widerstand, wie wir gleich sehen werden, in befriedigender Weise erfaßt, liegt eine Theorie des Profilwiderstandes bisher nicht vor. Daher kommt es, daß man die Messung der Flügelkräfte durchaus nicht entbehren kann. Solche Messungen liegen in sehr großer Zahl vor; ihre Ergebnisse sind in den Veröffentlichungen der Modellversuchsanstalten niedergelegt. Wir müssen uns hier darauf beschränken, die Hauptpunkte der Resultate hervorzuheben. Bei ausführlichen Berechnungen von Flugzeugen wird man immer gut tun, sich an bestimmte durchgemessene Flügelprofile zu halten.

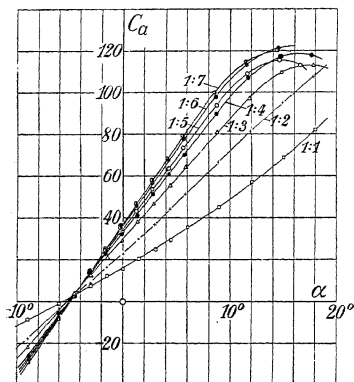



Abb. 123 a. Auftriebsbeiwert und Anstellwinkel bei verschiedenem Seitenverhältnis.

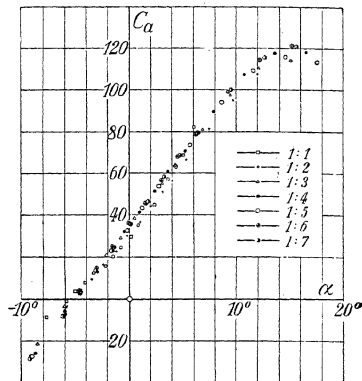



Abb. 123 b. Umrechnung auf das Seitenverhältnis 1: 5.

Durch die Einführung des Begriffes des induzierten Widerstandes (vgl. III § 6) ist die Anzahl der den Flügel bestimmenden Parameter und damit die Zahl der notwendigen Modellmessungen recht erheblich vermindert worden. Der induzierte Widerstand hängt ja nur vom Seitenverhältnis und von der Anordnung der Flügel bei beliebigen Tragwerken ab. Sind die einzelnen Flügel mit irgendeinem Seitenverhältnis $\frac{F}{b^2}$ (Fläche: Quadrat der Spannweite) durchgemessen, so kann der induzierte Widerstand einerseits für ein beliebiges Seitenverhältnis des einzelnen Flügels nach Formel (46) S. 119, andererseits für Mehrdecker nach den Formeln und Tabellen IV § 3, 4, 5 umgerechnet werden. Der Profilwiderstand dagegen hängt vom Seitenverhältnis so gut wie gar nicht ab und kann daher ohne weiteres aus Messungen an einem Eindecker von anderem Seitenverhältnis übernommen werden. Bei den Messungen der Versuchsanstalten wird jetzt gewöhnlich der induzierte Widerstand bei Polardiagrammen als Parabel mit angegeben, so daß der Unterschied: Gesamtwiderstand — induzierter Widerstand = Profilwiderstand direkt abgelesen werden kann.

Abb. 124. Beiwert des Moments bei verschiedenen Seitenverhältnissen.

Unsere ersten Abbildungen sollen zeigen, wie weit die Theorie des i n d u z i e r t e n W i d e r s t a n d e s mit der Erfahrung übereinstimmt. Abb. 122 a und b zeigen nach

Prandtl die Polardiagramme von Eindeckern gleichen Profils mit den Seitenverhältnissen 1 : 1 bis 1 : 7, wie sie gemessen wurden und wie sie nach der Umrechnung aller auf das Seitenverhältnis 1 : 5 erscheinen. Die Übereinstimmung ist so gut, wie sie für die Praxis nur irgend nötig sein kann. Nur der, praktisch unwichtige, quadratische Flügel (1 : 1) fügt sich nicht so gut ein. Dies ist nicht verwunderlich, da ja hier die Annahme der Theorie (vgl. S. 108), bei welcher der Flügel durch eine tragende Linie ersetzt wird, nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Daß mit der

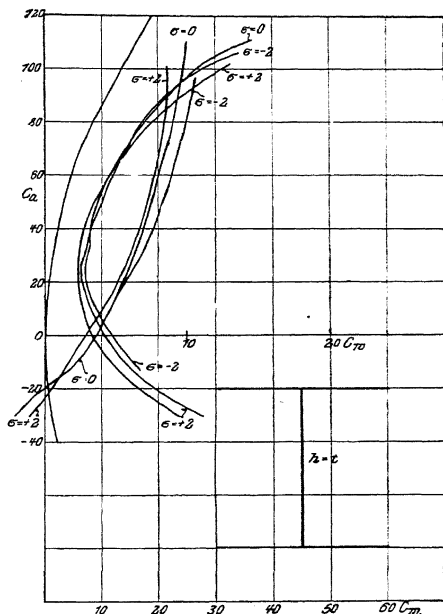



Abb. 125a. Einfluß der Schränkung.

gleichen Einschränkung die Umrechnungsformel (46) S. 119 der Tragflügeltheorie auch für die Anstellwinkel richtig ist, zeigen die Abb. 123 a und b, gleichfalls nach Prandtl; auch hier sind die Messungen (Abb. 123a) alle auf das Seitenverhältnis 1 : 5 (Abb. 123b) umgerechnet. Abb. 124 schließlich zeigt, daß der Beiwert des Moments $C_m = 100\ c_m$ [vgl. (M) S. 35], wenn man ihn in Abhängigkeit von C_a aufträgt, vom Seitenverhältnis unabhängig wird. Braucht man — etwa bei Stabilitätsberechnungen — C_m in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α, der ja das Seitenverhältnis enthält, so hat man dieselbe Umrechnung wie bei Abb. 123b vorzunehmen.

Ebenso übersichtliche systematische Messungen, welche die Theorie mit der Erfahrung vergleichen, liegen für den Doppeldecker zur Zeit noch nicht vor. Es scheint aber, wie wir einer freundlichen persönlichen Mitteilung von Herrn Professor Prandtl entnehmen, hier die Übereinstimmung nicht so vollkommen zu sein. Gegenüber der Formel (33) und Abb. 85 nebst Zahlentafel auf S. 138 und 139 wird der Widerstand in der Regel etwas größer gefunden. Dies ist nicht verwunderlich, weil ja diese Theorie den Minimalwiderstand (günstigste Auftriebsverteilung) liefert; und diese günstigste Verteilung scheint sich bei Doppeldeckern nicht mit so guter

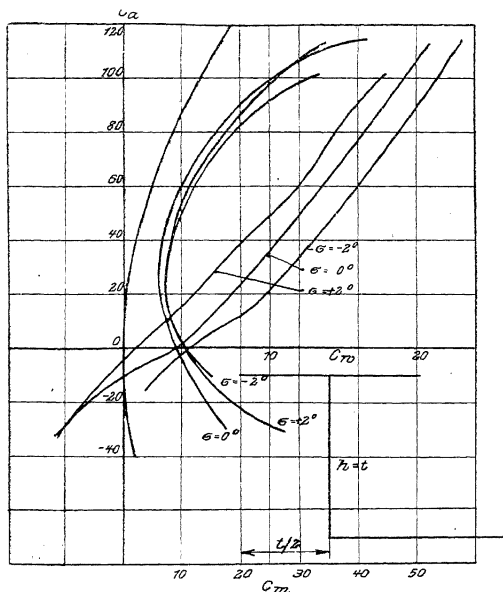



Abb. 125 b. Einfluß von Staffelung und Schränkung.

Näherung von selbst einzustellen wie bei Eindeckern. Erzwingt man durch geeignete Verwindung, d. h. Veränderung der Einstellung der einzelnen Rippen des Tragflügels gegen die Flugzeugachse, die elliptische Auftriebsverteilung bei den einzelnen Flügeln des Tragwerks, so wird die Übereinstimmung wieder eine sehr gute.

Als Beispiel für den experimentell festgestellten Einfluß von Staffelung und Schränkung seien hier in Abb. 125a und b zwei Meßergebnisse von Munk wiedergegeben (vgl. dazu die Theorie IV 6); die Lage der Flügel zueinander geht aus der beigegebenen Skizze hervor. Als Beispiel sei ferner in Abb. 126 eine Messung von Munk für das Tandem wiedergegeben. Für diese Anordnung, die in letzter Zeit wieder manchmal vorgeschlagen wird, sind die Formeln der Tragflügeltheorie für

endliche Tragflügel noch nicht entwickelt; für die unendlich breiten Flügel sei auf II § 12 verwiesen.

Für statische Fragen ist von besonderem Interesse die Lastverteilung auf die Flügel eines Tragwerkes. Diese Verteilung kann mit den Formeln IV 5 auch rechnerisch ermittelt werden; einige Beispiele dazu nach Messungen von Munk

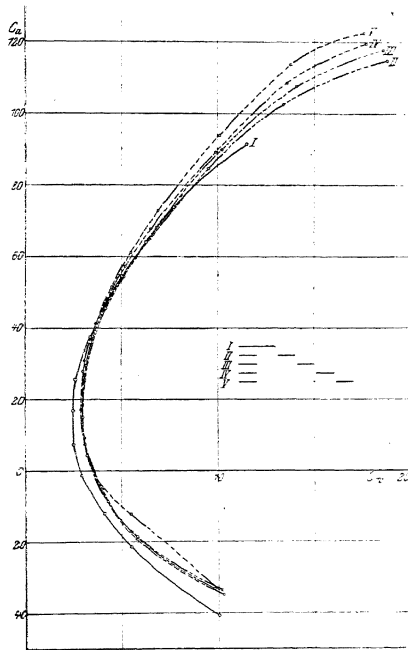



Abb. 126. Tandemanordnungen (Veränderung der Entfernung der Flügel).

sind in Abb. 127a, b, c, d angegeben; die Stellung der Flügel zueinander geht dabei aus den beigegebenen Skizzen hervor.

Gegenüber dem Einfluß des Seitenverhältnisses $\frac{F}{b^2}$ tritt der Einfluß des Flügelumrisses stark zurück. Ist der Flügel unverwunden, d. h. ist die Einstellung der Flügelprofile gegen die Flugzeugachse überall dieselbe, so gibt der elliptische Umriß (vgl. S. 118), Form 2 der Abb. 128, die elliptische Auftriebsverteilung und somit den kleinsten induzierten Widerstand. Bei den Formen 1—5 der Abb. 128 ergeben

Abb. 127 a.
Lastverteilung auf die Flügel eines Doppeldeckers.

Abb. 127 b.
Lastverteilung auf die Flügel eines Doppeldeckers.

27 c.
Lastv

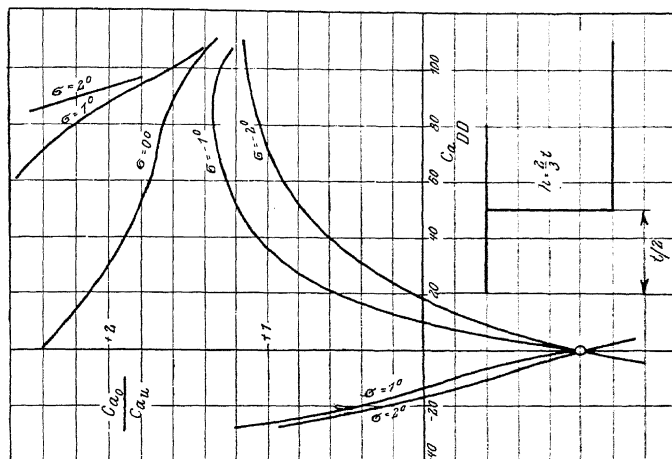
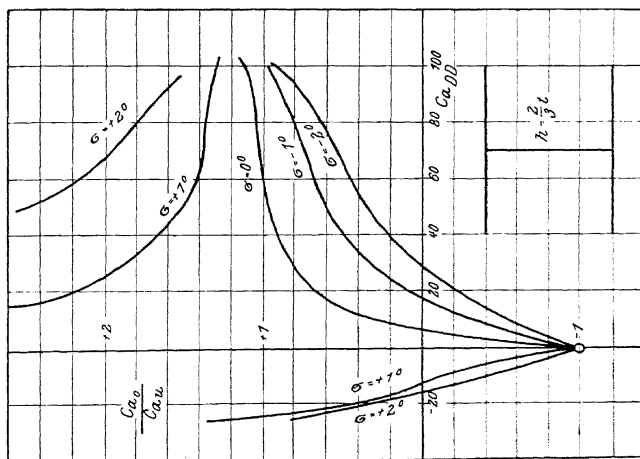
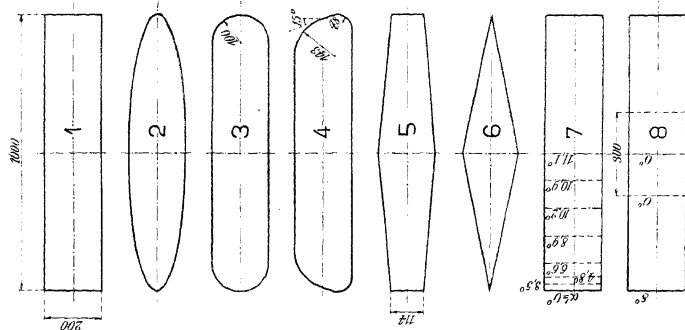



Abb. 127
rteilu Flügel

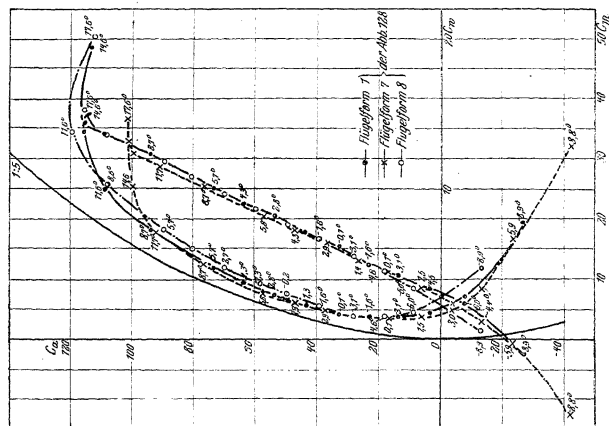



Abb. 129. Einfluß der Verwindung.

Abb. 128.

die Prandtlschen Messungen auch keine anderen deutlichen Abweichungen im Polardiagramm als die durch das veränderte $\frac{F}{b^2}$ bedingten. Dagegen muß die Form 6

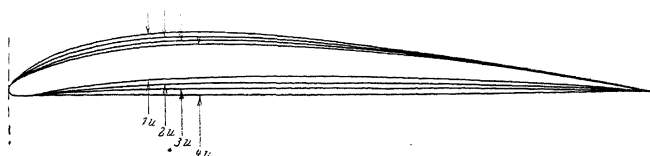



Abb. 130a. Systematische Veränderung der Druck- und Saugseite.

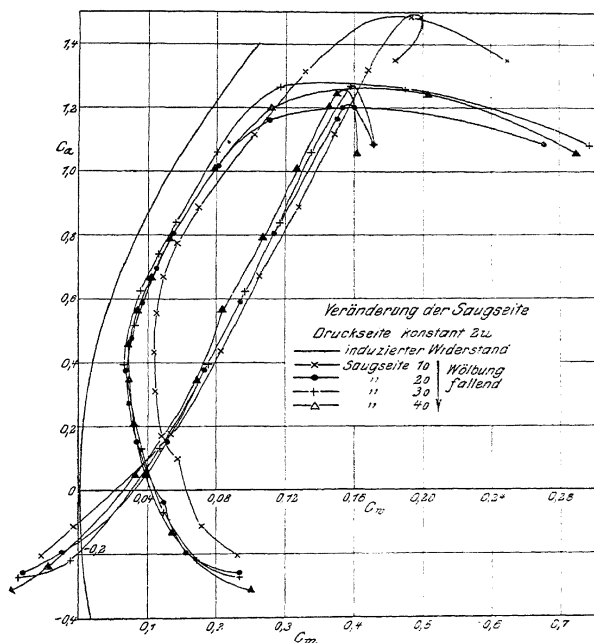



Abb. 130b.

natürlich ein wesentlich ungünstigeres Resultat liefern, weil hier mit einer erheblichen Abweichung von der elliptischen Verteilung zu rechnen ist. Eine theoretische Erörterung von Prandtl, welche diese Abweichung berücksichtigt und eine parabolische Auftriebsverteilung zu Grunde legt, liefert für den induzierten Wider-

stand einen um etwa 12 vH. höheren Wert als das Minimum. Aber auch der Profilwiderstand weist eine deutliche Erhöhung auf, die leicht daraus zu erklären ist, daß von der Mitte des Flügels nach den Spitzen zu der Kennwert $(v \cdot t)$ abnimmt. Den Einfluß verschiedener Verwindung zeigt Abb. 129, in der die Diagramme der Formen, 1, 7, 8 der Abb. 128 die sich nur durch die Verwindung unterscheiden, eingezeichnet sind. Die Art der Verwindung ist aus Abb. 128 zu ent-

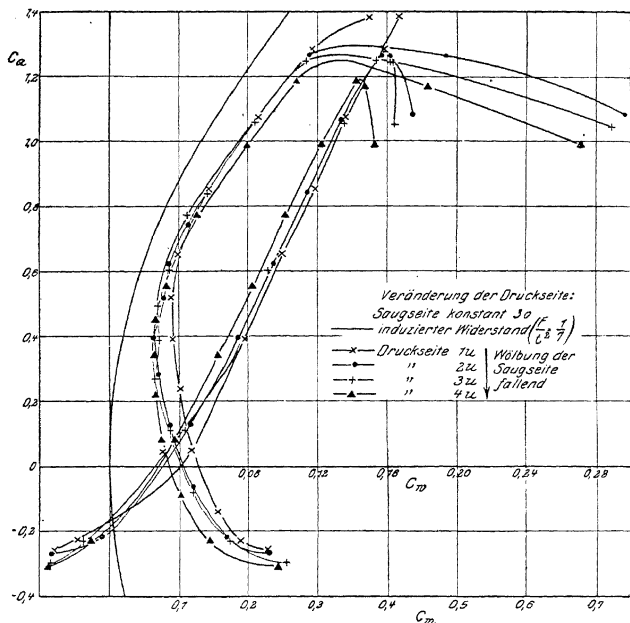



Abb. 130 c.

nehmen, wo die Einstellung der Rippen durch Winkelangabe kenntlich gemacht ist; in Form 8 nimmt die Verwindung von 0^0 bis 8^0 linear zu.

Der Einfluß der Profilform auf den Profilwiderstand ist systematisch noch nicht geklärt; hauptsächlich sind dabei zwei Größen charakteristisch: der kleinste Widerstandsbeiwert und der größte Auftriebsbeiwert. Im allgemeinen ist dem einen förderlich, was dem andern schädlich ist, so daß meist Profile mit kleinem Minimalwiderstand kein hohes Auftriebsmaximum und Profile mit hohem Auftriebsmaximum einen verhältnismäßig großen Minimalwiderstand aufweisen. Man erkennt dies gut an den in den Abb. 130a, b, c wiedergegebenen Versuchsergebnissen von Munk. Aus Abb. 130a ersieht man, in welcher Weise dabei die

Wölbungen der Druck- und Saugseite des Profils systematisch abgeändert worden sind; Abb. 130b zeigt drei Profile mit konstanter Druckseite und abnehmender Wölbung der Saugseite, Abb. 130c drei Profile mit konstanter Saugseite und abnehmender Wölbung der Druckseite. Man beachte dabei auch die geringe Änderung der Polardiagramme in dem praktisch wichtigsten Bereich $C_a = 60$ bis $C_a = 100$. Kleiner Minimalwiderstand wird in der Regel durch strebenförmige Ausgestaltung der Vorderkante und auch durch leichtes Aufbiegen des Hinterendes des Profils erzwungen. Ein hohes Auftriebsmaximum kann durch starke Wölbung und spitzes

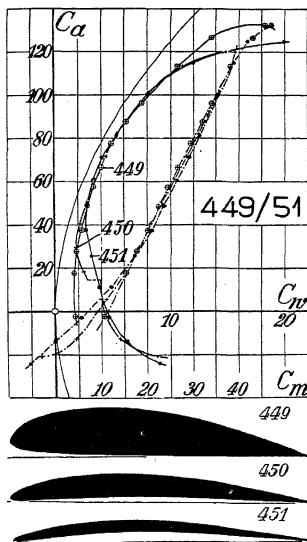



Abb. 131.
Profile verschiedener Dicke und gleicher mittlerer Wölbung.

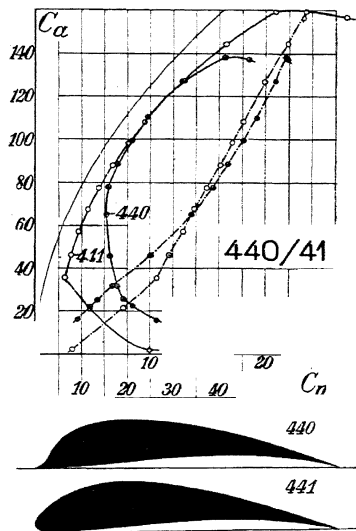



Abb. 132.
441 Profil mit hohem Auftriebsbeiwert.
440 Einfluß der Entstellung der Kopfform.

Zulaufen des Hinterendes erreicht werden. Für die praktische Brauchbarkeit eines Profils sind aber natürlich auch konstruktive Gesichtspunkte besonders entscheidend. Für die Holmkonstruktion wird immer eine bestimmte Dicke unbedingt verlangt werden müssen. Ist der dicke Flügel richtig gebaut, so braucht er keineswegs einen größeren Widerstand zu haben als der dünne. Die folgenden Abbildungen, die sämtlich Göttinger Messungen entnommen sind, mögen als Beispiele dienen.

Abb. 131 zeigt drei Profile verschiedener Dicke und gleicher mittlerer Wölbung: die aerodynamische Überlegenheit des dicken — konstruktiv allein verwendbaren — Profils tritt deutlich hervor. In Abb. 132 findet man ein Profil von besonders hohem Größtwert des Auftriebsbeiwertes; ein beigegebenes entstelltes Profil

zeigt, wie stark die Änderung der Kopfform ein Profil schädigend beeinflußt. Wieder verschwinden die Abweichungen in einem mittleren Bereiche. Solche seltsamen Abweichungen von der normalen Profilform haben fast immer eine starke Herabsetzung der Güte zur Folge. Abb. 133 zeigt einige besonders dicke Formen gleicher Wölbung, die in der (II § 8) auseinandergesetzten Weise nach Joukowsky gezeichnet sind. In Abb. 134a, b, c sind Profile mit kleinem Minimalwiderstand zu sehen; bei Abb. 134b und c ist bemerkenswert, daß C_w bis zu ganz niedrigen C_a-Werten herab sehr klein ist, was bei strebenförmiger Ausgestaltung des Kopfes meist der Fall ist.

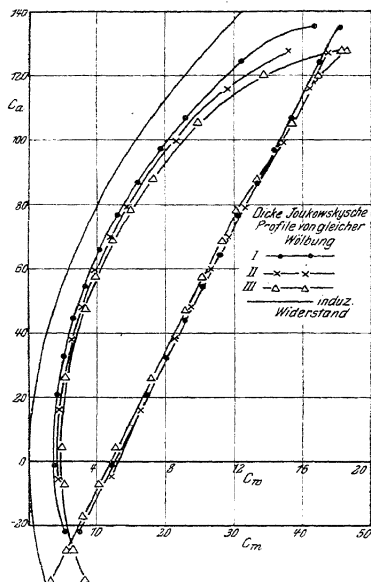



Abb. 133.

Die Beispiele sollen an dieser Stelle nicht vermehrt werden. Eine gute Übersicht über die Eigenschaften einer großen Reihe von Profilen kann man etwa aus der Mitteilung 17 der aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen gewinnen (Technische Berichte der Flugzeugmeisterei II 3 S. 407 ff.). Leider fehlt es zur Zeit noch an Material für die Eigenschaften der Profile bei höheren Anstellwinkeln. Da wir diese Lücke im II. Teil an einigen Stellen empfinden werden, sei in Abb. 135 wenigstens ein Kurvensystem für ein Profil bei allen Anstellwinkeln angegeben, das gleichfalls nach einer Göttinger Messung gezeichnet ist.

Einen vielleicht zukunftsreichen Weg zur Erzielung wesentlich höherer Luftkraftbeiwerte haben in neuester Zeit Lachmann und Handley Page mit ihren Schlitzflügeln beschritten. Die Durchströmung des Schlitzes bei großen Anstellwinkeln verhindert ein Abreißen der Strömung auf der Saugseite des Flügels und erzwingt damit sehr hohe C_a-Werte. Die Strömung, die bei normalen Flügeln bei etwa 15°

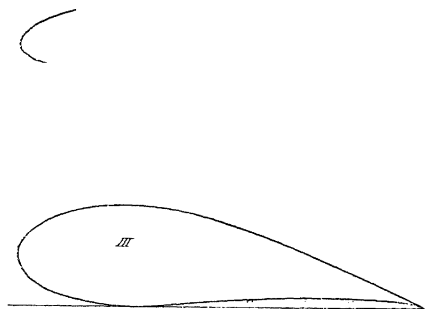
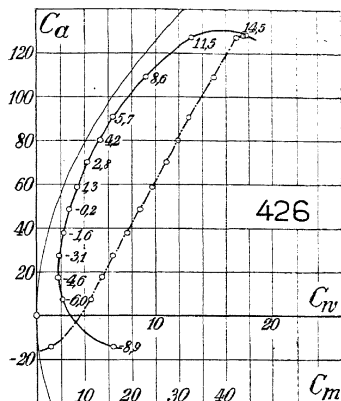



Abb. 134a.

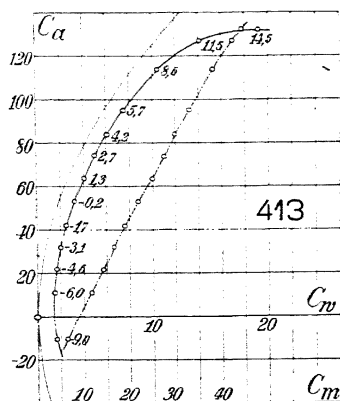
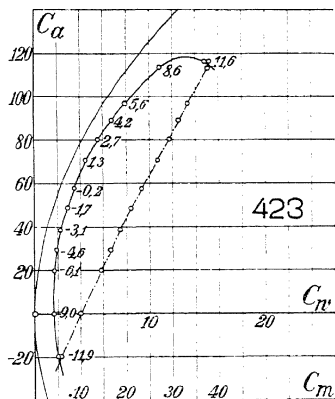



Abb. 134b.

Abb. 134c.

abreißt, legt sich jetzt bis über 45° hinaus an die Saugseite an. Abb. 136 zeigt die Wirkung der Schlitze nach Lachmann: starke Erhöhung von C_w bei kleinem C_a, merkliche Vergrößerung des Minimalwertes von $\frac{C_w}{C_a}$ und ganz wesentliche Erhöhung

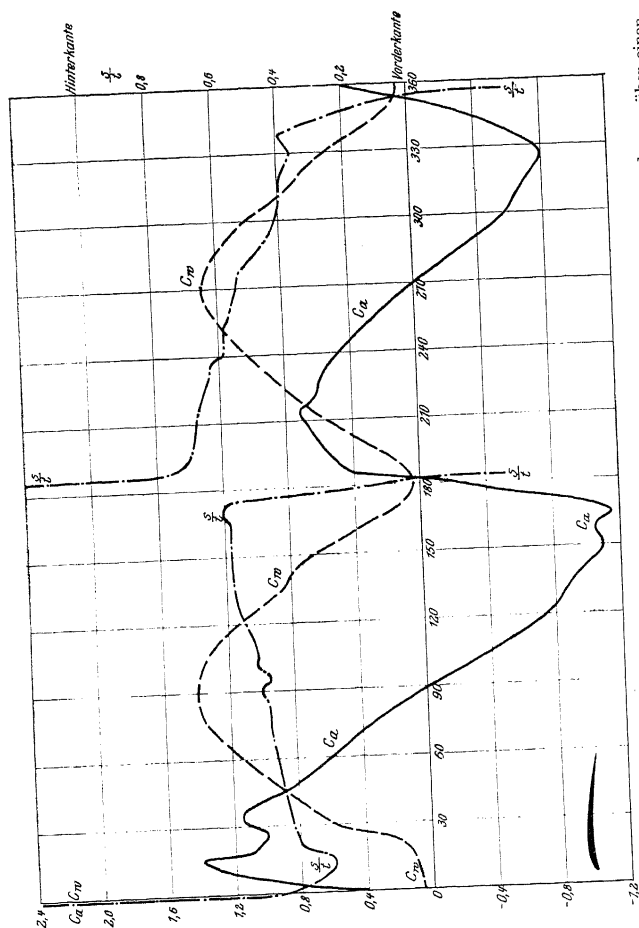



Abb. 135. Messung eines Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes sowie der Druckpunktswanderung über einen Anstellwinkelbereich von 0° bis 360°.

Abb. 136. Wirkung der Schlitze bei Spaltflügeln.

Abb. 137. Einfluß der Spaltbreite bei Spaltflügeln.

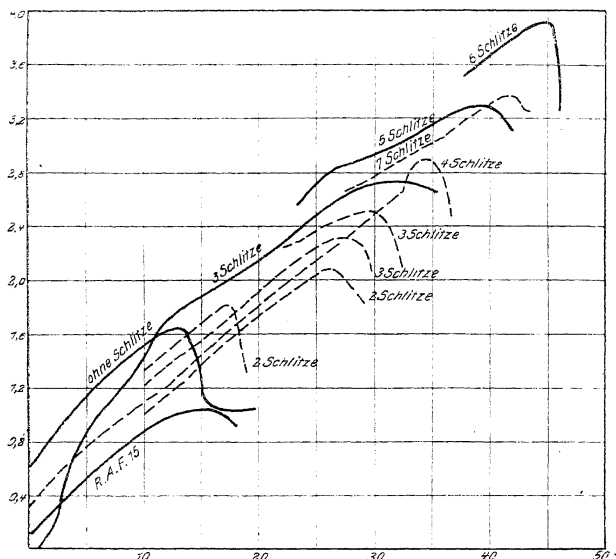



Abb. 138. Steigerung des Auftriebs bei Vermehrung der Anzahl der Schlitze.

des Größtwertes von C_a. Abb. 137, nach einer Göttinger Messung von Wieselsberger gibt die Art der Ausbildung nach Handley Page und den systematischen Einfluß der Schlitzbreite. Abb. 138 endlich zeigt, nach einer englischen Messung mit verschiedenen Profilen, wie hoch die Werte von C_a getrieben werden können, wenn man in der Unterteilung immer weiter geht. Über die günstigste Form und die Lage der Schlitze sowie über die Beziehung zum Ablösungspunkt am Flügel ist wohl das letzte Wort noch nicht gesprochen.[1])

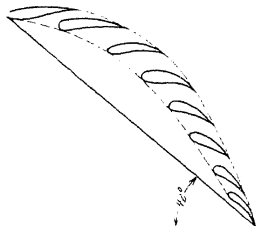



Abb. 138 a.

§ 3. Leitwerk.

Die meisten Messungen der Versuchsanstalten, die über Steuerorgane — jetzt meist Leitwerk genannt — angestellt worden sind, beziehen sich auf das **Höhenleitwerk**. Das Höhenleitwerk besteht aus der festen **Flosse** und dem beweglichen **Ruder**.

[1]) Es sei hier auf die während des Druckes erschienene Arbeit von **Betz**, Die Wirkungsweise von unterteilten Flügelprofilen, hingewiesen.

Für die Mechanik des Fluges wird sich vor allem die auf der Leitwerksfläche senkrecht stehende Komponente der Luftkraft, die Normalkraft, als wichtig erweisen, die im gewöhnlichen Anstellwinkelbereich vom Auftrieb nicht sehr stark verschieden ist. Wir führen diese Normalkraft in der Form

$$N = \frac{C_{n\,H}}{100}\, q\, F_H, \quad c_{n\,H} = \frac{C_{n\,H}}{100} \qquad (2)$$

ein, wo $C_{n\,H}$ die Normalkraftszahl, q den Staudruck und F_H die Fläche des Leitwerkes bedeutet. Da es darauf ankommt, einmal für $C_{n\,H}$ absolut große Werte zu bekommen, vor allem aber den Anstieg der zugehörigen Kurve mit wachsendem

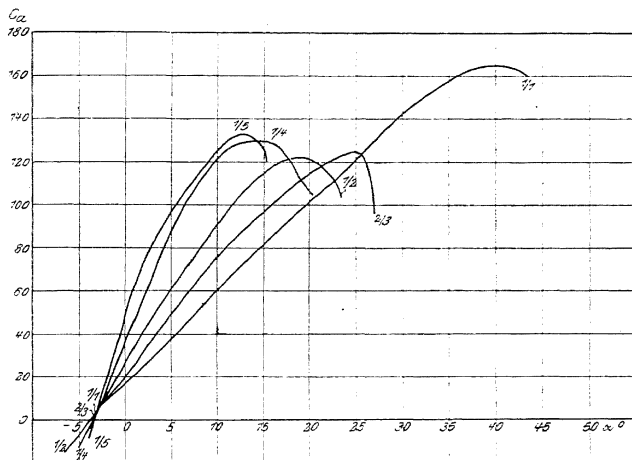



Abb. 139. Auftrieb bei Rechtecken mit verschiedenem Seitenverhältnis.

Anstellwinkel $\frac{d\,C_{n\,H}}{d\,\alpha}$ groß, den Widerstand aber klein zu gestalten, so werden viele von den Gesichtspunkten, die bei der Auswahl von Tragflügeln und Tragflügelprofilen maßgebend waren, auch hier von Bedeutung sein. Zunächst das Seitenverhältnis, worunter hier der Wert größte Tiefe durch größte Spannweite verstanden sei. In Abb. 139 sind nach den Messungen von Foeppl die Auftriebszahlen von Rechtecken gleicher Wölbung mit verschiedenem Seitenverhältnis in Abhängigkeit vom Anstellwinkel gezeichnet. Man sieht, daß die breite Form (kleines Seitenverhältnis) der schmalen im Bereiche der kleinen Anstellwinkel durchaus überlegen ist. Wenn das $C_{a\,max}$ für die schmale Form größer ist, so kommt das dagegen nicht in Betracht, sofern es sich um die normale heutige Flugzeugbauart handelt, weil dieses Maximum erst bei einem Anstellwinkel auftritt, der praktisch für das Höhenleitwerk nicht mehr vorkommt, um so mehr, als der Anstell-

winkel des Höhenleitwerks wegen der flacheren Einstellung gegen die Schraubenachse und besonders wegen des von den Flügeln herrührenden Abwindes erheblich kleiner ist, als der der Flügel. Es ist also die breite Form der schmalen durchaus vorzuziehen. Demgegenüber ist der Einfluß der Umrißform von geringerer Bedeutung. In Abb. 140 sind einige Leitwerksumrißformen gezeichnet, die aus einem ebenen Rechteck (Seitenverhältnis 1 : 2) herausgeschnitten sind; dazu sind in Abb. 141 die Werte von $C_{n\,H}$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α gezeichnet und in Abb. 142 entsprechend die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes von $C_{n\,H}$.

Da beim heutigen Normaltyp die Luftkraft am Leitwerk gleichmäßig positive

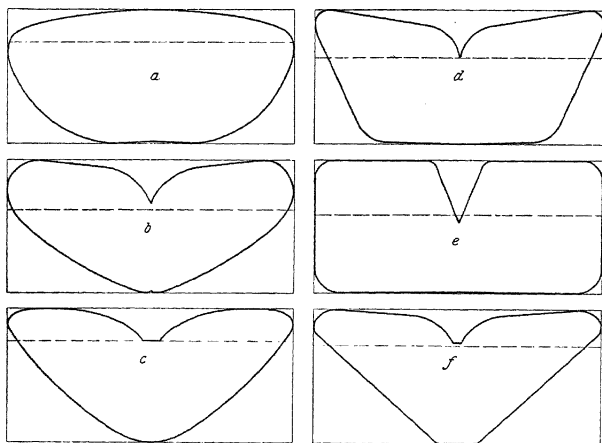



Abb. 140. Leitwerkumrißformen.

und negative Werte annehmen muß, werden dafür meist symmetrische Profilformen ausgewählt; dabei ist aber die Auswahl des Profils schon deshalb nicht gleichgültig, weil sie, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, sehr wesentlich den Kleinstwert des Widerstandes beeinflußt. In Abb. 143 sind einige Profilformen (Rechtecke mit dem Seitenverhältnis 3 : 5) und ihr Minimalwiderstand nach Göttinger Messungen eingetragen.

Zur Veranschaulichung der Abhängigkeit der Normalkraftzahl vom Ruderausschlag dient Abb. 144, wo der Verlauf von $C_{n\,H}$ für verschiedene Ausschläge ϑ des Ruders gegen die Flosse zu sehen ist; die beigegebene Skizze zeigt, in welcher Richtung dabei ϑ positiv gezählt wird. Abb. 144a zeigt das bei der Messung verwendete Profil. Abb. 145 gibt zugleich für einige Ruderausschläge die Größe des Widerstandsbeiwertes in Abhängigkeit von $C_{n\,H}$. Die verhältnismäßig geringe Veränderung des Minimalwiderstandes dabei erklärt sich durch den ein-

springenden Winkel (s. die Abb. 144a) an der Stoßstelle von Flosse und Ruder; durch diese Einrichtung wird bei kleineren ϑ-Werten ein ausspringender Winkel zwischen Flosse und Ruder vermieden.

Von Wichtigkeit ist weiter die Kenntnis des sog. Rudermomentes, d. i. das

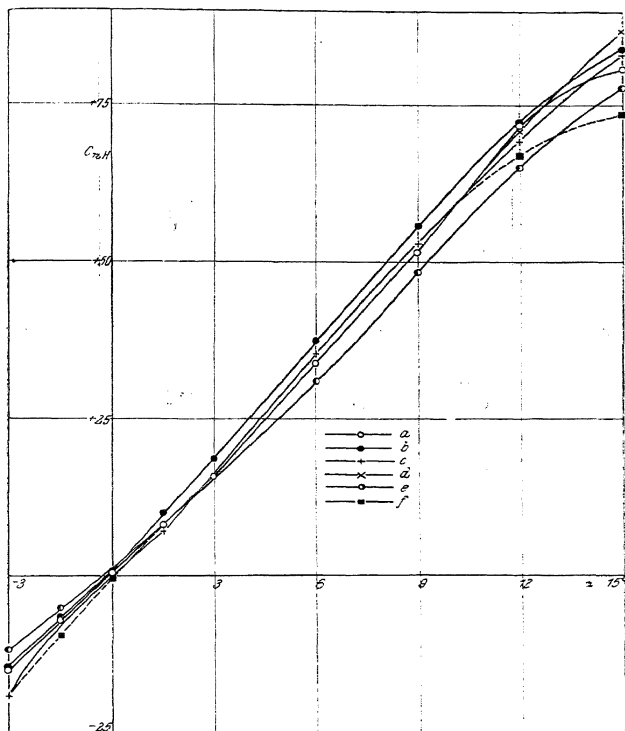



Abb. 141. Normalkraftbeiwerte entsprechend den Umrißformen der Abb. 140.

Moment der Luftkraft um die Ruderachse, welches für die vom Führer aufzuwendende Kraft maßgebend ist. Bei den Göttinger Messungen, die in Abb. 146 wiedergegeben sind, wird die Rudermomentszahl $c_r = \frac{C_r}{100}$ in der Weise angegeben, daß das Moment durch $F^{3/2}$ (F die Fläche des ganzen Leitwerks) und den Staudruck q dividiert wird. Da es sich bei diesen Messungen um Rechtecke vom

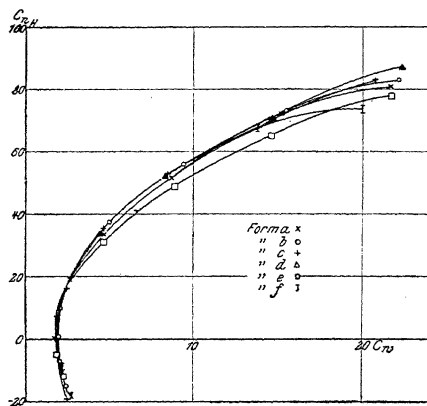



Abb. 142. Widerstandsbeiwertszahlen entsprechend den Umrißformen der Abb. 140.

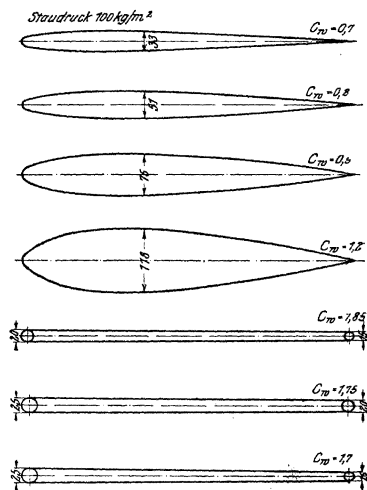



Abb. 143. Kleinstwerte des Widerstandsbeiwertes einiger Leitwerkprofile.

Seitenverhältnis 1 : 3 handelt, hat man bei einer Übertragung auf beliebige Rechtecke

$$M \qquad C_r \ldots \tag{3}$$

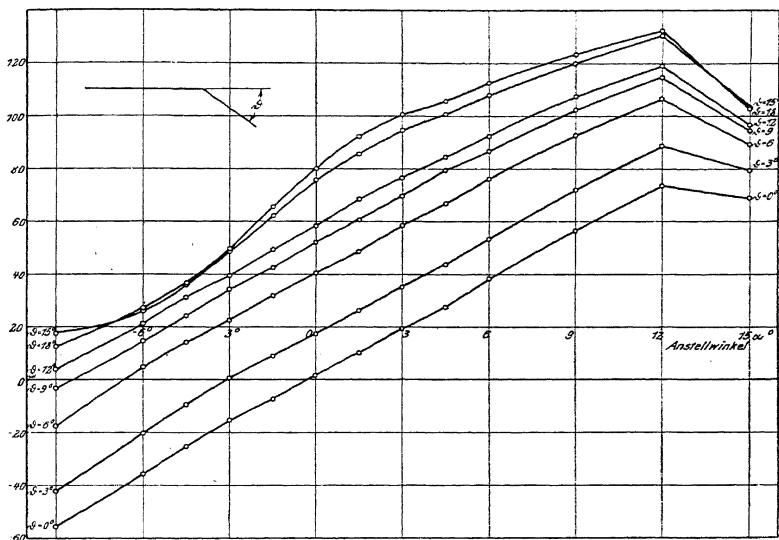



Abb. 144. Normalkraftszahl abhängig vom Anstellwinkel und vom Ruderausschlag.

zu nehmen, wenn b die Spannweite und t die Tiefe des Leitwerks bedeutet; dabei ist dann allerdings der Einfluß des Seitenverhältnisses außer Acht gelassen. In unserer Abbildung ist C_r für verschiedene Werte von

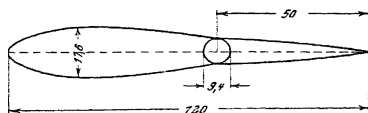
$$\frac{\text{Fläche des Ruders}}{\text{Fläche des ganzen Leitwerkes}}$$

angegeben, und zwar, was besonders interessiert, in Abhängigkeit von $C_{n\,H}$.

Abb. 144a.

In Abb. 147 ist entsprechend die Widerstandzsahl C_w in Abhängigkeit von $C_{n\,H}$ zu sehen.

Eine weitere Göttinger Messung (Abb. 148) gibt an, wie sich das Rudermoment ändert, wenn die Ruderachse um ¼ der Rudertiefe nach hinten verschoben wird, so daß bei Ausschlägen des Ruders ein offener Schlitz zwischen Flosse und Ruder entsteht. Auch dabei handelt es sich um ebene Rechtecke vom

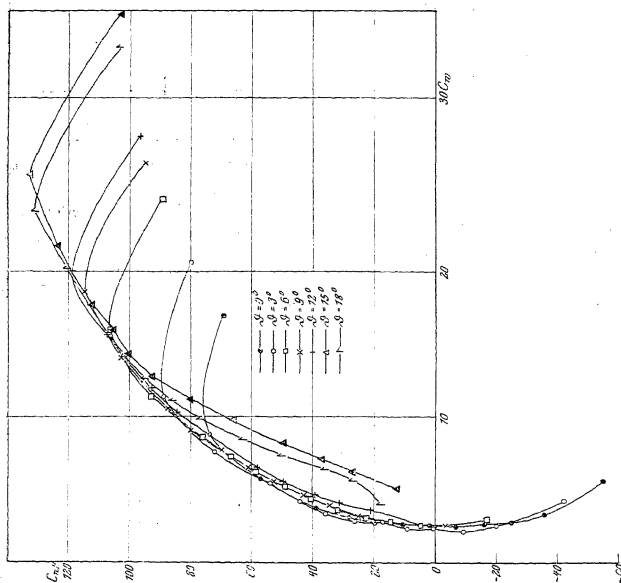



Abb. 145. Widerstandsbeiwerte bei Änderung der Ruderneigung.

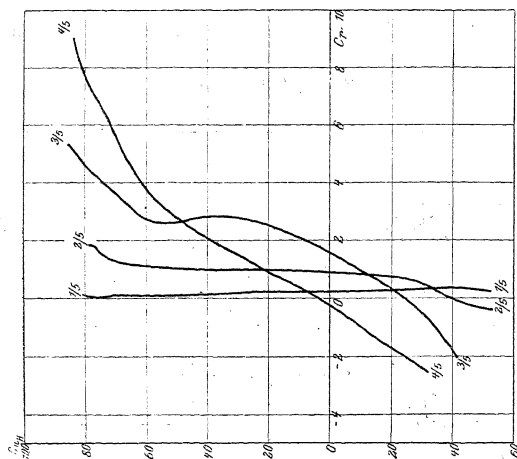



Abb. 146. Rudermomentszahl für verschiedene Werte von $\dfrac{\text{Fläche des Ruders}}{\text{Fläche des ganzen Leitwerks}}$.

Seitenverhältnis 1 : 3, während die Rudertiefe $^1/_4$ der Gesamttiefe ausmacht. Die zu erwartende Wirkung einer Verkleinerung des Rudermomentes bei verschobener Ruderachse tritt deutlich hervor. Diese günstige Wirkung wird aber dadurch er-

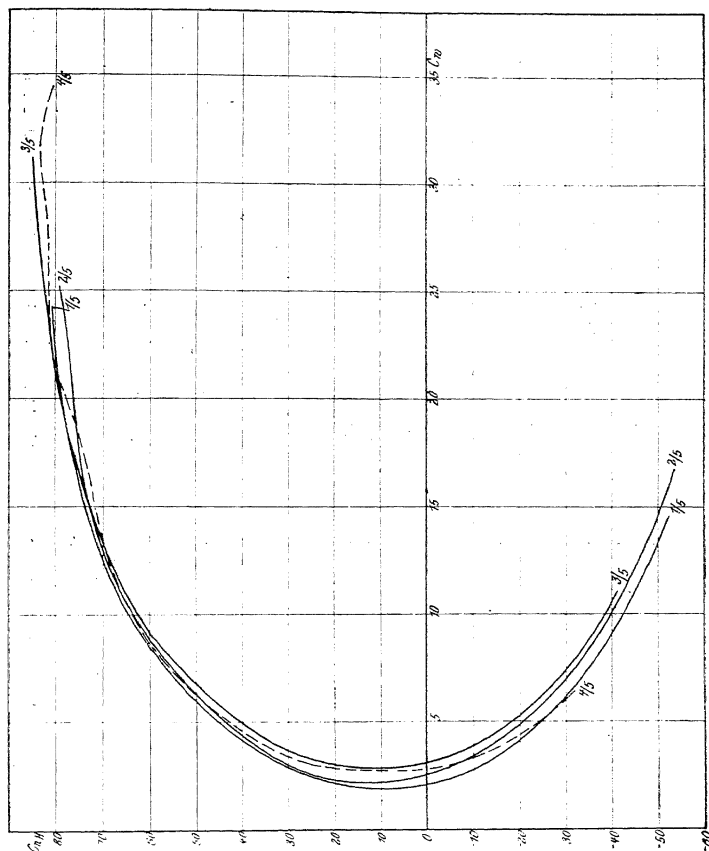
heblich herabgemindert, daß bei größeren Ausschlägen ϑ seltsame Anomalien in der Normalkraft auftreten (Abb. 149) und daß die Werte des Widerstandsbeiwertes (Abb. 150) bedeutend heraufgesetzt werden.

Um eine Vorstellung davon zu geben, wo die Resultierende der Luftkraft beim Leitwerk angreift, sind in Abb. 151 für einige Werte von Rudertiefe durch

Abb. 148. Rudermomentszahl bei verschobener und nicht verschobener Ruderachse.

Abb. 149. Normalkraftszahl bei verschobener und nicht verschobener Ruderachse.

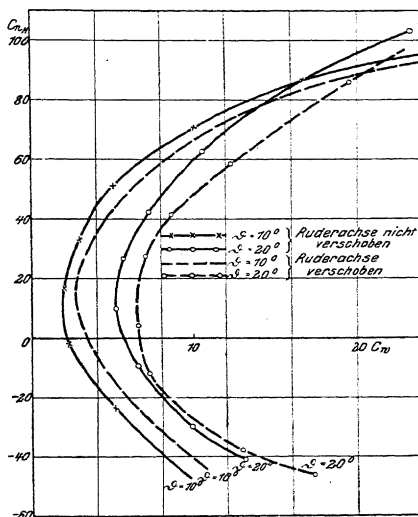



Abb. 150. **Widerstandsbeiwerte bei verschobener und nicht verschobener Ruderachse.**

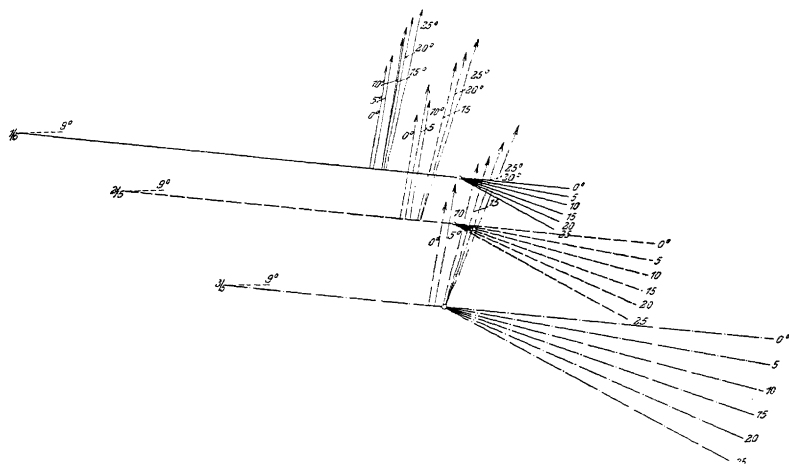



Abb. 151. Angriffspunkt und Größe der **Luftkraft** für einige Werte von $\frac{\text{Rudertiefe}}{\text{Gesamttiefe}}$ des Leitwerks.

Gesamttiefe die Luftkraft und ihr Angriffspunkt bei verschiedenen Ruderausschlägen und einem Anstellwinkel von 9⁰ eingezeichnet. —

Bei größeren Anstellwinkeln und Ruderausschlägen kann man die Größe der Rudernormalkraft angenähert ermitteln, wenn man die Annahme macht, daß die Luftkraft je auf Flosse und Ruder senkrecht steht. Für kleine Winkel kann man diese Annahme nicht machen, da die Reibungskräfte nicht mehr klein gegen die Normalkraft sind. In der folgenden Tabelle ist die Größe der Rudernormalkraft N im Vergleich zur Resultierenden R der ganzen auf das Leitwerk wirkenden Luftkraft bei einem Anstellwinkel von 9^0 und einem Ruderausschlag von 20^0 und für verschiedene Werte von Rudertiefe durch Gesamttiefe des Leitwerks angegeben. Diese Werte geben einen Anhalt dafür, wie sich die Luftkraft auf Flosse und Ruder verteilt, was für statische Fragen von Bedeutung ist.

$\frac{\text{Rudertiefe}}{\text{Leitwerktiefe}}$	1/5	2/5	3/5	4/5
$\frac{N}{R}$	0,156	0,374	0,569	0,732

§ 4. Rumpf und Kühler.

Außer an Flügel und Leitwerk greift aber natürlich die Luftkraft auch an allen übrigen Teile des Flugzeuges an. Im wesentlichen kommt dabei aber nur eine Kraft in Richtung der Bewegung, also ein Widerstand, den man schädlichen Widerstand zu nennen pflegt, in Betracht. Nur bei zwei Teilen kann auch der Auftrieb nicht ganz außer acht gelassen werden: beim Rumpf und beim Kühler. Diese beiden Flugzeugteile sollen daher hier gesondert behandelt werden. Es zeigt sich bei Rumpfprüfungen, daß die Messung der Luftkraft nur einen geringen Wert hat, wenn der Rumpf losgelöst von allen übrigen Teilen untersucht wird, und besonders, wenn idealisierte Modelle zugrunde gelegt werden. Die am wirklichen Flugzeugrumpf hervorragenden Teile und dort vorhandenen Öffnungen machen sich sehr stark beim Widerstand geltend, und andererseits wird der Rumpfauftrieb durch das Vorhandensein der Flügel entscheidend beeinflußt. Von den älteren Messungen mögen hier die Messungen von Fuhrmann an Ballonmodellen erwähnt werden. Bei diesen Messungen wurde theoretisch und experimentell die Verteilung des Druckes über die Oberfläche untersucht und daraus der Widerstand bestimmt. Setzt man dabei den Widerstand wieder in der Form

$$W = {}_{100}\, q F \qquad (4)$$

an, wobei unter F der größte Querschnitt, senkrecht zur Flugrichtung — Hauptspant — verstanden ist, so ergeben die Fuhrmannschen Messungen einen zu kleinen, für Flugzeugrümpfe daher nicht zu brauchenden Wert: das günstigste der Fuhrmannschen Modelle gibt $C_w = 4{,}2$.

Um den Verhältnissen am wirklichen **Flugzeugrumpf** besser gerecht zu werden, hat Munk ein Modell eines A. E. G.-Flugzeugrumpfes durchgemessen; dabei wurde einerseits das aus den Teilen *a* und *b* bestehende Modell durch ein aufgesetztes

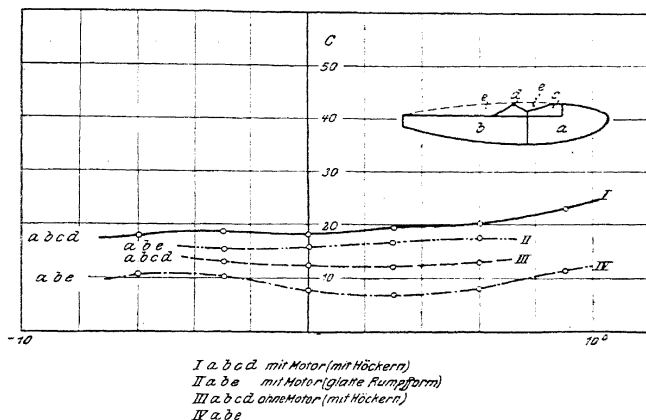



Abb. 152. Widerstandszahlen bei Rumpfmessungen.

Stück *e* (vgl. in der zu Abb. 152 beigegebenen Skizze die punktierte Linie) zu einem glatten, vollständig geschlossenen ballonartigen Körper ergänzt, andererseits wurden höckerartige Stücke *c* und *d* aufgesetzt; auch das Modell eines Stand-

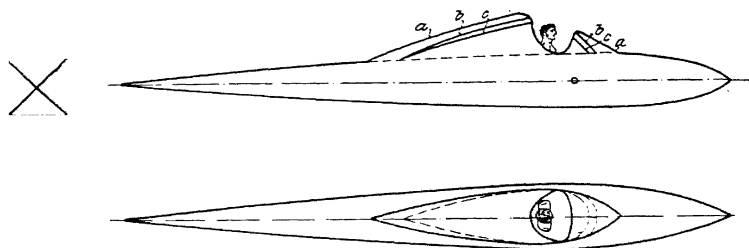



Abb. 153. Skizze zu Rumpfmessungen nach Bairstow.

motors konnte noch hinzugefügt werden. Das Ergebnis der Messungen zeigt die Abb. 152. Man sieht, daß die Widerstandszahl vom glatten Modell bis zum Modell mit Höckern und Motor von 7 bis 18 ansteigt. Andere Rumpfmessungen finden sich bei Bairstow. Bei einem Rumpf mit vorderem und hinterem Windschild

(Formen a, b, c der Skizze Abb. 153) ergeben sich die Widerstandszahlen C_w: Form a 25; Form b 29,4; Form c 40,8.

Zur Erläuterung des Auftriebes, den der Rumpf erfährt, diene die Abb. 154, ebenfalls nach einer Göttinger Messung. Man sieht dort einerseits die Auftriebsfläche $\frac{A}{q}$ des Rumpfes und die Widerstandsfläche $\frac{W}{q}$, wenn der Rumpf in den Unterflügel eines Doppeldeckers eingebaut ist und andererseits dieselben Zahlen ohne Flügelzelle. Es zeigt sich, daß der Auftrieb durch die Luftströmung um die

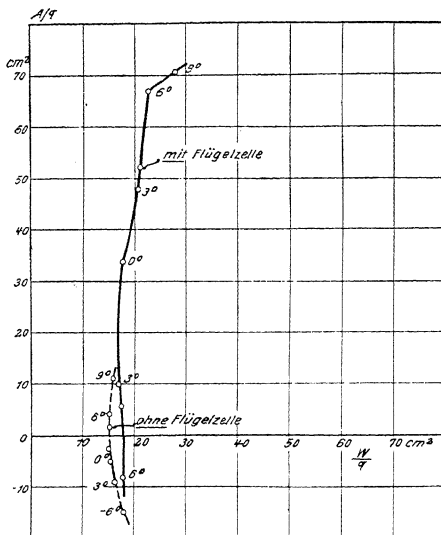



Abb. 154. Rumpfmessung mit und ohne eingebaute Flügelzelle.

Flügel sehr wesentlich vergrößert wird. Um ein Urteil über die Größe des Rumpfauftriebes im Zusammenhang mit der Flügelzelle zu erhalten, legen wir gleichfalls eine Göttinger Doppeldeckermessung für die einzelnen Flügel zugrunde. Die Auftriebsbeiwerte für den Unterflügel allein sind die danach in Reihe II der folgenden Tabelle angegebenen Werte. In Reihe III steht der Wert von $\frac{A}{q}$ nach Abb. 154. Dazu bestimmen wir in Reihe IV diejenige Breite x des Unterflügels, welche erforderlich ist, um denselben Auftrieb wie der Rumpf zu liefern. Da bei der Rumpfmessung die Flügeltiefe des Doppeldeckers 16,8 cm bei beiden Flügeln betrug, erhalten wir zur Bestimmung von x den Ansatz: $16{,}8 \cdot x \frac{C_a}{100} = \frac{A}{q}$.

I	Anstellwinkel	0°	3°	6°
II	C_a	30,3	48,1	65,1
III	$\frac{A}{q}$ in cm²	34	48	67
IV	x in cm	6,68	5,94	6,13

Da die Rumpfbreite 8,5 cm betrug, so sehen wir, daß der Rumpfauftrieb danach im Mittel 75 vH des Ausschnittes, den er vom Unterflügel wegnimmt, auszugleichen vermag.

Um auch ein Urteil darüber zu gewinnen, welchen Einfluß die Höhenlage des Flügels gegenüber dem Rumpf ausübt, sei in den Abb. 156 *A*, *C*, *E* wieder eine Göttinger Messung wiedergegeben; die Kurve für den Flügel ohne Rumpf ist dabei jedesmal gestrichelt angegeben. Abb. 155 gibt die dabei ver-

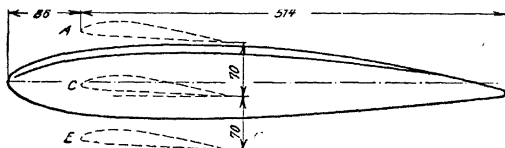



Abb. 156A.

Abb. 155. Verschiedene Lagen des Flügels zum Rumpf.

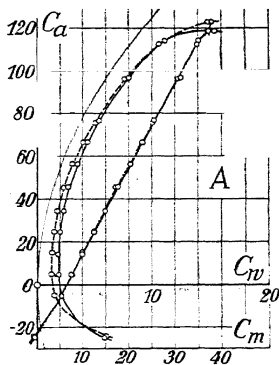
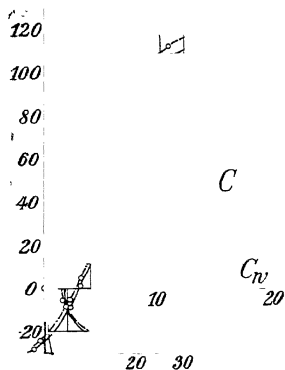



Abb. 156 C.

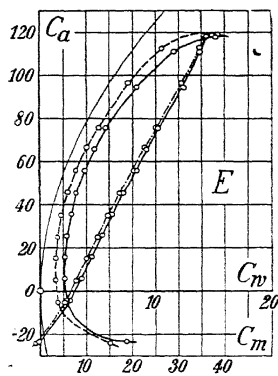



Abb. 156 E.

wendete Flügellage den drei Anordnungen entsprechend. Der rechteckig umrandete Flügel besaß eine Spannweite von 90 cm und eine Tiefe von 18 cm, der Rumpf

eine größte Breite von 71 cm und eine Länge von 60 cm. Man sieht, daß die Anordnung E eine nicht unerhebliche aerodynamische Verschlechterung gegenüber den anderen gibt.

Bei dem Einfluß der Kühler auf die Luftkraft haben wir zwischen Stirnkühlern, Tragflügelkühlern und Rumpfkühlern zu unterscheiden. Eine Reihe von Göttinger Messungen über Stirnkühler zeigen, daß das quadratische Widerstandsgesetz gut erfüllt ist. Als Beispiel mögen Abb. 157 und 158, zwei Messungen an einem Rumpler-Kühler dienen. Bei der zu Abb. 158 gehörigen Messung war an den Kühler ein Flügelstück von der Breite des Kühlers befestigt: man erkennt, wie stark die Luftkraft auch hier durch den Flügel beeinflußt wird. Eine bestimmte Gesetzmäßigkeit bei einer Neigung des Kühlers kann dabei nicht abgelesen werden. Setzt man den Widerstand wieder durch

an, wo F_{st} die gesamte Stirnfläche des Kühlers bedeutet, so liefern die Göttinger Messungen für einige Kühler folgende Werte:

Kühler	Motorleistung in PS	Widerstandszahl C_w
1. Mercedes	220	73,6
2. Mercedes	160	64,5
3. Rumpler mit Flügelansatz	160	48,7
4. Rumpler ohne Flügelansatz	160	58,8
5. Windhoff	160	68,7
6. Windhoff	160	63,3

Eine andere Reihe von Messungen untersucht den Einfluß, den die Stellung eines Kühlers auf die Luftkraft ausübt. Bei diesen Versuchen war der Kühler durch einen mit Stramin überspannten Rahmen von der Breite $b = 6{,}1$ cm und der Höhe $h = 2{,}7$ cm nachgebildet, so daß seine Durchlässigkeit ungefähr die eines gewöhnlichen Stirnkühlers war. Das Modell wurde in drei Stellungen an der Vorderkante des Oberflügels eines Doppeldeckers angebracht, so daß sich erst seine Oberkante, dann seine Mitte und endlich seine Unterkante in der Vorderkante des Flügels befand. Für den Oberflügel war $b = 65$ cm, $t = 12$ cm; für den Unterflügel $b = 58$ cm, $t = 10$ cm; der Flügelabstand betrug 10,5 cm und es war eine Staffelung von 3 cm vorhanden. Das Ergebnis der Messungen zeigt Abb. 159. Man erkennt, daß es aerodynamisch am günstigsten ist, den Kühler unter den Flügel zu stellen; doch hat diese Anordnung wegen der behinderten Sicht kaum Verwendung gefunden. Um die Wirkung des Tragflügelkühlers damit vergleichen zu können, wurde ein Modell, Breite $b = 69$ cm, Tiefe $t = 46$ cm dadurch hergestellt, daß man ein entsprechendes Stück des Oberflügels ausschnitt und die Öffnung mit Stramin überspannte. Das Ergebnis der Messung findet man in Abb. 160 wiedergegeben, wobei der Tragflügelkühler mit dem günstigsten Stirnkühler und dem Flügel ohne Kühler

verglichen wird. Man erkennt, daß hinsichtlich des sehr stark verminderten Auftriebs der Tragflügelkühler weitaus am ungünstigsten ist, wenn auch der Widerstand

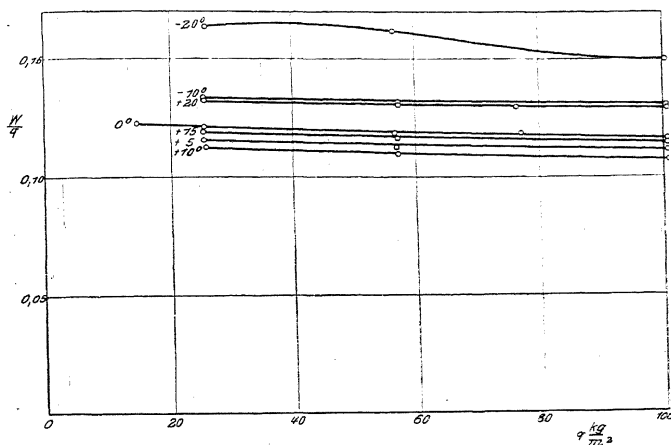



Abb. 157. Rumpler-Kühler ohne eingebautes Flügelstück bei verschiedener Neigung des Kühlers gegen den Luftstrom.

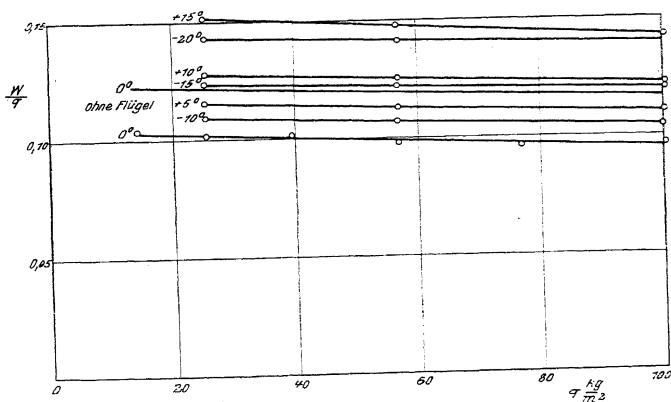



Abb. 158. Rumpler-Kühler mit eingebautem Flügelstück bei verschiedener Neigung gegen den Luftstrom.

bei ihm etwas geringer ist. Um den Auftriebsverlust durch die beiden Kühler beurteilen zu können, wollen wir wieder die Fläche berechnen, um welche die

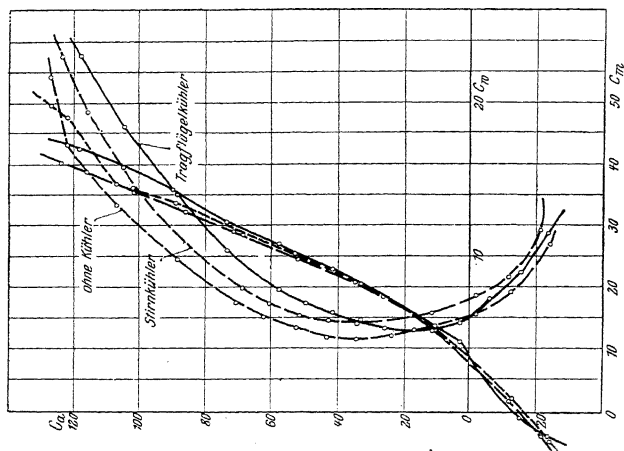



Abb. 160. Vergleich des Tragflügelkühlers mit dem günstigsten Stirnkühler.

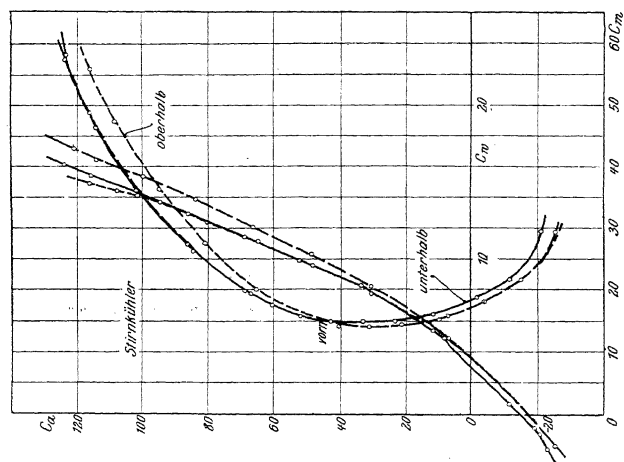



Abb. 159. Verschiedene Lagen eines Stirnkühlers gegenüber dem Oberflügel eines Doppeldeckers.

Flügelfläche vermindert werden muß, um dem Ausfall an Auftrieb durch den Kühler zu entsprechen. Ist F_K diese Fläche, C_a^* der Auftriebsbeiwert des Flügels mit Kühler, F die Gesamtflügelfläche (Oberflügel + Unterflügel) und C_a der Auftriebsbeiwert der Zelle ohne Kühler, so hat man zu setzen:

$$C_a\,(F - F_K) = C_a^* F \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Für das Modell ist $F = 780 + 580 \text{ cm}^2 = 1360 \text{ cm}^2$. Legt man der Rechnung die Zahlenwerte für $0 < \alpha < 15^0$ zugrunde, so findet man für F_K die in der folgenden Zahlentafel angegebenen Mittelwerte. Zum Vergleich ist noch die Fläche F_K^* = Kühlerbreite mal Flügeltiefe eingetragen und in der letzten Spalte die Zahl, die angibt wieviel Prozent F_K von diesem Werte F_K^* ausmacht.

Kühler	F_K = Verlust an Flügelfläche entsprechend der Auftriebsverminderung in cm²	F_K^* = Kühlerbreite mal Flügeltiefe in cm²	$100 \frac{F_K}{F_K^*}$
Stirnkühler unter dem Oberflügel	52	73,2	71
Stirnkühler vor dem Oberflügel	98		
Stirnkühler über dem Oberflügel	142	73,2	194
Tragflügelkühler	248	82,8	300

Eine weitere Reihe von Göttinger Messungen wurden zur Klärung der Frage angestellt, ob bei gleichbleibender Kühlwirkung ein in den Rumpfbug eingebauter Kühler, Rumpfkühler, einen kleineren Widerstand vom Rumpf und Kühler zusammen ergibt als eine Anordnung, bei welcher Rumpf und Kühler getrennt angebracht sind. Das Ergebnis der Messungen ist in Abb. 161 wiedergegeben. Es wurden gemessen: 1. der Widerstand des Rumpfes mit einer besonderen Kappe, um eine gute Rumpfform zu erzielen; 2. Rumpf ohne Kappe; 3. Rumpf mit einem eingebauten Modellkühler, wobei die durchströmende Luft durch alle seitlichen Schlitze (9 auf jeder Seite) abströmte; 4. wie bei 3, wobei nur je vier vordere Schlitze geöffnet waren; 5. wie bei 3, hier waren je vier hintere Schlitze geöffnet; 6. wie bei 3, hier strömte die Luft durch das geöffnete Rumpfende ab; 7. der Widerstand des Kühlers für sich; 8. Rumpf mit Modellkühler (getrennt); 9. Rumpf mit Rumpler-Kühler; 10. Rumpf mit Mercedes-Kühler. Die beiden letzten Versuche waren nötig, weil der Modellkühler keinen die Stirnfläche vergrößernden Wasserbehälter besitzt. Hinsichtlich des Widerstandes tritt also ein erheblicher Vorteil des Rumpfkühlers gegenüber dem freistehenden Kühler hervor. Gleichzeitig wurde auch die Durchflußmenge der Luft in Abhängigkeit von der Luftgeschwindigkeit gemessen (Abb. 162) und daraus die Abhängigkeit von $\frac{W}{q}$ von der Durchflußmenge bei verschiedenen Geschwindigkeiten ermittelt (Abb. 163). Die gestrichelten Geraden der letzten Abbildung geben den Zusammenhang für den Fall des vom Rumpf getrennten Kühlers, die durchgezogenen für den eingebauten Kühler. Wir sehen also,

daß beim eingebauten Kühler die Durchflußmenge, die als Maß für die Kühlwirkung gilt, geringer wird. Würde man den Kühler durch Anbau weiterer Felder vergrößern, so würde damit auch das Gewicht des Kühlers größer, wodurch der Vorteil des geringeren Widerstandes in Frage gestellt werden könnte.

Durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung, die wir Herrn Blasius verdanken, läßt sich zeigen, daß die Vergrößerung des Gewichtes vermieden werden kann, wenn man der geringeren Druckdifferenz beim eingebauten Kühler entsprechend, den Kühler weitmaschiger und weniger tief baut:

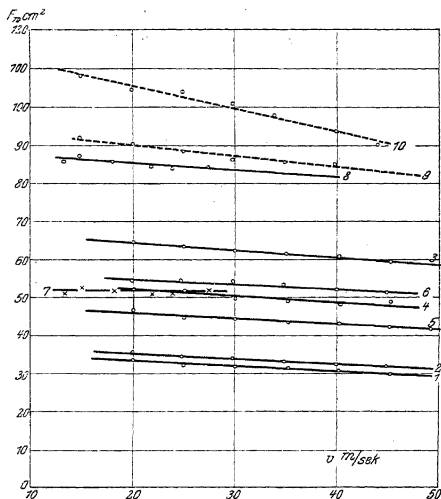



Abb. 161.

Kühlerwiderstände: 1. Rumpf mit Kappe; 2. Rumpf ohne Kappe; 3. Rumpf mit Kühler und alle (2 × 9) seitlichen Schlitze offen; 4. je 4 vordere Schlitze offen; 5. je 4 hintere Schlitze offen; 6. Luftabfluß durch das Rumpfende; 7. Modellkühler für sich; 8. Rumpf mit freistehendem Modellkühler; 9. Rumpf mit Rumpler-Kühler; 10. Rumpf mit Mercedes-Kühler.

Ein im freien Luftstrom stehender Kühler habe ein bestimmtes Gewicht und eine bestimmte Kühlwirkung; wir haben zu zeigen, daß man für eine geringere Druckdifferenz einen Kühler von gleichem Gewicht und gleicher Wärmeabfuhr angeben kann. Die Wärmeabfuhr ist proportional der Kühlertiefe t und der Wurzel aus der Maschenweite f, der Luftgeschwindigkeit im Kühler und der Anzahl n der Röhrchen:

$$W \sim t \sqrt{f}\, v_K\, n.$$

Für das Gewicht G haben wir:

$$G \sim t \sqrt{f}\, n.$$

Die Druckdifferenz vor und hinter dem Kühler hängt mit der Geschwindigkeit der Luft und der Geschwindigkeit im Kühler durch die Gleichung

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = \frac{\rho}{2} v_K^2 \left(1 - \zeta \frac{t}{\sqrt{f}}\right)$$

zusammen, wo ζ einen Zahlenfaktor bedeutet. Sollen nun G und W gleichzeitig konstant sein, so folgt, daß man in den zu vergleichenden Fällen v_K gleich machen

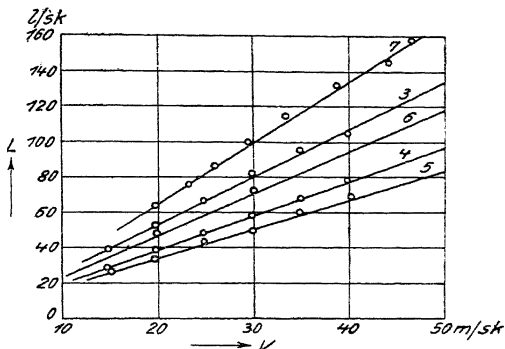



Abb. 162. Abhängigkeit der Durchflußmenge von der Geschwindigkeit.

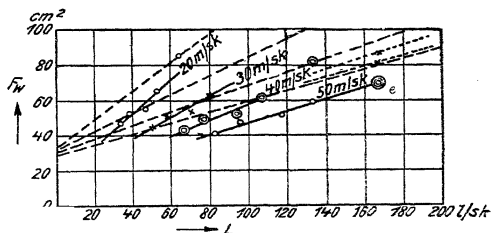



Abb. 163. Abhängigkeit der Widerstandsfläche von der Durchflußmenge bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

muß. Dann folgt aber aus der Druckformel, daß, bei kleiner werdendem p, $\frac{t}{\sqrt{f}}$ kleiner werden muß. Aus der Gewichtsformel folgt andererseits, daß $t\sqrt{f}$ in beiden Fällen dasselbe sein muß, wodurch dann auch gleiche Wärmeabfuhr gewährleistet ist, da ja v_K konstant ist. Die beiden Forderungen, $\frac{t}{\sqrt{f}}$ zu verkleinern, $t\sqrt{f}$ konstant zu halten, sind aber miteinander vereinbar, wenn man t verkleinert und f geeignet vergrößert, also bei geringerer Druckdifferenz zu weitmaschigeren und kürzeren Kühlern übergeht. Auf diese Weise wird die Gewichtsvermehrung, nicht aber die Flächenvergrößerung gegenüber dem freistehenden Kühler vermieden.

§ 5. Andere schädliche Widerstände.

Bei der Untersuchung des Widerstandes von Streben wollen wir (s. Abb. 164) die Länge EF mit l, die größte Breite CD mit d und die Tiefe AB mit t bezeichnen. Wir setzen das Widerstandsgesetz auch hier wieder in der Form

C . . . . (7)

an, indem wir unter F, wenn die Strebe senkrecht und in Richtung der Symmetrieachse angeblasen wird, die Fläche $d \cdot l$ verstehen. Bei einer Neigung der Strebe um den Winkel φ kommt dann wegen der Verkleinerung der Stirnfläche, zu F noch der Faktor $\cos\varphi$ hinzu. Bei der Bestimmung des Widerstandsbeiwertes C

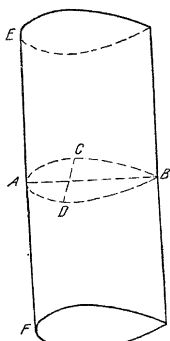



Abb. 164.

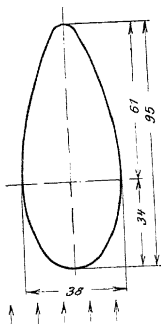
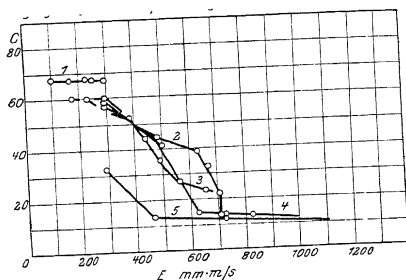



Abb. 165. Kritisches Kennwertgebiet einer Strebe.

muß ganz besonders beachtet werden, daß C keine Konstante, sondern (vgl. S. 185) eine Funktion der Reynoldsschen Zahl

ist.

Bei der Wiedergabe von Laboratoriumsversuchen wollen wir wieder an Stelle der Reynoldsschen Zahl den Kennwert

$$E = v \,.\, d \text{ m/s} \cdot \text{mm}$$

einführen. Die Abhängigkeit vom Kennwert ist sehr verschieden, je nach der Form der Strebe. Wie wir schon in § 1 gesehen haben, gibt es immer eine kritische Reynoldssche Zahl, oder wie wir jetzt sagen, einen kritischen Kennwert, bei welchem C plötzlich von höheren zu erheblich tieferen Werten heruntergeht. Handelt es sich um ein zylindrisches Rohr, so zeigt ein Blick auf Abb. 120 S. 188, daß der kritische Kennwert (70. Teil der Reynoldsschen Zahl)

erst bei 4900 liegt. Bei einer Fluggeschwindigkeit von 40 m/s würde dieser Wert erst bei dem sehr großen Rohrdurchmesser von 120 mm erreicht werden und auch nach Überschreitung des kritischen Wertes noch größer als 30 bleiben. Solche kreisförmige Profilformen müssen also bei Streben durchaus vermieden werden. Bei anderen Formen, bei denen $d : t$ kleiner als $1/2$ ist, liegt der kritische Kennwert glücklicherweise erheblich tiefer. So zeigt z. B. (Abb. 165) ein Strebenprofil ($d : t = 1 : 2{,}5$), das sich als besonders günstig erweist, einen kritischen Kennwert 700. Nach Überschreiten dieses Wertes ist C auf etwa 12 heruntergegangen. Vor dem kritischen Gebiete, also vor etwa $E = 300$, ist aber C erheblich größer; im kritischen Gebiete selbst schwankt der Wert von C bei verschiedenen Versuchen: die kleinsten Zufälligkeiten, wie verschiedene Rauhigkeit der Oberfläche der Strebe oder kleine Abweichungen in der Profilform genügen, um andere Strömungsformen hervorzurufen und damit einen anderen Verlauf von C zu ergeben. Es ist also in erster Linie von Wichtigkeit, nur solche Strebenformen zu verwenden,

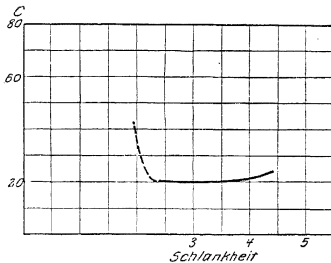



Abb. 166. Widerstandsbeiwert abhängig von der Schlankheit des Strebenprofils.

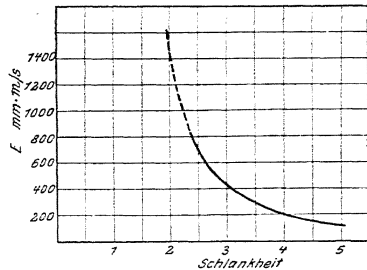



Abb. 167. Schlankheit und zugehöriger Grenzkennwert bei Streben.

bei denen der Kennwert im gewöhnlichen Fluge den kritischen Bereich überschritten hat. Überblickt man eine große Anzahl von Messungen, wie sie in Göttingen von Munk ausgeführt worden sind, so sieht man, daß die jetzt in der Praxis gebrauchten Profilformen fast alle ihren kritischen Kennwert bei $E = 700$ überschritten haben. Bei 40 m/s Geschwindigkeit ist das kritische Gebiet also bei $d = 18$ mm bereits überschritten. Die Profilformen, die sich als gut erwiesen haben, sind alle vorn abgerundet und verjüngen sich nach hinten.

Ist die Bedingung erfüllt, daß bei einer Geschwindigkeit von etwa 40 m/s der kritische Kennwert überschritten ist, so kann man weiter fragen, welches der beste Wert von $d : t$ ist. Der reziproke Wert $t : d$ wird auch die Schlankheit des Profils genannt. Um die Frage nach dem günstigsten Werte der Schlankheit zu klären, hat Munk eine Reihe von Messungen mit Strebenprofilen ausgeführt, die vorn elliptisch abgerundet waren und ihre größte Breite in etwa $1/3$ der Tiefe hatten. Abb. 166, in der das Resultat dieser Messungen wiedergegeben ist, zeigt, daß der günstigste Wert von $\frac{t}{d} = 2{,}5$ ist; Abb. 167 gibt zu jedem Werte der Schlankheit den zu-

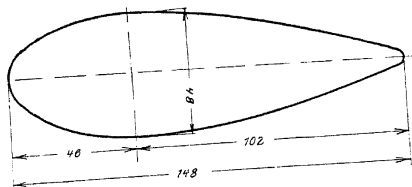
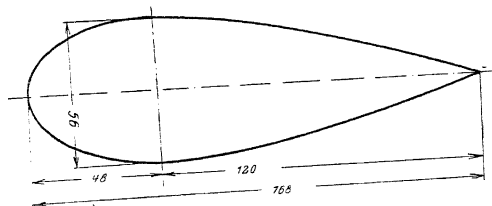
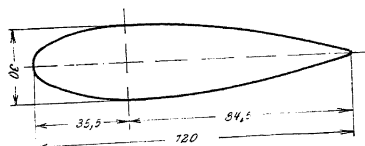
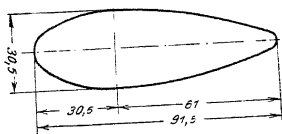
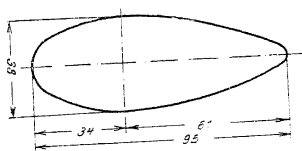



Abb. 168. Günstige Strebenprofile.

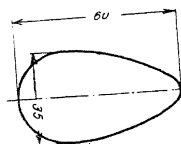
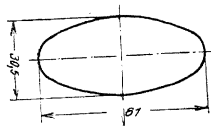
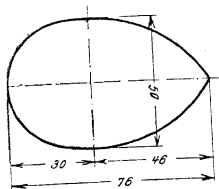



Abb. 169. Ungünstige Strebenprofile.

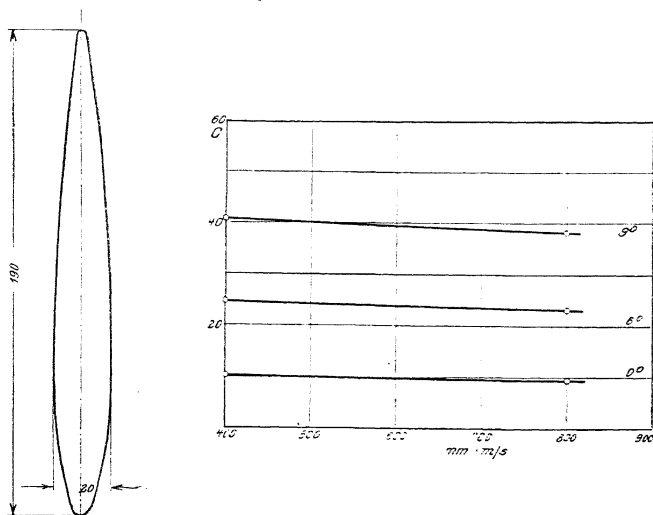



Abb. 170. Widerstandsänderung bei der Drehung einer Strebe mit sehr schlankem Profil.

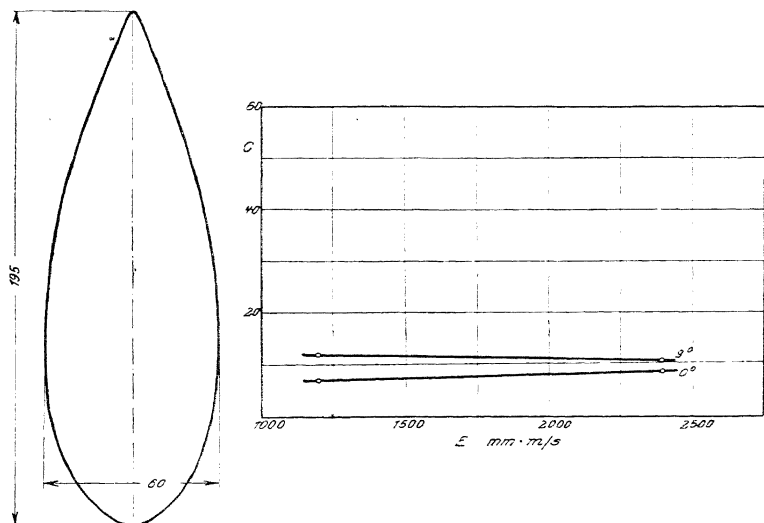



Abb. 171. Widerstandsänderung bei der Drehung einer Strebe mit normalem Profil.

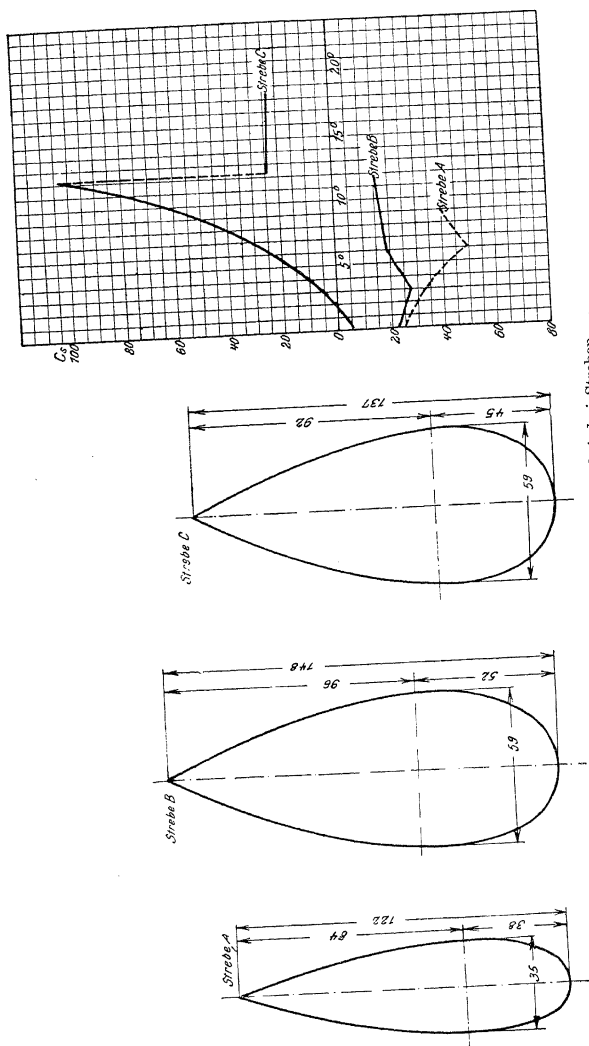



Abb. 172. Seitenkraftmessung bei drei Streben.

gehörigen Grenzkennwert, bei welchem das kritische Gebiet überschritten ist. Daß bei diesen Versuchen jedoch noch nicht die günstigsten Profilformen zugrunde gelegt waren, zeigt der Vergleich mit Abb. 165. Einige gute Profilformen findet man außer in Abb. 165 auch in Abb. 168: für solche Formen kann man bei C etwa den Wert 12 zugrunde legen. Bei weniger günstigen Formen (vgl. Abb. 169), bei denen $\frac{d}{t}$ über 0,5 hinaus geht, muß man C größer, etwa 30, annehmen; bei diesen Profilen liegt der Grenzkennwert oft nicht unerheblich über 700. Man darf aber die Schlankheit nicht zu groß werden lassen: geht man mit $\frac{t}{d}$ über den Wert 4 hinaus, so macht sich die Oberflächenreibung bemerkbar und der Wert von C nimmt wieder zu.

Bei der Beurteilung des Strebenwiderstandes müssen aber auch die Abweichungen von der Normallage berücksichtigt werden: einerseits die Drehung um die Achse, andererseits die Neigung gegen die Senkrechte zum Luftstrom. Gegen Drehung ist der Widerstand besonders bei schlanken Formen empfindlich, was aus einem Vergleich von Abb. 170 und Abb. 171 ersichtlich ist, wo das Meßergebnis für ein schlankes und ein dickeres Strebenprofil wiedergegeben ist. Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß bei der Drehung auch eine Seitenkraft auftritt, die dem Auftrieb bei Flügelprofilen analog ist. Diese Seitenkraft wird normalerweise erst bei größeren Drehungen merklich und ist dann ebenso wie der Auftrieb bei den Flügeln gerichtet. Abb. 172 zeigt eine Göttinger Seitenkraftmessung; man sieht, daß dabei starke Ungleichmäßigkeiten auftreten können.

Hinsichtlich der Neigung von Streben gegen die Senkrechte zum Luftstrom ist zu sagen, daß dabei, wie schon bemerkt, die Stirnfläche verringert wird; da sich durch die Neigung aber offenbar die Schlankheit vergrößert, so wird dadurch, besonders bei ungünstigeren Profilen, der Widerstand noch stärker herabgesetzt.

Zur Beurteilung des Widerstandes von Seilen und Drähten, die senkrecht zum Luftstrom liegen, mögen hier einige Göttinger Messungen von Pohlhausen Platz finden: (Abb. 173 und Zahlentafel dazu):

Zahlentafel.

Gegenstand	Breite	Tiefe in mm	Material-querschnitt	Mittlere Widerstandszahl C	Bruchlast Q in kg	
1. Profildraht	3,0	14	30,8	30,9	4620	49,8
2. ,, ...	2,5	12,5	23,9	36,6	3580	39,1
3. ,, ...	2,0	8	10,7	39,0	1605	20,6
4. ,, ...	2,5	6	12,1		1815	10,1
5. Seil: 7 Litzen zu 7 Drähten von 0,3 mm Durchmesser	2,8	2,8	3,5	108,2	525	1,7
6. Seil: 7 Litzen zu 7 Drähten von 0,5 mm Durchmesser	4,8	4,8		112,8	1470	

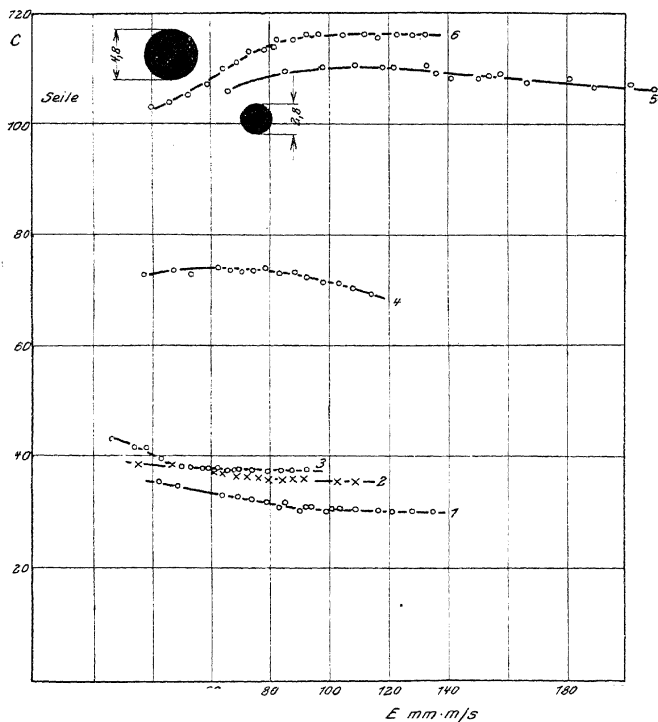
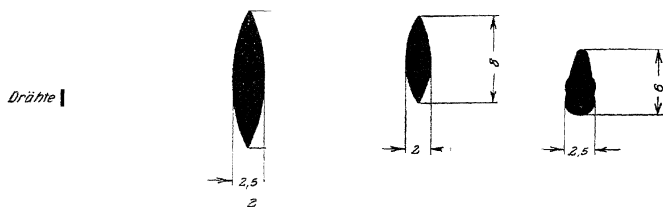



Abb. 173. Widerstandsbeiwerte für Seile und Profildrähte.

In der letzten Spalte dieser Tabelle ist das Verhältnis $\frac{\text{Bruc}}{\text{Luftwiderstand}}$ fü Widerstand eines Stückes von 1 m Länge bei 40 m/sek Windgeschwindigkeit berechnet; als Bruchspannung ist dabei der Wert 150 kg/mm² für die Seile und Drähte zugrunde gelegt.

Abb. 173 läßt erkennen, daß die Widerstandszahlen nicht sehr stark von der Geschwindigkeit abhängen und daß die Profildrähte den Seilen aerodynamisch bedeutend überlegen sind. Durch Lackieren der Drähte konnte ihr Widerstand noch um etwa 3,8 vH heruntergedrückt werden. Um bei Seilen und Drähten auch die Abhängigkeit des Widerstandes von der Neigung gegen die Senkrechte

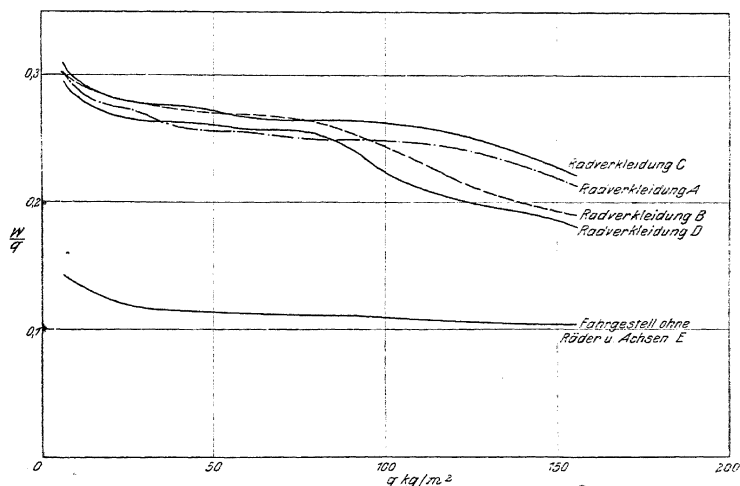



Abb. 174. Widerstand eines Fahrgestells.

zum Luftstrom berücksichtigen zu können, halten wir uns an eine Messung von Eiffel; danach hat man dabei einen Faktor $\varkappa$ zum Widerstand hinzuzufügen, der aus folgender Tabelle zu entnehmen ist (zum Vergleich ist $\cos \alpha$ hinzugefügt):

α^0	0	15	30	45	60
$\varkappa$	1	0,9	0,7	0,5	0,2
$\cos \alpha$	1	0,97	0,86	0,71	0,5

Als Beispiel für die Messung eines Fahrgestells geben wir in Abb. 174 eine Göttinger Messung von Wieselsberger wieder; es handelt sich um ein Fahrgestell des Flugzeugbaues Friedrichshafen mit Spiralfederung (Abb. 175). Es zeigt sich dabei deutlich der Einfluß der Art der Radverkleidung. Die Abb. 176 gibt die Verkleidungen wieder: A war eine gewöhnliche Stoffverkleidung, B, C, D Blech-

verkleidungen. Mit Benutzung des Widerstandes des Fahrgestells ohne Räder kann man aus der Messung auch einen Widerstandsbeiwert für Räder allein abnehmen. Wählt man als Bezugsfläche F die Stirnfläche der Räder senkrecht zur Windrichtung, so findet man beim Staudruck $q = 100\ \mathrm{kg/m^2}$ bei A: 48,1; B: 46,1; C: 52,8; D: 39,2; also im Mittel $C = 46{,}5$.

Einer Reihe von neuen Göttinger Messungen über Flugzeugschwimmer entnehmen wir als Beispiel Abb. 177

Abb. 175.

Abb. 176. Radverkleidungen.

und 178, die Messung an einem Modell nach einer Zeichnung des Seeflugzeug-Versuchs-Kommandos Warnemünde. Dabei ist gesetzt:

$$A = \frac{K_a}{100} V^{\frac{2}{3}} q, \quad W = \frac{K_w}{100} V^{\frac{2}{3}} q, \quad M = \frac{K_m}{100} V q,$$

unter V das Volumen des Schwimmers verstanden; das Moment M bezieht sich auf den vordersten Punkt der Spitze. Die sonst üblichen Werte C_a, C_w, C_m auf die Hauptspantfläche F bezogen, ergeben sich daraus in der Form:

$$C_a = K_a \frac{V^{2/3}}{F}, \quad C_w = K_w \frac{V^{2/3}}{F}, \quad C_m = K \quad V$$

Abb. 177. Flugzeugschwimmer.

wenn t etwa die Länge des Schwimmers bedeutet. Die in der Abb. 178 angegebene Änderung des Anstellwinkels erfolgt einmal in einer vertikalen, das anderemal in einer horizontalen Ebene (Kurvenflug). Beim Anstellwinkel 0° ergibt sich dabei $C_m = 21$.

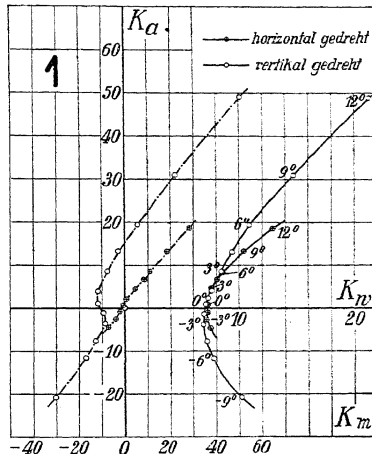
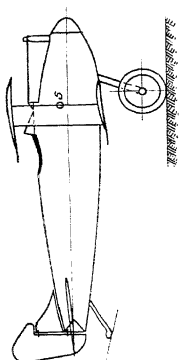
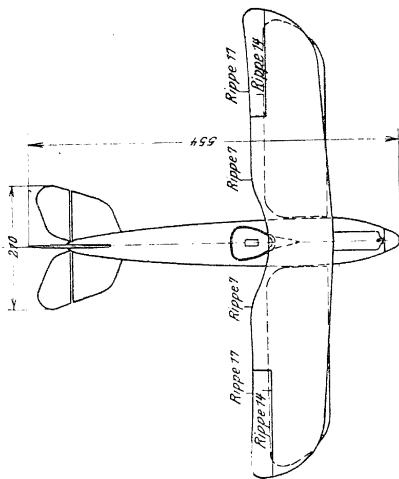
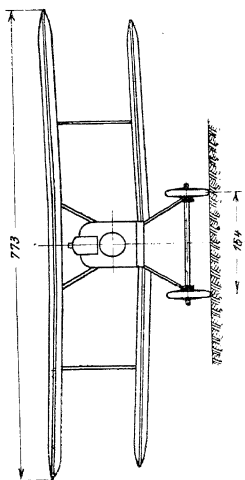



Abb. 178. Beiwerte einer Messung an Flugzeugschwimmern.

§ 6. Zusammenbau.

Wir beschäftigen uns in diesem letzten Paragraphen mit der Luftkraft, welche am ganzen Flugzeug angreift. In Göttingen sind auch einige Messungen an Modellen von ganzen Flugzeugen ausgeführt worden, von denen wir die mit dem Modell eines Aeg DI-Flugzeuges, angestellten Versuche hier als Beispiel angeben wollen. Die Abmessungen des Modells, das im Maßstab 1 : 11 hergestellt war, sind aus Abb. 179 bis 182 zu entnehmen. Das Modell ist ohne Schraube ausgeführt. Beim Staudruck 5 kg/m² sind drei Messungen (Abb. 183 I, II a und b, 184a und b, 184a und b) durchgeführt worden, bei denen je eines der beweglichen Ruder einen verschieden starken Anschlag hatte, während sich die beiden anderen in Mittellage befanden. Die Höhenflosse war dabei einmal (183 I) um 3° 45′, das andere Mal von (183 II) um 6° 30′ gegen die Motorachse eingestellt. Die Kräfte und Momente sind durch die Beiwerte angegeben, wobei als Bezugsfläche die Zellenfläche zuzüglich des durch den Rumpf ausgeschnittenen Stückes des Unterflügels genommen ist, so daß $F = 1480$ cm². Für die Momente kommt außerdem $F \cdot t = 17\,900$ cm³ in Betracht, wo t die größte Tiefe des Oberflügels bedeutet. Die Momente sind auf drei zueinander senkrechte Achsen durch den Schwerpunkt bezogen. Ein positives Höhenmoment drückt den Kopf nach unten, ein positives Quermoment hebt die rechte Flügelseite, ein positives Seitenmoment drückt den Kopf nach links. Daß

Quermomente beim Ausschlag Null auftreten, liegt wohl an einer ungleichen Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt des Luftstromes im Kanal.

Höhe d. Hauptspant	Breite	Länge
105	70	503

	größte Spannw.	Tiefe	Flächen	mittl. Abstand d. Flügel	Einstellwinkel gegen Motorachse
Oberflügel	773	121	833	135	Rippe 7 3°30' Rippe 11 2°30'
Unterflügel	735	92	582		Rippe 14 3°6'

	größte Breite	Tiefe	Fläche cm²	größte Breite	Tiefe	Fläche cm²
Höhenleitwerk	210	55	83,5	195	74	96,5
Seitenleitwerk	107	95	47,5	–	–	14,5
Querruder	185	30	95,0	–	–	–

Wenn wir nun dazu übergehen, die am ganzen Flugzeug angreifende Luftkraft aus den Kräften an den einzelnen Teilen abzuschätzen, so müssen wir uns von vornherein darüber klar sein, daß es sich hier nur um einen sehr dürftigen Notbehelf handelt. Denn Theorie und Messung haben uns ja gezeigt, daß wegen der

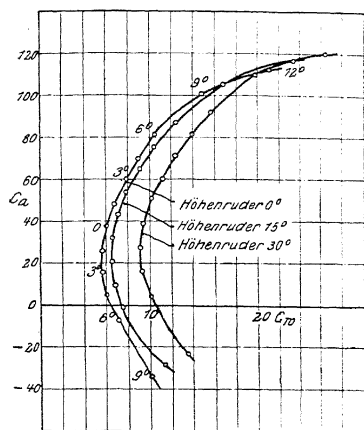



Abb. 183 I a. Ausschlag des Höhenruders. Einstellung der Höhenflosse 3° 45'.

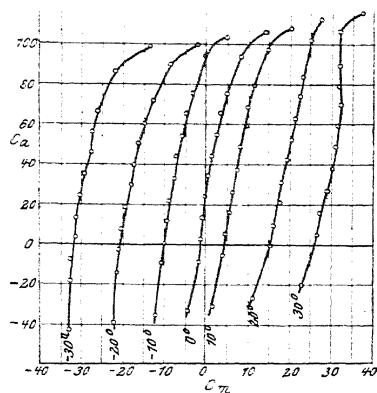



Abb. 183 I b. Höhenmomentzahl. Einstellung der Höhenflosse 3° 45'.

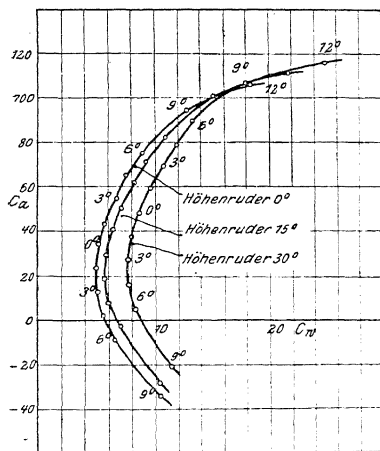



Abb. 183 II a. Ausschlag des Höhenruders. Einstellung der Höhenflosse 6° 30'.

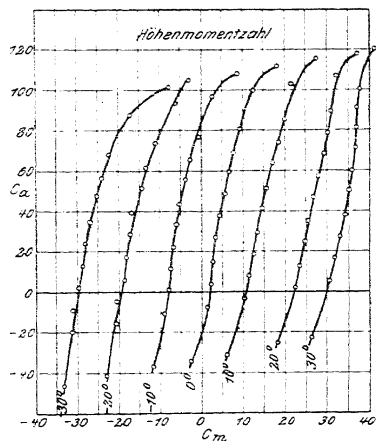



Abb. 183 II b. Höhenmomentzahl. Einstellung der Höhenflosse 6° 30'.

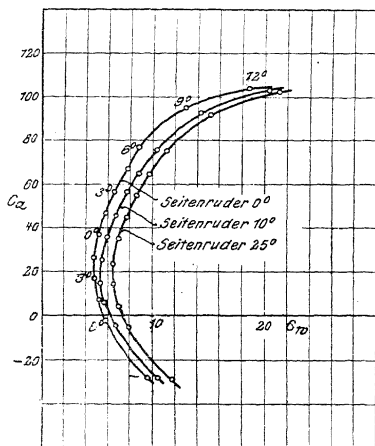



Abb. 184a. Anschlag des Seitenruders. Einstellung der Höherflosse 3° 45′.

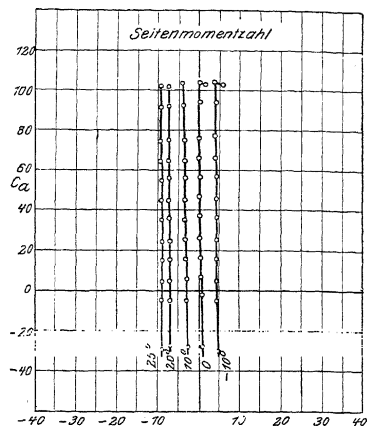



Abb. 184b. Seitenmomentzahl. Einstellung der Höhenflosse 3° 45′.

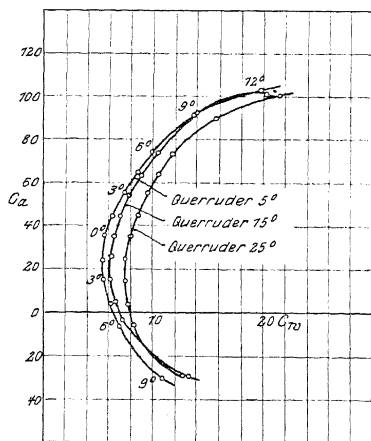



Abb. 185a. Ausschlag des Querruders. Einstellung der Höhenflosse 3° 45′.

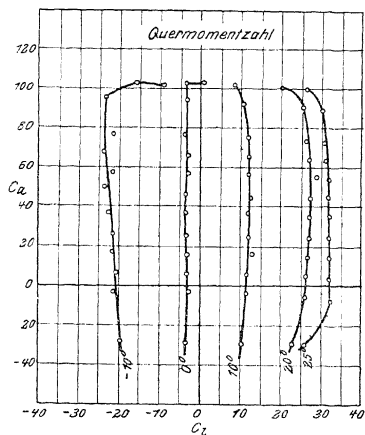



Abb. 185b. Quermomentzahl. Einstellung der Höhenflosse 3° 45′.

gegenseitigen Beeinflussung genau niemals die Gesamtkraft gleich der Summe der Kräfte wird, die an einzelnen voneinander getrennt liegenden Teilen gemessen sind.

Für den **Auftrieb** des ganzen Flugzeuges kommt in allererster Linie die an den Flügeln angreifende Kraft in Betracht. Wir haben in § 4 angegeben, wie dabei der Rumpfauftrieb in der Weise berücksichtigt werden kann, daß von dem Ausschnitt der Flügelfläche, die für ihn erforderlich ist, etwa 75 vH zur tragenden Fläche der Flügel hinzugefügt wird. Bei der Betrachtung der Kühler haben wir gesehen, daß ein Auftriebsverlust berücksichtigt werden muß, und haben gezeigt,

Zahlentafel 1: **Beiwerte schädlicher Widerstände.**

Nr.	Flugzeugteil	Bezugsfläche F_s	Widerstandsbeiwert C_{ws}
1	Streben	Stirnfläche senkrecht zur Luftströmung } wegen Neigung siehe § 5	12 bei $\frac{d}{t} < 0{,}5$ sonst 30
2	Drähte	„	130 bei $d \leqq 5$ mm, 100 bei $d > 0{,}5$ mm
3	Achse, Hilfsachse	„	40
4	Profildrähte	„	40
5	Sporn	„	53
6	Ruderhebel	„	40
7	Stirnkühler	„	68
8	Tragflügelkühler	Grundriß	95
9	Leitwerk	Gesamtfläche	5
10	Rumpf	Hauptspant	20
11	Motorteile, die aus dem Rumpf hervorragen	Stirnfläche	30
12	Schwimmer	Hauptspant	23
13	Boot	„	30
14	Räder (verkleidet)	Stirnfläche	46,5
15	Motor (unverkleidet)	„	100
16	Auspuff	„	61
17	Abfederung	„	20
18	Windschutzscheibe	„	30

wie dem durch eine Fläche F_K Rechnung getragen werden kann, die von der tragenden Fläche in Abzug zu bringen ist (vgl. die Zahlentafel auf S. 223).

Will man auch noch den Auftrieb des Höhenleitwerks berücksichtigen, so muß man folgendermaßen vorgehen:

Ist F_H die Leitwerksfläche (Ruder + Flosse), F die Flügelfläche, c_{aH} der Auftriebsbeiwert des Leitwerks, c_a der Auftriebsbeiwert der Flügel, so ist der Gesamtauftrieb

$$c_a q F + c_{aH} q F_H = q F \left(c_a + c_{aH} \frac{F_H}{F} \right)$$

man hat also das c_a der Flügel um den Betrag $c_{aH} \frac{F_H}{F}$ zu vergrößern. Die Größe von c_{aH} kann nur aus der Betrachtung des Momentengleichgewichts gefolgert werden (II. Teil, 2. Kapitel). Beim Normaltyp spielt dieser Auftrieb keine Rolle, beim Ententyp dagegen wird er wesentlich.

Zahlentafel 2: **Schädliche Widerstände eines zweisitzigen, zweistieligen, normal verspannten Doppeldeckers.** Flügelfläche $F = 34\ \text{m}^2$.

Flugzeugteil		Länge l m	Neigung α	Breite d m	Tiefe t m	Anzahl	Stirnfläche F_s m²		Widerstandsbeiwert c_w	$c_w F_s$ m²	Summe $c_w F_s \cdot \cos\alpha$ m²
Streben	I	0,50	15°	0,025	0,070	2	0,0125	0,357	0,12	0,0030	0,0029
Streben	II	1,20	50°	0,025	0,070	2	0,0300	0,357	0,12	0,0072	0,0046
Streben	III	1,80	10°	0,034	0,106	2	0,0612	0,320	0,12	0,0147	0,0145
Streben	IV	1,80	10°	0,040	0,123	2	0,0720	0,325	0,12	0,0173	0,0170
Streben	V	1,80	10°	0,029	0,090	2	0,0522	0,322	0,12	0,0125	0,0124
Streben	VI	1,80	10°	0,031	0,080	2		0,388	0,12	0,0134	0,0132
Streben, Fahrgestell	VII	1,20	30°	0,034	0,076	2	0,0408	0,448	0,12	0,0098	0,0085
Streben, Fahrgestell	VIII	1,20	70°	0,038	0,082	2	0,0456	0,454	0,12	0,0109	0,0037
Streben, Leitwerk	IX	1,35	0°	0,023	0,058	2	0,0311	0,397	0,12	0,0075	0,0074
Streben, Leitwerk	X	1,20	0°	0,024	0,060	2	0,0288	0,400	0,12	0,0069	0,0069
Verspannung	1	2,45	35°	0,005	—	2	0,0122		1,3	0,0317	0,0206
Verspannung	2	2,75	15°	0,0055	—	2			1,0	0,030	0,0270
Verspannung	3	2,47	10°	0,007	—	2	0,0173		1,0	0,0346	0,0328
Verspannung	4	2,75	—	0,0055	—	2	0,0151		1,0	0,0302	0,0302
Verspannung	5	2,50	—	0,0075	—	2	0,0188		1,0	0,0376	0,0376
Verspannung		1,70	10°	0,0035	—	4	0,0060		1,3	0,0312	0,0296
Verspannung		2,20	20°	0,0035	—	4	0,0077		1,3	0,0400	0,0340
Verspannung	8	3,20	—	0,005	—	4	0,0160		1,3	0,0832	0,0832
Verspannung	9	3,20	—	0,0035	—	4	0,0112		1,3	0,0583	0,0583
Verspannung	10	1,70	—	0,0035	—	2	0,0060		1,3	0,0156	0,0156
Verspannung, Fahrgestell	11	1,50	30°	0,007	—	2	0,0105		1,0	0,0216	0,0147
Verspannung, Fahrgestell	12	1,60	70°	0,0055	—	2	0,0088		1,0	0,0176	0,0026
Kühler		Fläche 0,23 m²				1	0,23		0,68	0,156	0,156
Seitenruder und flosse		Fläche 0,99 m²				1			0,050	0,0495	0,0495
Höhenruder und flosse		Fläche 3,68 m²				1			0,050	0,184	0,184
Räder		0,75	—	0,125	—	2	0,094	—	0,465	0,0874	0,0874
Rumpf		Hauptspant 1,07 m²				1	1,07	—	0,2	0,214	0,214
Achse		1,40	—	0,06	0,2	1	0,084	0,3	0,12	0,0101	0,0101
Motor		Im Rumpf berücksichtigt									
Auspuff		Stirnfläche 0,0516 m²				1	0,0516	—	0,61	0,0155	0,0314
Abfederung		0,15	—	0,12	—	2	0,018	—	0,2	0,0072	0,0072
Bremse											
Sporn		0,4	30°	0,04		1	0,016	—	0,53	0,00848	0,0073

Streben . . . 0,091. Räder . . . 0,087.
Verspannung . 0,386. Rumpf . . . 0,336.
Kühler . . . 0,156. Achse . . . 0,010.
Leitwerk . . 0,234.
Übrige Teile 0,0458.

Summe $c_w F_s = 1{,}214$

$$\frac{c_w F_s}{F} = 0{,}0358.$$

Auch für den Widerstand kommen in erster Linie die Flügel in Betracht. Um auch die Widerstände der übrigen Teile, schädliche Widerstände, in Rechnung zu setzen, was hier nicht unwesentlich ist, sei C_{ws} der Widerstandsbeiwert irgendeines dieser Teile, F_s seine Bezugsfläche (was darunter zu verstehen ist, wird in

Zahlentafel 3: **Schädliche Widerstände eines einsitzigen, einstieligen verspannungslosen Doppeldeckers.** Flügelfläche $F = 20{,}8\ m^2$.

Flugzeugteil		Länge l m	Neigung α	Breite d m	Tiefe t m	Anzahl	Stirnfläche F_s m^2	Widerstandsbeiwert c_w	$c_w F_s$ m^2	Summe $c_w F_s \cdot \cos\alpha$ m^2
Streben	I	1,50	30°	0,016	0,042	4	0,024	0,12	0,0105	0,0100
	II	1,20	0°	0,015	0,042	2	0,018	0,12	0,0043	0,0043
	III	1,20	40°	0,024	0,046	2	0,0288	0,12	0,0069	0,0053
	IV	1,40	10°	0,024	0,046	2	0,0336	0,12	0,0081	0,0080
	V	0,80	30°	0,024	0,045	2	0,0194	0,12	0,0047	0,0041
	VI	1,30	10°	0,023	0,046	2	0,0299	0,12	0,0072	0,0071
	VII	0,80	20°	0,033	0,065	2	0,0264	0,12	0,0063	0,0059
	VIII	0,75	30°	0,031	0,067	2	0,0232	0,12	0,0056	0,0048
	IX	1,15	0°	0,010	0,040	2	0,0115	0,12	0,0028	0,0028
Verspannung	1	0,8	0°	0,0025	—	2	0,0020	1,3	0,0052	0,0052
	2	0,5	15°	0,0045	—	2	0,00225	1,3	0,00585	0,0056
Kühler		Teil d. Rumpfstirnfläche				1	0,127	0,68	—	0,0864
Seitenruder und flosse		Fläche 0,78 m^2				1	—	0,050	—	0,0390
Höhenruder und flosse		Fläche 2,78 m^2				1	—	0,050	—	0,1390
Räder		0,8	—	0,11	—	2	0,088	0,465	—	0,0819
Rumpf		Hauptspant 0,733 m^2				1	0,733	0,200	—	0,1466
Achse		1,60	—	0,06	0,2	1	0,096	0,12	—	0,0115
Hilfsachse		Verkleidet								
Motor		Im Rumpf liegend								
Auspuff		0,40	0°	0,060	0,110	1	0,024	0,3	—	0,0072
Abfederung		Verkleidet								
Sporn		0,40	40°	0,040	0,054	1	0,016	0,53	0,0085	0,0066
Ruderhebel		0,1	0°	0,010	0,040	8	0,0010	0,4	—	0,0032
Windschutzscheibe		0,24	—	0,14	—	1	0,0336	0,3	—	0,0101

Streben . . . 0,0523. Räder . . . 0,0819.
Verspannung . 0,0108. Rumpf . . . 0,1466.
Kühler . . . 0,0864. Achse . . . 0,012.
Leitwerk . . 0,1708. Motor . . . 0,0.
Übrige Teile 0,027.

Summe $c_w F_s = 0{,}595$

$$\frac{c_w F_s}{F} = 0{,}0286.$$

der oben stehenden Zahlentafel 1 angegeben), C_w der Beiwert der Flügel und F die Flügelfläche.

Dann ist der Gesamtwiderstand des Flugzeugs

100 (8)

wo sich die Summation über alle schädlichen Teile erstreckt. Oder:

(9)

Wir haben also zum Widerstandsbeiwert C_w der Flügel den Betrag $C_{ws}\frac{F_s}{F}$ hinzuzufügen. In den vorstehenden Paragraphen wurde angegeben, wie man die Werte von C_{ws} aus den Messungen findet. Wir stellen die dabei gesammelten Erfahrungen

und die aus anderen Messungen gewonnenen Werte in einer Tabelle (siehe S. 239) zusammen, in der zugleich die Bedeutung der Bezugsfläche angegeben ist.

Um an zwei Beispielen zu zeigen, in welcher Weise danach der Widerstandsbeiwert des ganzen Flugzeuges gewonnen wird und dadurch zugleich ein Urteil über die ungefähre Größe der Summe aller schädlichen Widerstände zu gewinnen, stellen wir diese Werte für zwei Flugzeuge, 1. einen zweisitzigen, zweistieligen normal verspannten Doppeldecker (siehe S. 240), 2. einen einsitzigen, einstieligen verspannungslosen Doppeldecker (siehe S. 241) zusammen.

VII. Kapitel.

Das Wichtigste über Luftschraubenkräfte.

Die Wirkungsweise der Luftschraube beruht ganz wie die Wirkungsweise des Tragflügels auf den Eigenschaften eines in einer Flüssigkeit bewegten, flügelförmig gestalteten Körpers. Der Schraubenflügel (Schraubenblatt) erfährt, wie der Tragflügel, von der Luft eine Reaktionskraft, deren Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung weit größer ist, als die Komponente entgegen der Bewegungsrichtung; es wird also eine große Kraft mit relativ kleinem Energieaufwand erzeugt. Die Schraube bietet daher sowohl für den Konstrukteur wie auch für den Theoretiker dieselben Probleme wie der Tragflügel dar; ihre Besprechung schließt sich zwanglos an die Besprechung des Tragflügels an.

Abb. 186. Element einer Luftschraube.

Da das „Handbuch der Flugzeugkunde“ einen besonderen Band über Luftschrauben enthält, soll hier nicht tiefer auf die speziellen Probleme der Luftschraube eingegangen, sondern nur das Wichtigste hervorgehoben werden, was zum Verständnis der Theorie des ganzen Flugzeugs unbedingt nötig ist.

Der wesentliche Unterschied, welcher die Bewegung eines Schraubenflügels von der Bewegung eines Tragflügels unterscheidet, ist die Drehung um eine Achse, wodurch die Bewegung nicht gleichmäßig über den ganzen Schraubenflügel, sondern systematisch anders an den inneren wie an den äußeren Teilen der Schraube bestimmt ist. Sehen wir zunächst von diesem Unterschied ab, so betrachten wir nicht den ganzen Schraubenflügel, sondern nur ein unendlich schmales Element in einem bestimmten Abstand von der Drehachse. Dieses Element hat gegen die Drehebene (senkrecht zur Drehachse) eine bestimmte Einstellung, welche im allgemeinen unveränderlich gegeben ist; diese Einstellung ($\varkappa$ in Abb. 186) bedingt aber deshalb keinen bestimmten Anstellwinkel und somit keine bestimmten Luftkraftbeiwerte, weil die Bewegung des Schraubenflügels nicht ganz in der Drehebene verläuft, sondern in Richtung der Drehachse die fortschreitende Bewegung des Flugzeugs hinzukommt. Aber durch Drehebene und Drehachse sind zwei Rich-

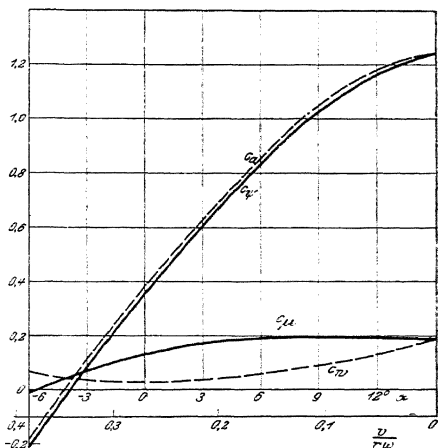
tungen von vornherein ausgezeichnet, welche sich für die Komponentenzerlegung besonders eignen und welche sich von den beiden Richtungen (Fahrtrichtung und Senkrechte dazu), welche die Komponentenzerlegung in Auftrieb und Widerstand beim Tragflügel ergaben, wesentlich unterscheiden; wir wollen die Beiwerte der neu eingeführten Komponenten mit c_φ und c_μ bezeichnen. Beim Schraubenflügel ist die Bewegung in der Drehebene primär gegeben und leicht zu messen; denn sie wird durch die Drehung des Motors bestimmt und ist ihrer Größe nach gleich $r\omega$, wenn ω in Winkelgeschwindigkeit der Schraube und r die Entfernung des betrachteten Schraubenelements von der Achse bezeichnet. Die Luftkraftkomponenten, welche der Richtung von ω entgegenwirken, ergeben das Drehmoment, welches dem Drehmoment des Motors das Gleichgewicht hält. Zu ihrer Überwindung wird die Arbeit des Motors verwendet. In die Richtung senkrecht zur Drehebene, in welcher das Flugzeug mit der Geschwindigkeit v fortschreitet, fällt die Schubkraft der Schraube, welche die nützliche Arbeit leistet. In Abb. 187 sind neben den Werten c_a und c_w die beiden Komponenten c_φ und c_μ eingetragen; dabei ist angenommen, daß die Profilsehne mit der Drehebene einen Winkel $\varkappa = 15^0$ einschließt. Der Anstellwinkel α läßt sich in diesem Fall durch die anschaulichere

Abb. 187. Beiwerte c_φ und

Größe $\frac{v}{r\omega}$ ersetzen; denn aus Abb. 186 geht hervor:

$$\alpha = \varkappa - \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{r\omega} \tag{1}$$

Der Anstellwinkel eines Schraubenelementes wird kleiner, wenn bei gleichbleibender Drehzahl die Fortschreitungsgeschwindigkeit wächst. In Abb. 187 ist deutlich gemacht, wie sich in dem besonderen Beispiel $\varkappa$ und $\frac{v}{r\omega}$ zusammenordnen. Dabei ist es jedenfalls nur als Näherung anzusehen, wenn für v die Flugzeuggeschwindigkeit eingesetzt wird; denn Ansaugung oder Stau vor dem Flugzeug können die Luftgeschwindigkeit in Richtung der Schraubendrehachse einigermaßen verändern.

Die Größen c_φ und c_μ haben bestimmte für die Schraubenkräfte charakteristische Eigenschaften: sie sind beide für $\frac{v}{r\omega} = 0$ größer als für positive

Werte von $\frac{v}{r\,w}$; sie werden beide Null für bestimmte Werte von $\frac{v}{r\,w}$, aber c_ψ bei einem kleineren Wert wie c_μ.

Zur Angabe der Luftkräfte auf ganze Schrauben werden aber statt der Beiwerte c_ψ und c_μ öfter ganz analog gebildete Werte benutzt, durch welche die Kräfte nicht auf die Fläche eines Schraubenflügels, sondern auf die von der Schraube bei ihrer Drehbewegung überstrichene „Schraubenkreisfläche" F_S bezogen werden; auch wird oft nicht die resultierende Geschwindigkeit wie beim Tragflügel, sondern die Umfangsgeschwindigkeit der Schraube ohne Fortschreitungsgeschwindigkeit hervorgehoben, also eine kleinere Geschwindigkeit als die bei der Definition von c_ψ und c_μ verwendete. Bezeichnet R den Halbmesser der Schraube, $u = R\,\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit, $\frac{\gamma}{g}$ die Luftdichte, so setzt man die Schubkraft (in Richtung der Drehachse)

$$S = \psi \frac{\gamma}{g} F_S u^2 = \psi \frac{\gamma}{g} \pi R^2 u^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

das Drehmoment (in der Drehebene)

$$M = \mu \frac{\gamma}{g} F_S R\, u^2 = \mu \frac{\gamma}{g} \pi R^3 u^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Der „Schubwert" ψ und der „Drehwert" μ hängen hierbei außer von der Schraubenform nur von der Größe $\frac{v}{u}$ ab, welche dem Anstellwinkel analog ist und „Fortschrittsgrad λ" genannt wird.

Die von der Schraube aufgenommene Leistung ist

$$L = M\,\omega = \mu \frac{\gamma}{g} \pi R^2 u^3; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

die nützliche Arbeit, welche die Schraube leistet, ist

$$S v = \psi \frac{\gamma}{g} \pi R^2 u^2 v.$$

Der Wirkungsgrad η, auf welchen es besonders ankommt, ist daher

$$\eta = \frac{S v}{M\,\omega} = \frac{\psi}{\mu} \lambda. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Werte ψ und μ in Abhängigkeit von λ können für jede Schraubenform im Luftstrom oder mit einer Anordnung der Schraube auf einem fahrbaren Wagen gemessen werden; doch sind noch nicht sehr viele einwandfreie Messungen vorhanden. Die für Festigkeitsprüfung und oberflächliche Wertung eingeführte Messung der Standwerte ($v = 0$) gibt nur einen Punkt der Kurve, der weit vom praktischen Gebiet entfernt liegt, ist also vom aerodynamischen Standpunkt aus wertlos. Abb. 188 zeigt den typischen Verlauf der Kurven. ψ und μ sinken von ihren Werten bei $\lambda = 0$ (μ mitunter erst nach Überschreitung eines sehr flachen Maximums) erst langsam, dann schnell; ψ wird zuerst Null, μ später. η wird Null, wenn $\lambda = 0$ ist,

und wenn $\psi = 0$ wird; es erreicht ein Maximum bei einem näher am letzteren Punkt gelegenen Wert.

Die für die Schraubenform charakteristischste Größe ist der **Einstellwinkel** $\varkappa$; dieser wird nicht für alle Elemente der Schraube derselbe sein; denn, wenn das Schraubenprofil überall dasselbe ist, so wird das Maximum von η einem überall gleichen Anstellwinkel zukommen, und selbst bei verschiedenen Profilen wird — wie wir von den Tragflügeln her wissen — dieser Anstellwinkel von derselben Größenordnung sein. Soll nun der Anstellwinkel für alle Schraubenelemente derselbe sein, so muß $\varkappa$ nach Gleichung (1) um so größer sein, je größer $\frac{v}{r\,\omega}$ ist, also mit der Entfernung von der Drehachse abnehmen. Diese Anordnung findet man bei jeder Schraube.

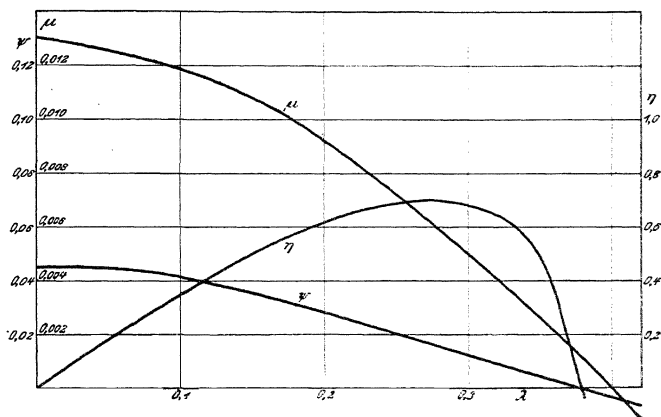



Abb. 188. Beiwerte der Luftschraubenkräfte.

Je größer an der ganzen Schraube die Werte von $\varkappa$ sind, um so größer müssen auch die Werte von $\frac{v}{r\,\omega}$ und daher auch von λ sein, bei welchen das Maximum von η und die Nullwerte von ψ und μ erreicht werden, da alle diese Werte an bestimmte Größenordnungen von α gebunden sind. Man hat es also in der Hand, durch richtige Bestimmung von $\varkappa$ das Maximum von η bei den Werten der Drehzahl und der Geschwindigkeit zu erzielen, die für das betreffende Flugzeug die wichtigsten sind. Je größer z. B. bei gegebener Drehzahl die Fluggeschwindigkeit ist, bei welcher die Motorleistung am besten ausgenutzt werden soll, um so steiler muß man die Schraube einstellen.

Denkt man sich die flügelförmigen Profile der Schraubenelemente durch einfache reibungslose, ebene Flächenelemente ersetzt, so wird die Komponente ψ dann verschwinden, wenn $\alpha = 0$, wenn also der resultierende Luftstrom tangential

zum Flächenelement einfällt; dann ist $\varkappa = \text{arc tg} \frac{\ }{r\,\omega}$ Wenn die Schraube in diesem Fall eine Umdrehung macht, schreitet sie in der Luft um die Strecke $2\pi r \operatorname{tg} \varkappa$ fort, also um soviel, als eine feste Schraube vom Steigungswinkel $\varkappa$ in der Schraubenmutter. Man nennt daher die Größe $2\pi r \operatorname{tg} \varkappa$ auch bei der Luftschraube die „Steigung“. Die Steigung aller Schraubenelemente ist aber in Wirklichkeit nicht immer dieselbe; daher bedeutet „Steigung einer Luftschraube“ im allgemeinen nur den Mittelwert aus den Steigungen der einzelnen Elemente. Man kann auch die „effektive“ Steigung s einer Schraube definieren durch den Wert des Fortschrittsgrades, bei welchem der Schubwert und der Wirkungsgrad $= 0$ sind, also

$$s = 2\,\pi R\,\lambda_{\psi = 0} \qquad (6)$$

Bei größeren Werten des Fortschrittsgrades zieht die Schraube nicht mehr vorwärts, sondern bremst. Die Abweichung des Fortschrittsgrades einer Schraube im Betriebszustand von dem Fortschrittsgrad, bei welchem $\psi = 0$ ist, gibt ein Maß für den Betriebszustand; man bezeichnet mit „Schlüpfung“ (slip) den Quotienten

(7)

Das Maximum des Wirkungsgrades wird bei den praktisch verwendeten Schrauben etwa bei der Schlüpfung 0,15 erreicht.

Der Punkt $\mu = 0$ der Abb. 188 hat seine Bedeutung, wenn die Schraube leer läuft; von der Verdichtung des Motors abgesehen, wirkt dann kein Drehmoment auf die Schraube, und sie muß daher bei bestimmter Flugzeuggeschwindigkeit eine solche Drehzahl annehmen, daß der Fortschrittsgrad, der zu $\mu = 0$ gehört, herauskommt. Zu diesem Wert gehört ein bestimmter stets negativer Wert von ψ, infolgedessen eine bestimmte bremsende Kraft, die unter Umständen recht bedeutend werden kann. Je größer die Steigung der Schraube, um so größer wird auch $\lambda_{\mu = 0}$, um so kleiner daher die Drehzahl und die bremsende Wirkung der leerlaufenden Schraube.

Da μ mit wachsendem λ sinkt, erreicht eine Schraube im Fluge bei gleichem Motordrehmoment eine höhere Drehzahl als am Stand; die Schraube „holt an Touren auf“.

Bei der Einfügung der Schraube in den Gesamtorganismus des Flugzeugs treten dadurch Schwierigkeiten auf, daß die Schraube für einen bestimmten Betriebszustand ausgewählt und darum im allgemeinen nicht für die vielen verschiedenartigen Betriebszustände des Flugzeugs gut geeignet ist. So nimmt das Drehmoment der Schraube mit wachsender Höhe proportional der Luftdichte ab, das Drehmoment des Motors hängt aber in anderer, komplizierterer Weise von der Luftdichte ab; bei normalen Motoren läßt es stärker nach als die Luftdichte, bei Höhenmotoren bleibt es bis zu einer gewissen Höhe unverändert. Es gibt also genau genommen nur eine Höhe, in welcher der Motor mit seiner normalen Drehzahl gerade die Schraube treibt; in allen anderen Höhen muß die Drehzahl geringer sein: denn die Schraube darf nicht so gebaut sein, daß sie vom Motor höhere

Drehzahl fordert, als er verträgt. Auch die verschiedenen Geschwindigkeiten des Flugzeugs, z. B. beim Steigen und im Horizontalflug oder in verschiedenen Höhen, haben, da sie viel stärker als die Drehzahlen variieren, zur Folge, daß der Fortschrittsgrad sich stark ändert, vielleicht um 50 vH. und somit der Wirkungsgrad nicht nahezu seinen Größtwert behalten kann. Abb. 189 zeigt die Abhängigkeit des η von λ an einigen Modellpropellern. Diesen Schwierigkeiten kann man begegnen, indem man die Steigung der Schraube im Fluge ändert und an den jeweiligen Betriebszustand des Motors und des Flugzeugs anpaßt (Reißner). Auch die Änderung des Schraubendurchmessers im Fluge ist möglich, aber konstruktiv viel schwieriger als die Änderung der Steigung.

Um in einem bestimmten Falle die geeignetste Schraube auszuwählen, muß man eine große Anzahl von Meßergebnissen möglichst in einem Diagramm überblicken. Wäre die Aufgabe immer so gestellt, daß für einen gegebenen Fortschrittsgrad die Schraube gesucht wird, so würde ein Diagramm in der Art der

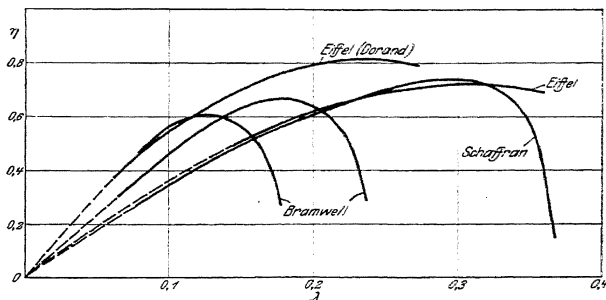



Abb. 189. Wirkungsgrad von Modellschrauben abhängig vom Fortschrittsgrad.

Abb. 189 genügen. In Wirklichkeit ist die Aufgabe aber komplizierter. Es kann der erforderliche Schub oder — wie meist in der Flugtechnik — die verfügbare Motorleistung, der Schraubendurchmesser und die Fluggeschwindigkeit gegeben sein und die geeignete Drehzahl gesucht, oder die Drehzahl bekannt, aber der Durchmesser gesucht sein u. a. m. Zu diesem Zweck wird μ als Funktion von λ für verschiedene gemessene Schrauben aufgetragen und an einzelnen Punkten die zugehörigen η-Werte angeschrieben (Abb. 190). Daß man μ und nicht ψ so aufträgt, liegt eben daran, daß in der Flugtechnik die Motorleistung, also das Drehmoment der Schraube die primär gegebene Größe ist. Faßt man in einem solchen Diagramm die Punkte konstanten Wirkungsgrades durch Kurven zusammen, so wird der Überblick sehr erleichtert. Sind nun z. B. Motordrehmoment M, Fluggeschwindigkeit v, Luftdichte ρ (Flughöhe) und Schraubenhalbmesser R gegeben, so folgt daraus $\frac{\mu}{\lambda^2}$ $= \frac{M}{\pi \rho R^3 v^2} =$ Const; diese Kurve schneidet die Schar der μ- bzw. der η-Kurven. μ-Kurve, auf welcher sie den günstigsten Wert von η findet, also eine

η-Kurve berührt, gehört der geeignetsten Schraube aus der im Diagramm verzeichneten Schar an. So können in obigem Fall die beste Drehzahl, Steigung und das beste Flügelprofil bestimmt werden. Auf diese Weise ist jede praktische Aufgabe zu lösen. Zur Vereinfachung des Rechnungsganges benutzt man in der Praxis logarithmische Diagramme, in welchen alle aus den Gleichungen (2) bis (4) folgenden Beziehungen durch gerade Linien dargestellt werden.

Besonders wichtig ist die günstigste Beziehung zwischen Durchmesser und Drehzahl bei gegebener Fluggeschwindigkeit und Motorleistung. Bendemann und Madelung haben aus Modellversuchen geschlossen, daß immer ein Wert von μ zwischen 0,0030 und 0,0035 besonders günstige Verhältnisse gibt; Reißner hat die Ansätze der Flügeltheorie mit der Anwendung der Impuls- und Energiesätze auf die erzeugte Strömung zu einer tiefgehenden Theorie der Schrauben zusammen-

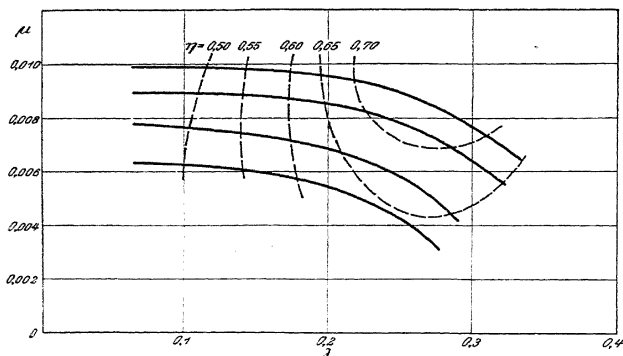



Abb. 190. μ-λ-Diagramm.

gefügt. Er findet die günstigste Wirkung bei günstigstem Anstellwinkel jedes Flügelelementes und die günstigsten η-Werte

$$\eta = \frac{4 - 6\,\varepsilon\,\lambda}{\;} \qquad (8a)$$

wenn

$$(8b)$$

wobei die Stromausnutzung r und die Gleitzahl ε konstante Zahlwerte bedeuten, welche bei zweiflügeligen Flugzeugschrauben $r = 0{,}6$, $\varepsilon = \frac{1}{16}$ gesetzt werden können.

Ob die Theorie oder die — doch immerhin nur an zufälligem Material gewonnenen — Ergebnisse der Modellversuche den Vorzug verdienen, kann noch nicht entschieden werden. Auch die Versuche an wirklichen Luftschrauben geben noch

keinen sicheren Anhalt. Im praktisch wichtigsten Gebiet sind übrigens die beiden Vorschläge nicht sehr verschieden.

Einen wichtigen, sicheren Gesichtspunkt kann man der Theorie entnehmen, wenn man alle Einzelheiten der Schraubenform beiseite läßt und nur die allgemeinsten Sätze der Mechanik auf die Schraube als Ganzes anwendet; man gewinnt dabei natürlich keine Hinweise auf die richtige Durchbildung der Schraube, aber man findet eine obere Grenze für den Wirkungsgrad, welche von Leistung oder Schub, Luftdichte, Durchmesser und Fluggeschwindigkeit abhängt.

Ganz allgemein ist die Schraube ein Mechanismus, durch welchen auf einer in der Flüssigkeit fortschreitenden Kreisfläche F_S eine Schubkraft in der Bewegungsrichtung erzeugt wird. Für die dazu führenden Vorgänge haben sich zwei idealisierende Vorstellungen bewährt: entweder die gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung vor der Schraube wird in bestimmter Weise ungleichmäßig hinter der Schraube (Reißner) oder sie bleibt gleichmäßig, aber der Flüssigkeitsdruck ist vor der Schraube geringer wie hinter ihr (Finsterwalder, Bendemann, Prandtl). In jedem Fall muß der Impuls der Strömung hinter der Schraube größer sein wie vor der Schraube. Wir folgen nun der zweitgenannten Vorstellung: der Flüssigkeitsdruck ist unmittelbar vor der die Schraube ersetzenden Kreisfläche geringer wie dahinter; an ihr entseht ein Drucksprung $\triangle p$. Dieser Mechanismus erfaßt in der Zeiteinheit ein Luftvolumen Q, dessen Impulszunahme als Reaktionskraft die Schraubenkraft liefert. Vor der Schraube hat die Luftmenge den Impuls $\frac{\gamma}{g} Qv$ hinter der Schraube den Impuls $\frac{\gamma}{g} Q (v + w)$, wenn w die Geschwindigkeitszunahme in der Stromrichtung infolge der Schraubeneinwirkung bedeutet. Dann muß nach dem Impulssatz

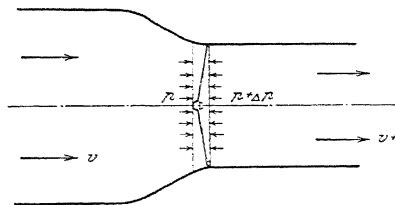



Abb. 191. Strahltheorie der Luftschraube.

$$S = \frac{\gamma}{g} Q w$$

sein. Die Luftmenge muß durch den Schraubenmechanismus eine Zusatzgeschwindigkeit erhalten, sonst könnte keine Schubkraft entstehen. Infolge der größeren Geschwindigkeit wird der Querschnitt des Luftstroms kleiner; es entsteht eine Kontraktion des Strahles hinter der Schraube (Abb. 191). Bewegt sich eine Schraube in der Luft vorwärts, so muß sie daher nicht nur die zu dieser Vorwärtsbewegung nötige Arbeit leisten, sondern auch die kinetische Energie des sie durchströmenden Luftvolumens erhöhen. Dadurch ist ihr Wirkungsgrad prinzipiell beschränkt. Die durchströmende Luftmenge hat vor der Schraube die kinetische Energie

$\frac{\gamma}{g} Q \frac{v^2}{2}$, hinter der Schraube $\frac{\gamma}{g} Q \frac{(v + w)^2}{2}$; die Arbeitsleistung des Schraubenmechanismus muß also

$$\left(v w + \frac{w^2}{2}\right) \quad (10)$$

sein. Dabei haben wir insofern den günstigsten Fall genommen, als wir nur die zur Erzielung der Schubkraft unbedingt nötige Arbeit in Rechnung gestellt haben; bei der wirklichen Schraube entsteht nicht nur ein Schub, sondern auch ein Drehmoment, als dessen Reaktion sich ein Drehimpuls in der Luft hinter der Schraube finden muß; der wirkliche Schraubenstrahl rotiert noch, hat daher noch größere kinetische Energie; L ist größer als die Gleichung (10) angibt. Im Idealfall ergibt sich nun der ideale Wirkungsgrad

$$\eta' = \frac{S v}{L} = \frac{v}{v + \frac{w}{2}}. \quad (11)$$

Je größer die Zusatzgeschwindigkeit sein muß, um so geringer wird der Wirkungsgrad. Gleichung (11) genügt uns aber praktisch noch nicht; denn w ist unbekannt und muß erst durch Konstruktionsgrößen ausgedrückt werden; auch Q ist unbekannt; denn man darf nicht etwa $Q = F_S \cdot v$ setzen; die Schraube erfaßt einen größeren Luftquerschnitt als die Schraubenkreisfläche; sie saugt von außen an, wie Abb. 191 andeutet. Man kann zur Berechnung von w von der Arbeitsgleichung ausgehen. Bei Durchströmung der Schraubenkreisfläche wird gegen die Druckkraft

$$\Delta p = \frac{S}{F_S}$$

Arbeit geleistet, und zwar $Q \cdot \Delta p$ in der Zeiteinheit. Diese Arbeit ist der Leistung L gleich, also nach (10)

(12)

Mit Hilfe dieser Gleichung wird w durch die Konstruktionsgrößen S, F_S, $\frac{\gamma}{g}$ und v ausgedrückt. Man bringt die durch (11) und (12) ausgedrückte Beziehung in handliche Form, indem man schreibt:

$$\frac{S}{F_S \frac{\gamma}{g} v^2} = \frac{w}{v} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{v}\right)^2$$

und

$$\frac{w}{v} = \frac{2 - 2 \eta'}{\eta'};$$

s folgt

$$\frac{1}{2 \frac{\gamma}{g} v^2} \cdot \frac{S}{F_S} = \frac{1 - \eta'}{\eta'^2} \quad (13)$$

oder, wenn man anstatt des Schubs die Leistung $L = \frac{S\,v}{\ldots}$ einführt:

$$\frac{L}{F_s} \qquad \ldots \tag{14}$$

Die letztere Beziehung ist praktisch handlicher, da in der Flugtechnik meist die Leistung, nicht der Schub gegeben ist; sie ist in Abb. 192 dargestellt, wobei nur

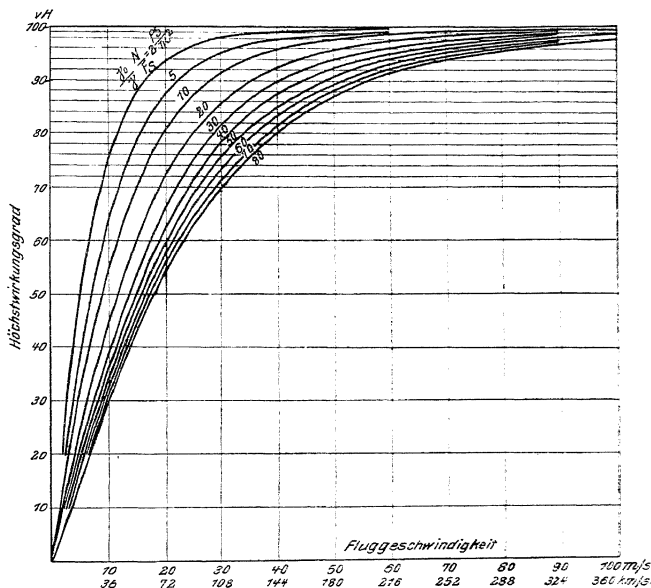



Abb. 192. Wirkungsgrad der idealen Schraube.

die Leistung in Pferdestärken ausgedrückt und daher der Buchstabe $N = \frac{L}{75}$ verwendet ist. Ferner ist als Parameter der Kurven $\frac{\gamma_0}{\gamma} \frac{N}{F_s}$ verwendet, nicht $\frac{\gamma}{g} \frac{N}{F_s}$ wegen der anschaulichen Dimension der „Flächenleistung" $\frac{PS}{m^2}$.

Die Abbildung zeigt, welcher Wirkungsgrad unter bestimmten Verhältnissen erreichbar ist; man sieht den Vorteil großer Fluggeschwindigkeit und kleiner Flächenleistung. Je größer man bei gegebener Leistung den Schraubendurchmesser macht, um so besser; man muß nur dann meist, um mit günstigen Fortschrittsgraden arbeiten zu können, die Drehzahl der Schraube gegenüber der des Motors unter-

setzen. Der Schraubendurchmesser ist freilich meist durch die Konstruktionshöhe des Flugzeugs beschränkt.

Die in (13) und (14) links stehenden Ausdrücke sind nach (2) und (3) bis auf einen Zahlenfaktor gleich den Ausdrücken $\frac{\psi}{\lambda^2}$ und $\frac{\mu}{\lambda^3}$, welche man „Belastungsgrad" und „Leistungsgrad" nennt. Der Wirkungsgrad η wirklicher Schrauben ist stets geringer als der Wirkungsgrad η' der idealen Schraube; das Verhältnis $\frac{\eta}{\eta'}$ bezeichnet man als den „Gütegrad" einer Schraube. Daß der wirklich erreichte Wirkungsgrad tatsächlich mit $\frac{\mu}{\lambda^3}$ wächst, sieht man leicht, wenn man sich in Abb. 190 die Kurven $\frac{\mu}{\lambda^3} = \text{Const}$ eingezeichnet denkt (im logarithmischen Diagramm Gerade).

Zweiter Teil.

Die Bewegung des Flugzeugs.

I. Kapitel.

Kräftegleichgewicht im geraden Flug.

§ 1. Aufstellung der Kraftgleichungen.

Wir betrachten ein Flugzeug in ungestörtem, gleichmäßigem, geradeaus gerichtetem Flug; wir haben also keine Beschleunigungen und Massenkräfte zu berücksichtigen. Auf das Flugzeug wirken die Luftkräfte an Flügeln, Leitwerk und sonstigen Teilen, ferner der Schraubenzug und die Schwerkraft. Die Bewegung des Flugzeugschwerpunkts verläuft in der Symmetrieebene des Flugzeugs. Das Gleichgewicht der Kräfte erfordert die Erfüllung dreier Beziehungen: Die Kräfte in zwei zueinander senkrechten Richtungen und die Drehmomente in der Bewegungsebene müssen ausgeglichen sein. Dann wird das Flugzeug nach keiner Richtung beschleunigt, insbesondere bleiben seine Bahngeschwindigkeit und seine Steiggeschwindigkeit unverändert; auch behält es seine Lage im Raum, mithin auch seine Orientierung gegen die Bewegungsrichtung unverändert bei. Diese drei Größen bestimmen aber die ganze Bewegung des Flugzeugs; sie sind die Unbekannten unseres Gleichungssystems. Das Problem erhält seinen bestimmten Charakter durch die Abhängigkeit der Kräfte von den Unbekannten, die im allgemeinen nicht analytisch, sondern rein empirisch gegeben ist. Die Luftkräfte sind dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, hängen aber vom Anstellwinkel in komplizierter Weise ab; der Schraubenzug hängt von der Drehzahl und von der Geschwindigkeit des Flugzeugs in einer rein empirisch gegebenen Weise ab; die Drehzahl wiederum ist nicht unmittelbar gegeben, sondern wird durch die zur Verfügung stehende Motorkraft bestimmt. Außerdem stehen die Luftkräfte und der Schraubenzug ceteris paribus in linearer Abhängigkeit von der Luftdichte, welche bei gegebener Druck- und Temperaturverteilung in der Atmosphäre mit der Höhe und somit auch mit der Steiggeschwindigkeit in Beziehung steht.

Wir wollen das Gesagte mathematisch formulieren: Das Flugzeug bewege sich mit der Geschwindigkeit v unter einem Winkel φ gegen die Erdoberfläche (Abb. 193). Ist φ positiv, so steigt es, ist φ negativ, so fällt es. Dabei sei die Schraubenachse um den Winkel β gegen die Bahnrichtung geneigt, die Sehne des Flügels (bei mehreren Flügeln die Sehne des Oberflügels) um den Winkel α, so daß der festgegebene „Einstellwinkel" der Flügel gegen die Schraubenachse $\varkappa = \alpha - \beta$. Wir wählen nun ein Koordinatensystem so, daß die x-Achse in die Bewegungsrichtung des Flugzeugs fällt; dann wirkt der aerodynamische Widerstand W in Richtung der negativen x-Achse, der Auftrieb A in Richtung der positiven y-Achse. Die

beiden Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte lauten, wenn G das Gewicht und S den Schraubenzug bedeuten:

$$S \cos \beta - G \sin \varphi - W = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$S \sin \beta - G \cos \varphi + A = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Nach den Darlegungen des I. Teils setzen wir $\left(\frac{\gamma}{g}\right.$ Luftdichte, F Flügelfläche$\left.\right)$:

$$W = c_w \cdot \frac{\gamma}{2g} v^2 F, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$A = c_a \cdot \frac{\gamma}{2g} v^2 F, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

womit wir alle Luftkräfte auf die tragende Flügelfläche F beziehen. c_w und c_a sind Beiwerte, die sich auf das ganze Flugzeug beziehen und bei deren Berechnung aus

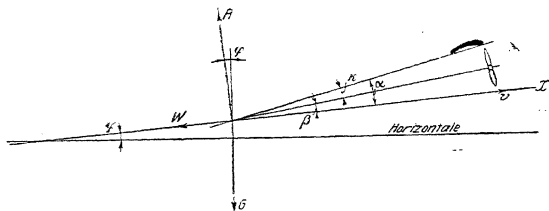



Abb. 193. Erklärung der Bezeichnungen.

den Werten für die einzelnen Teile natürlich auf den Unterschied zwischen β und α geachtet werden muß. In diesen Gleichungen sind α, φ und v Unbekannte; c_a und c_w hängen nur von α ab; S hängt von v und γ ab, ferner von der Drehzahl n in der Minute. Ist diese nicht gegeben, so muß man sie aus dem Gleichgewicht der Drehmomente von Motor und Schraube berechnen. Ist die Leistung des Motors N (Pferdestärken) bekannt, so gilt, wenn M das Drehmoment der Schraube bedeutet:

60 (5)

So haben wir eine neue Gleichung und eine neue Unbekannte n eingeführt; der Zusammenhang zwischen M und S kann durch Modellversuche geklärt werden, ganz analog wie der zwischen c_w und c_a.

Man kann auch N und S unmittelbar miteinander in Beziehung setzen durch den Begriff des Wirkungsgrades η. Die von der Schraube in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist nämlich

$$S v = 75\, N \eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Bei Benutzung dieser Gleichung ist Voraussetzung, daß η empirisch bestimmt ist; dann ist bei gegebener Motorleistung der Schraubenzug nur eine Funktion der

Geschwindigkeit v, und es ist damit keine neue Variable in die Gleichungen (1) und (2) eingeführt.

Noch haben wir aber drei Unbekannte und nur zwei Gleichungen; die dritte Gleichung verlangt den Ausgleich der Drehmomente am Flugzeug. Es ist bekanntlich gleichgültig, um welchen Punkt man diese Drehmomente rechnet; wir wählen den Schwerpunkt; dann rührt vom Gewicht kein Drehmoment her, da die Schwerkraft durch den Schwerpunkt geht. Aber auch das Moment, welches der Schraubenzug ausübt, ist meist nicht groß, da derselbe fast stets mit kleinem Hebelarm am Schwerpunkt vorbeigeht und dem ganzen Charakter des Flugzeuggleichgewichts nach nur klein ist gegenüber den Auftriebskräften, welche das Flugzeug heben. Die in Gleichung (1) stehenden Glieder sind ja in den meisten Fällen klein im Vergleich mit denen der Gleichung (2). So wird im wesentlichen — vorbehaltlich späterer genauerer Diskussion — das Gleichgewicht der Drehmomente hergestellt sein, wenn nur die Momente der Luftkräfte sich das Gleichgewicht halten. Diese sind alle der Luftdichte und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional und unabhängig von der Richtung der Schwerkraft. Die beiden Unbekannten v und φ kommen daher in der Beziehung, welche das Gleichgewicht der Drehmomente ausspricht, in erster Näherung nicht zur Geltung, sondern als einzige Unbekannte der Anstellwinkel α. Dafür tritt ein neuer Parameter auf, nämlich die Stellung des Höhenruders (s. I. Teil VI § 3); von dieser hängt also der Anstellwinkel ab und ist somit durch den willkürlichen Ausschlag des Steuers vom Führer frei wählbar. Wir werden uns im 2. Kapitel noch ausführlich mit dem Problem des Momentenausgleiches zu befassen haben. Einstweilen schließen wir, daß der Anstellwinkel durch den Momentenausgleich festgelegt ist, daß wir ihn deshalb in den Glecihungen (1) und (2) nicht als Unbekannte, sondern als gegebenen Parameter anzusehen haben. Verschiedene Anstellwinkel bedeuten verschiedene Luftkraftbeiwerte c_a und c_w und somit verschiedene Flugzustände. Aus den Kraftgleichungen (1) und (2), für die das Flugzeug nur ein materieller Punkt ist, sind für die verschiedenen Flugzustände die Geschwindigkeit v und der Anstiegwinkel φ zu erschließen. Diese beschreiben die eigentlichen Flugleistungen und entscheiden somit in erster Linie über die Brauchbarkeit eines Flugzeugs für bestimmte Zwecke.

§ 2. Gleitflug.

Am einfachsten gestaltet sich die Diskussion der Kraftgleichungen im Gleitflug, wenn der Motor ganz abgestellt ist, also

$$S = 0.$$

In diesem Fall ergibt Division der Gleichungen (1) und (2)

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{W}{A} = -\frac{c_w}{c_a} = -\varepsilon. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Der „Gleitwinkel“ φ ist also unabhängig von der Flügelfläche und vom Gewicht des Flugzeugs, sowie unabhängig von der Luftdichte und der Höhe des Flugs über

dem Erdboden; er ist gegeben durch die „Gleitzahl“ $\frac{c_w}{c_a}$, welche nur von der aerodynamischen Ausgestaltung des Flugzeugs beeinflußt wird. Der Gleitflug wird also um so flacher, je kleiner bei bestimmter Tragkraft der Widerstand gemacht wird.

Im Polardiagramm ist der Winkel φ direkt abzulesen als der Winkel, welchen der vom Anfangspunkt nach einem bestimmten Punkt der Kurve hin gezogene Fahrstrahl mit der c_a-Achse einschließt; man muß aber dabei beachten, daß für gewöhnlich der Maßstab der c_w-Achse vergrößert ist, also der Winkel verzerrt erscheint. Der steilste Gleitflug ist natürlich bei verschwindendem Auftrieb senkrecht nach

Vergrößerter Ausschnitt aus b).

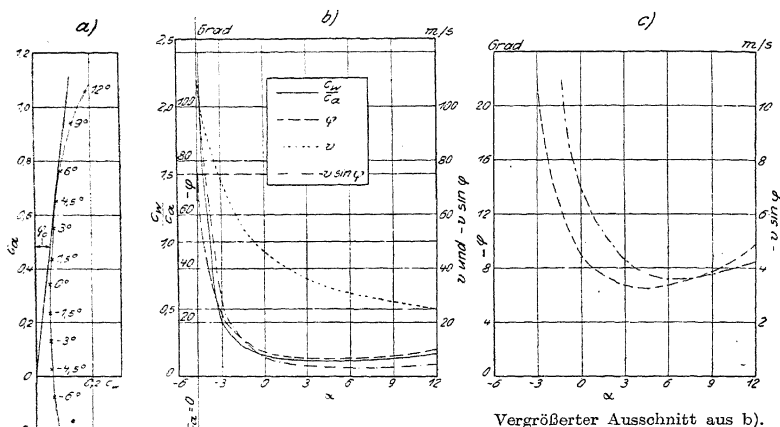



Abb. 194. Gleitflug.

unten gerichtet, der flachste Gleitflug ist durch die Tangente an die Kurve vom Nullpunkt aus gegeben. In Abb. 194a ist das Polardiagramm eines kleinen Flugzeugs, wie es aus Modellversuchen gewonnen wurde, eingezeichnet, dazu in Abb. 194b $\frac{c_w}{c_a}$ und der Gleitwinkel in Abhängigkeit vom Anstellwinkel. Die Geschwindigkeit im Gleitflug kann man durch Einsetzen des gefundenen Wertes von φ in Gleichung (2) berechnen. Man erhält

$$v = \sqrt{\frac{G}{F}\,\frac{2g}{\gamma}\,\frac{\cos\varphi}{c_a}}\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8a)$$

man auch auf die Form bringen kann:

$$v = \sqrt{\frac{G}{F}\cdot\frac{2g}{\gamma}\cdot} \quad (8b)$$

Die Geschwindigkeit hängt also nicht nur von aerodynamischen Größen ab, sondern auch von der Größe $\frac{G}{F}$, welche man die „Flächenbelastung“ nennt, ferner von der Luftdichte und somit von der Höhe; und zwar ist die Geschwindigkeit größer bei höherer Flächenbelastung und bei größerer Flughöhe. In Abb. 194b ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Anstellwinkel (somit indirekt auch vom Gleitwinkel) eingetragen. Dabei ist eine Flächenbelastung von 40 kg/m² und ein spezifisches Luftgewicht $\gamma = 1{,}0$ kg/m³, welches etwa einer Höhe von 2 km entspricht, angenommen. Ferner enthalten Abb. 194b und c die Sinkgeschwindigkeit $-v \sin \varphi$ des Flugzeugs. Auch diese zeigt ein Minimum, aber bei einem anderen Anstellwinkel als der Gleitwinkel; der flachste Gleitflug ist also nicht identisch mit dem Gleitflug kleinster Sinkgeschwindigkeit; letzterer gehört zu etwas größerem Anstellwinkel. Indes ist das Minimum beider Größen recht flach; sie sind daher gegen Änderungen des Anstellwinkels nicht sehr empfindlich. Die Geschwindigkeit nimmt mit wachsendem Anstellwinkel ab, aber auch bei ihr liegt der große Abfall im Bereich ganz kleiner c_a-Werte. Die Abbildung zeigt, daß dort alle Größen sich sehr rasch mit dem Anstellwinkel ändern und sehr bedeutende Werte annehmen; man pflegt diese steilen Gleitflüge Sturzflüge zu nennen. Sie werden bei allen Flugzeugen, außer bei schnellen Kampfflugzeugen, nach Möglichkeit vermieden; bei Jagdflugzeugen sind sie sehr wichtig; es kann bei der Flucht oder bei der Verfolgung eines Gegners von der größten Bedeutung sein, daß man große Sinkgeschwindigkeit erzielt; unsere Formel (8b) lehrt, daß man einem Flugzeug, welches man in dieser Hinsicht besonders leistungsfähig machen will, große Flächenbelastung geben und durch Herabminderung der schädlichen Widerstände und Auswahl eines Profils mit kleinem c_w bei kleinen c_a-Werten die spezifische Gesamtkraft $\sqrt{c_a^2 + c_w^2}$ möglichst tief halten muß. Der Widerstandsbeiwert ist bei kleinen Auftriebsbeiwerten meist bedeutend größer als sein Minimum, welches erst bei $c_a \sim 0{,}3$ erreicht wird; um wieviel er größer ist, hängt sehr bedeutend von der Profilgebung ab.

Legt man andererseits großen Wert auf eine langsame Gleitfluggeschwindigkeit und kleine Sinkgeschwindigkeit für die Landung, so muß man die Flächenbelastung klein machen und ein Profil auswählen, das hohe c_a-Werte möglich macht. Das wirkliche Flugzeug stellt natürlich immer einen Kompromiß aus diesen und vielen anderen Gesichtspunkten dar.

Im allgemeinen gehören zu einem bestimmten Gleitwinkel oder zu einer bestimmten Sinkgeschwindigkeit zwei Werte des Anstellwinkels. Vergrößerung des Anstellwinkels führt daher unter Umständen zu einem flacheren Gleitflug, also zu einem Aufrichten der Flugbahn, unter Umständen aber auch zum Gegenteil, was dem natürlichen Gefühl des Führers zuwiderlaufen muß. Die Werte bei großen Anstellwinkeln oberhalb des Minimums von Gleitwinkel und Sinkgeschwindigkeit machen sich wohl beim Fluge in größeren Höhen nicht störend bemerkbar, soweit sie nicht aus Instabilitätsgründen ausgeschlossen sind. Bei der Landung, bei welcher man gerade langsame Bewegung, also große c_a-Werte erstrebt, sind derartige Flugzustände als unangenehm bekannt; man muß den Anstellwinkel erniedrigen, also Steuerausschläge geben, von denen man für gewöhnlich ein Herabdrücken des Flugzeugs erwartet, um die Flugbahn flacher zu gestalten bzw. die Sinkgeschwindig-

keit zu erniedrigen. Diese Umkehrung der Steuerwirkung ist vielfach beobachtet worden. (Eine weitgehende Einschränkung dieser Aussagen werden wir im III. Kapitel § 10 besprechen.)

§ 3. Motorflug mit konstanter Drehzahl.

Bei Behandlung des Motorflugs ist es nicht nötig, die Gleichuugen (1) und (2) in der komplizierten vorliegenden Gestalt beizubehalten; man kann sich das Problem wesentlich vereinfachen, wenn man die Größenordnung der einzelnen Werte in Betracht zieht. Beim Horizontalflug ist $\varphi = 0$, beim steilsten Anstieg braucht man nicht mit einem größeren Anstiegwinkel als 20^0 zu rechnen, bei allen wichtigen Problemen mit erheblich geringeren Werten; daher macht man nur einen Fehler, der bei der Ungenauigkeit der Rechnung mit empirischen Werten nicht wesentlich ist, wenn man

$$\cos \varphi = 1 \text{ und } \sin \varphi = \varphi$$

setzt. Ferner bleibt der Winkel β unter allen Umständen klein; ein größerer Wert, wie etwa 8^0, kommt nicht leicht vor, so daß unbedenklich

$$\cos \qquad 1 \text{ und } \sin \beta = \beta$$

gesetzt werden kann. Und ferner ist der Schraubenzug unter allen Umständen klein gegen das Flugzeuggewicht, wie der Widerstand klein gegen den Auftrieb ist; infolgedessen kommt die kleine Kraftkomponente, mit welcher die Schraube das Flugzeug tragen hilft, gar nicht in Betracht und kann vernachlässigt werden, während hingegen die kleine Komponente der Schwerkraft, welche in die Bewegungsrichtung fällt, von derselben Ordnung wie die Schraubenkraft ist. Wir legen also den weiteren Untersuchungen die vereinfachten Bewegungsgleichungen zugrunde $\left(q = \frac{\gamma}{2g} v^2 = \text{Staudruck}\right)$:

$$S - G \cdot \varphi - c_w F q = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9)$$

$$- \; G \qquad (10)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ist dadurch erschwert, daß sich die Geschwindigkeit nicht so einfach eliminieren läßt wie beim Gleitflug, da der Schraubenzug in rein empirischer Weise von der Geschwindigkeit abhängt; diese Abhängigkeit darf nie vernachlässigt werden; denn sie ist von derselben Größenordnung wie die Abhängigkeit des aerodynamischen Widerstands von der Geschwindigkeit. Der Zug einer gegebenen Schraube ist allgemein, wie im 1. Teil 7. Kapitel gezeigt wurde

$$S = \text{Const} \frac{\gamma}{g} n^2 \qquad (11)$$

Fliegt man mit konstant gehaltener, bestimmter Drehzahl der Schraube, so kann man die Gleichungen (9) und (10) in einfacher Weise graphisch diskutieren (Abb. 195).

Nach Gleichung (10) gehört zu jedem Staudruck q ein bestimmter Wert von c_a; mit c_a hängt aber c_w zwangläufig zusammen, so daß der Widerstand W als ein-

deutige Funktion von q aufgetragen werden kann (Abb. 195a). Man sieht am besten c_a als den für den Flugzustand charakteristischen Parameter an; die Abszisse ist

$$G \tag{12}$$

die Ordinate

$$W = \frac{c_w}{c_a} G$$

Der Verlauf dieser Kurve folgt aus den allgemeinen Eigenschaften des aerodynamischen Polardiagrammes: Für $c_a = 0$ bleibt c_w endlich, infolgedessen gehört zu $q = \infty$

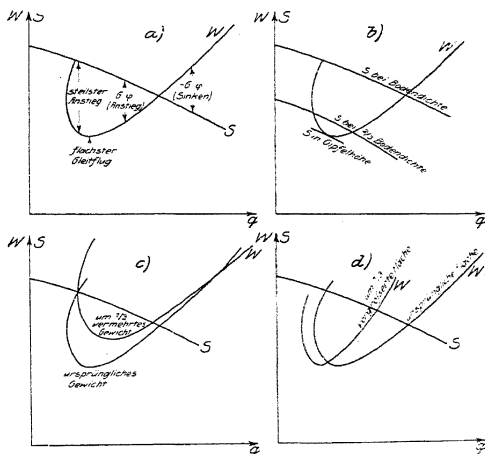



Abb. 195. Motorflug-Diagramm.

auch $W = \infty$; mit fallendem q fällt W; denn $\frac{c_w}{c_a}$ fällt, wenn c_a wächst; für ein bestimmtes c_a erreicht $\frac{c_w}{c_a}$ ein Minimum, ebenso W als Funktion von q; dies Minimum gehört zu dem Anstellwinkel flachsten Gleitflugs; für weiter wachsendes c_a wächst $\frac{c_w}{c_a}$ schnell an, somit wächst auch W bei weiter fallendem q; schließlich übersteigt c_a nicht einen bestimmten Maximalwert; daher kehrt die Kurve bei einem bestimmten Minimalwert von q um; mit kleinerem Staudruck kann man nicht fliegen.

In dasselbe Diagramm kann man S als Funktion von q eintragen; jedoch hängt S nicht direkt und einfach vom Staudruck ab, sondern von der Luftdichte und der Geschwindigkeit einzeln. Für jede Luftdichte, also für jede Flughöhe, wird daher S

durch eine andere Kurve dargestellt; die einzelnen Kurven dieser Schar gehen derart ineinander über, daß die Abszissen und Ordinaten proportional $\frac{\gamma}{g}$ verändert werden. Denn einerseits ist S proportional $\frac{\gamma}{g}$, andererseits ψ in (11) nur eine Funktion der Geschwindigkeit; der Staudruck, welcher bei verschiedener Luftdichte zur gleichen Geschwindigkeit gehört, ist aber auch proportional $\frac{\gamma}{g}$. Es ist $\frac{S \cdot g}{\gamma}$ nur eine Funktion von $\frac{q \cdot g}{\gamma}$ (Abb. 195b).[1]) Die Kurven fallen, wenn q wächst.

Die Komponente des Gewichtes $G \cdot \varphi$ schließlich hängt von q nicht ab, tritt in unser Diagramm also als konstante, nur vom Anstiegwinkel abhängige Größe ein.

Im allgemeinen schneiden sich die S-Kurve und die W-Kurve in zwei Punkten. Diese beiden Punkte entsprechen Gleichgewichtszuständen, bei welchen die Komponente des Gewichts in der Bewegungsrichtung verschwindet, also Horizontalflügen. Wir finden wieder, wie beim Gleitflug, zwei mögliche Gleichgewichtszustände; man kann mit demselben Flugzeug, derselben Schraube und derselben Drehzahl in zweierlei Weise horizontal fliegen, einmal mit großer Geschwindigkeit, kleinem Anstellwinkel und kleinem c_a und einmal mit kleiner Geschwindigkeit, großem Anstellwinkel und großem c_a. Hier gilt unverändert das von den beiden Möglichkeiten des Gleitflugs Gesagte: die gewöhnlichen wichtigen Flugzustände gehören zu der größeren Geschwindigkeit; aber auch die mit kleiner Geschwindigkeit kommen vor; bei diesen zeigt sich die Umkehrung der Steuerwirkung; wir werden uns bei der Untersuchung der Stabilitätsfrage noch ausführlich damit zu befassen haben.

Fliegt man nun — was man stets mit dem Höhenruder erzwingen kann — nicht mit einem der beiden c_a-Werte, welche zu Horizontalflügen gehören, so ist der aerodynamische Widerstand nicht im Gleichgewicht mit dem Schraubenschub; das Gleichgewicht muß durch die Schwerkraft hergestellt werden; die Flugbahn steigt an oder fällt und in ihrer Richtung wirkt die Gewichtskomponente $G \cdot \varphi$. Diese ist also offenbar numerisch gleich dem Abstand zwischen den beiden Kurven S und W der Abbildung. Fliegt man mit einer Geschwindigkeit, welche zwischen den beiden Horizontalfluggeschwindigkeiten liegt, so muß nach Gleichung (9) die Gewichtskomponente mit dem Widerstand zusammen dem Schraubenschub entgegenwirken, das Flugzeug steigt also unter einem Winkel φ an, der dem Abstand der S-Kurve von der W-Kurve geteilt durch das Flugzeuggewicht gleich ist. Fliegt man mit einer Geschwindigkeit, die außerhalb des durch die Horizontalgeschwindigkeiten abgegrenzten Bereichs liegt, so sinkt das Flugzeug, und der Winkel der Bahn gegen die Horizontale bestimmt sich in derselben Weise. Der steilste Anstieg erfolgt mit derjenigen Geschwindigkeit, welche dem größten Abstand der beiden Kurven entspricht; da die W-Kurve bei ihrem Minimum horizontal verläuft, die S-Kurve aber mit wachsendem q stetig fällt, kann der Punkt steilsten Anstiegs

[1]) Man kann graphisch sehr leicht von einer S-Kurve zur anderen übergehen, indem man nach den einzelnen Punkten der Kurve die Fahrstrahlen vom Nullpunkt zieht und auf diesen überall im gleichen Verhältnis nach außen oder nach innen rückt.

nicht mit dem Minimum der W-Kurve zusammenfallen, sondern muß bei kleinerem q, also größerem Anstellwinkel, liegen. Der Anstellwinkel, mit welchem man am steilsten steigen kann, ist stets größer als der Anstellwinkel des flachsten Gleitflugs; die beiden würden zusammenfallen, wenn der Schraubenschub unabhängig von der Geschwindigkeit wäre.

Im Bereich der gewöhnlichen Flugzustände fliegt man um so langsamer, je steiler man ansteigt.

Bei fallender Luftdichte, also in größeren Höhen, bleibt die W-Kurve unverändert, aber die Ordinaten und Abszissen der S-Kurve werden kleiner; damit verkleinert sich sowohl der Geschwindigkeitsbereich des Anstiegs, als auch die Entfernung der beiden Kurven und somit der Anstiegwinkel φ. Ein größerer Bruchteil der Schraubenkraft wird zur Überwindung des Widerstandes gebraucht; der zum Anstieg, zum Emporheben des Flugzeugs verfügbare Teil wird immer kleiner. Man gelangt so zu einer Luftdichte, bei welcher die beiden Kurven sich nur noch berühren. In der Höhe, wo diese Luftdichte herrscht, ist ein Anstieg überhaupt nicht mehr möglich, das Flugzeug kann gerade noch horizontal fliegen; es befindet sich in seiner Gipfelhöhe. Größere Höhen sind ihm unerreichbar.

Die Steiggeschwindigkeit $v \cdot \varphi$ ist nicht am größten, wenn der Steigwinkel φ sein Maximum hat; der steilste Anstieg ist nicht der schnellste. Allerdings sind die numerischen Unterschiede nicht groß, da die Maxima von φ und $v \cdot \varphi$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel sehr flach verlaufen. Bei der Unsicherheit der numerischen Werte des Schraubenzugs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit hat es keinen praktischen Sinn, hier allzugroße Feinheiten aufdecken zu wollen.

Der zum gewöhnlichen Horizontalflug gehörige Staudruck wird mit wachsender Höhe kleiner; da aber die zu einem bestimmten Staudruck gehörige Geschwindigkeit selbst mit der Höhe wächst, kann man ohne ausführliche numerische Diskussion nicht entscheiden, ob die Geschwindigkeit dabei kleiner oder größer wird. Meist zeigt sich, daß sie in mäßigen Höhen nur geringe Änderungen erfährt und erst in der Nähe der Gipfelhöhe rasch sinkt.

Verkleinerung des Schraubenzugs infolge Änderung der Schraubenform oder der Drehzahl wirkt ähnlich wie Verkleinerung der Dichte; die Möglichkeit des Anstiegs und die Gipfelhöhe werden verringert (Abb. 195b).

Verändert man das Gewicht (Abb. 195c), so bleibt die S-Kurve unverändert, aber Abszisse und Ordinate der W-Kurve wachsen nach Gleichungen (12) und (13) proportional dem Gewicht. Bei wachsendem Gewicht wird der Zwischenraum zwischen den beiden Kurven schnell verkleinert und der Schnittpunkt des gewöhnlichen Horizontalflugs rückt zu kleineren oder größeren Werten von q, je nachdem in dem betreffenden Falle c_w bei wachsendem c_a steigt oder fällt, also je nachdem die W-Kurve in dem betreffenden Bereich flacher (wie in der Abbildung) oder steiler ansteigt als der Fahrstrahl vom Nullpunkt aus nach den betreffenden Punkten der W-Kurve. Ein stärker belastetes Flugzeug fliegt im praktisch wichtigsten Bereich unter sonst gleichen Umständen langsamer. Die Gipfelhöhe und die Anstiegwinkel werden stark erniedrigt; denn nicht nur der Abstand zwischen den beiden Kurven wird kleiner, sondern es gehören auch zu gleichen Abständen kleinere Anstiegwinkel, da ja die betreffende Strecke $= G \cdot \varphi$ ist.

Vergrößert man die Flügelfläche (Abb. 195d), ohne das Gewicht zu ändern, so bleibt die Ordinate der W-Kurve dieselbe, aber die Abszisse wird umgekehrt proportional der Fläche verkleinert. Das bedeutet eine Erniedrigung der Geschwindigkeit, aber eine Vergrößerung des Abstandes der beiden Kurven, also eine Erhöhung der Steigfähigkeit und der Gipfelhöhe.

Die beschriebenen graphischen Lösungen sind in jedem Fall einfach zu gewinnen; in übersichtlicher analytischer Form kann man sie nur geben, wenn man eine bestimmte Formel für die Abhängigkeit des Schraubenzugs von der Geschwindigkeit annimmt. Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung mit dem Ansatz:

$$\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{S_0}{\frac{\gamma_0}{2g}}\right.$$

wobei S_0 einen konstanten Wert, $\frac{\gamma_0}{g}$ die Luftdichte am Boden und σ einen empirisch gegebenen Koeffizienten bedeutet. Für S_0 den Zug am Schraubenstand einzusetzen, scheint uns nicht zweckmäßig; denn für den ganzen Bereich der Geschwindigkeiten von Null bis zur Fluggeschwindigkeit gilt eine so einfache Beziehung sicher nicht. Dagegen kann man wohl in dem relativ engen Bereich der Fluggeschwindigkeiten die empirisch gegebene Abhängigkeit durch geeignete Wahl der Konstanten S_0 und σ gut annähern. Man kann dann nach Everling in Gleichung (9) den Ausdruck $\frac{\gamma}{2g}\,\sigma v^2 = \sigma q$ als eine Art Widerstand ansehen („Schraubenwiderstand") und durch Einführung der Beziehung

$$c'_w = \frac{\sigma}{F} + c_w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

die Gleichungen auf die einfache Form bringen:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} S_0 - G \cdot \varphi - c'_w F q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$-G + c_a F q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Dies hat den Vorteil, daß man den Staudruck eliminieren kann, wie beim Gleitflug, und die übersichtliche Beziehung erhält

$$\frac{\gamma}{\gamma_0}\frac{S_0}{G} - \varphi = \frac{c_w'}{c_a} = \varepsilon' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

die der Formel (7) für den Gleitflug ganz analog ist; an Stelle der Gleitzahl $\frac{c_w}{c_a}$ tritt hier die „Triebzahl" $\frac{c_w'}{c_a}$; die kleinste Triebzahl gehört zu einem größeren Anstellwinkel als die kleinste Gleitzahl. Mit wachsender Höhe wird $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ kleiner, also bei gleichem Anstellwinkel auch der Anstiegwinkel.

Im Diagramm Abb. 195 wird bei dieser Näherung die S-Kurve eine gerade Linie, die aber nur in dem Bereich, wo sie die W-Kurve schneidet, als einigermaßen

richtig gelten darf. In diesem Falle werden die S-Kurven bei verschiedenem γ parallel; die Werte von c_a und von q, die zum steilsten Anstieg gehören, werden für alle γ dieselben; man steigt am steilsten mit konstantem Staudruck.

Man kann sich die Verhältnisse aber auch veranschaulichen, wenn man die Darstellung durch das Polardiagramm benutzt (Abb. 196). Aus dem Polardiagramm des ganzen Flugzeugs, welches für die Verhältnisse im Gleitflug maßgebend ist, entsteht das Polardiagramm für den Motorflug durch Erhöhung der Abszisse c_w auf c_w' nach Gleichung (15). Der Fahrstrahl vom Nullpunkt des Koordinatensystems nach einem Punkt der Gleitflugkurve schließt mit der Ordinate den Gleitwinkel ein (bei Berücksichtigung des verschiedenen Maßstabs der Koordinaten); der Fahrstrahl nach einem Punkt der Motorflugkurve den Winkel, dessen Tangens $= \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{S_0}{G} - \varphi$. Die Gerade $\varepsilon' = \frac{S_0}{G}$ schneidet die Motorflugkurve also in dem Punkte, zu welchem der Anstellwinkel (Auftrieb, Widerstand usw.) des Horizontalflugs am Boden gehört. Wie die Tangente an die Gleitflugkurve den kleinsten möglichen Gleitwinkel angibt, so gibt die Tangente an die Motorflugkurve den kleinsten möglichen Wert des Ausdrucks $\frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{S_0}{G} - \varphi$ an; dieser kann in verschiedener Weise entstehen; es kann $\varphi = 0$ sein und γ seinen Kleinstwert oder G seinen Größtwert, oder schließlich bei bestimmten Werten von γ und G φ seinen größten Wert haben. Aus dem Wert von ε', der zur Tangente gehört, folgen also leicht die größte Höhe, welche das Flugzeug erreichen kann, die stärkste Belastung, mit welcher es noch horizontal fliegen kann, und sein steilster Anstiegwinkel. Fliegt man bei einer Luftdichte γ_1 mit einem Anstellwinkel, der nicht zum Schnittpunkt der Motorflugkurve mit dem Fahrstrahl $\varepsilon' = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \frac{S_0}{G} = \varepsilon_1'$ gehört, sondern zum Schnittpunkt mit dem Fahrstrahl $\varepsilon' = \varepsilon'_2$, so steigt das Flugzeug unter dem Winkel

Abb. 196. Polardiagramm für Gleit- und Motorflug.

an. Man kann sich die Werte von ε' an die Umrahmung der Zeichnung anschreiben. Den Staudruck für den Motorflug kann man sich an der Ordinate auftragen; denn er hängt mit c_a durch Gleichung (12) zwangläufig zusammen. Diese Skala hängt wesentlich von der Flächenbelastung $\frac{G}{F}$ (in der Abbildung $= 40$ kg/m² gesetzt) ab. Im übrigen ist der Einfluß der Flächengröße in dem Diagramm nur an der Ver-

änderung der Größe $\frac{\sigma}{F}$ zu bemerken; die Motorflugkurve rückt um so näher an die Gleitflugkurve heran, je größer F ist. Je größer — natürlich bei festgehaltenem Gewicht — die tragende Fläche gewählt wird, um so größer wird also die Steigfähigkeit. Diese Darstellung ist etwas einfacher wie die oben zur Diskussion der Gleichungen benutzte, da sie weniger Kurven erfordert; sie ist aber in ihrer Gültigkeit enger begrenzt, da die Annahme (14) nur eine rohe Näherung darstellt.

Überhaupt läßt sich gegen unsere bisherige Diskussion einwenden, daß sie sich viel zu sehr an die Annahme konstanter Drehzahl der Schraube klammert. In Wirklichkeit ist nicht von vornherein die Drehzahl gegeben, sondern die Motorleistung; aus dieser folgt erst nach Gleichung (5) die Drehzahl. Verfolgt man nun ein Flugzeug bei seinem Anstieg, so bleibt die Drehzahl nur konstant, wenn auch die Motorleistung, so wie der Schraubenzug, der Luftdichte proportional ist. Dies ist nun vielfach angenommen worden; doch ist die Abweichung von dieser Annahme zu bedeutend, als daß man daran festhalten könnte. In Wirklichkeit ist die Leistung des gewöhnlichen Motors immer kleiner als der Proportionalität mit der Luftdichte entspricht; die Drehzahl muß daher mit wachsender Höhe abnehmen. Will man trotz der Abnahme der Luftdichte die Drehzahl konstant halten; so muß man die Steigung der Schraube im Fluge ändern können; diese Maßnahme ist theoretisch und praktisch von Reißner durchgeführt worden. Unsere bisherigen Ausführungen sind also am besten auf Flüge mit Verstellpropellern anwendbar.

§ 4. Motorflug mit bestimmtem Schraubenwirkungsgrad.

Zu einer übersichtlicheren vereinfachten Diskussion der wirklichen Verhältnisse gelangt man, wenn man die Motorleistung mehr hervorhebt und den Ansatz (6) benutzt. Darin kommt allerdings die von der Geschwindigkeit abhängige Größe η vor, die auch empirisch bestimmt werden muß. Aber η verläuft ja, wie wir oben gesehen haben, mit einem ziemlich flachen Maximum. Diesem Maximum wird man bei richtiger Auswahl der Schraube stets sehr nahekommen; man kann daher versuchen, für η einen Mittelwert einzusetzen, welcher dem Maximum nahe liegt, und so die Geschwindigkeit eliminieren. Dieser Ansatz entspricht natürlich nicht der Wirklichkeit, aber er tut ihr doch weniger Gewalt an, als die meisten anderen und kann zu einer Diskussion führen, welche dem heutigen geringen Stand unserer Kenntnis der Zahlenwerte einigermaßen entspricht. Diese Art des Ansatzes hat vor der erstbesprochenen weiter den Vorzug, daß bei ihr die Steiggeschwindigkeit mehr in den Vordergrund rückt; dort ließ sich diese nur indirekt berechnen, während unmittelbar die praktisch weniger interessante Größe des Anstiegwinkels hervortrat.

Die beiden Gleichungen lauten nun, wenn mit $w = v \cdot \varphi$ die Steiggeschwindigkeit bezeichnet wird,

$$75\, N\eta - Gw - c_w F \frac{\gamma}{2g} v^3 = 0 \tag{19}$$

$$-G + c_a F \frac{\gamma}{2g} v^2 = 0 \tag{20}$$

Will man die Annahme konstanten Wirkungsgrades nicht machen, so kann man auch diese Gleichungen, wie die früheren, graphisch behandeln; man wählt dann als Abszisse die Geschwindigkeit, als Ordinaten die Leistung der Schraube und die in der Zeiteinheit nötige Arbeit gegen den Luftwiderstand. Die Durchführung liegt auf der Hand; wir können daher hier darüber hinweggehen und nur die analytische Diskussion unter der Voraussetzung $\eta = \text{Const}$ besprechen.

Elimination von v führt zu der Gleichung:

$$w = \frac{75\, N \eta}{G}$$

In dieser Formel tritt die Wirkung zweier Größen deutlich hervor, der „Leistungsbelastung" $\frac{G}{N}$ und der „Flächenbelastung" $\frac{G}{F}$. Diese beiden Größen sind die wichtigsten Konstruktionswerte beim Flugzeug. Je niedriger beide gehalten werden, um so größer ist die Steiggeschwindigkeit; die Leistungsbelastung fällt noch stärker ins Gewicht als die Flächenbelastung. Als aerodynamischer Wert geht hier $\frac{c_w^2}{c_a^3}$ bzw. $\frac{c_w}{c_a^{3/2}}$ ein, nicht wie beim Gleitflug $\frac{c_w}{c_a}$. Der kleinste Wert von $\frac{c_w^2}{c_a^3}$ liegt bei einem größeren Anstellwinkel als der von $\frac{c_w}{c_a}$; was durchaus dem in Abb. 195 gefundenen Verhalten entspricht. Wichtig ist die Abhängigkeit der Steiggeschwindigkeit von der Luftdichte; diese ist eine doppelte, einerseits vermittels der Luftkräfte, die im zweiten Summanden zum Ausdruck kommen, andererseits vermittels der Motorleistung, welche wesentlich von der Luftdichte abhängt; wir setzen

$$N = N_0 \nu, \qquad (22)$$

wobei N_0 die Leistung am Boden bedeutet, und ν nur eine Funktion von γ ist, welche durch die Konstruktion des Motors bedingt ist und empirisch gegeben sein muß, wenn man die Gleichung (21) verwenden will.

Die **Gipfelhöhe** ergibt sich, wenn wir die Steiggeschwindigkeit gleich Null setzen; wir erhalten dann die Beziehung

$$\nu^2 \gamma = \frac{2g}{75^2} \left(\frac{G}{N_0}\right)^2 \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{c_w^2}{c_a^3 \eta^2} \qquad (23)$$

Durch diese Gleichung ist die Luftdichte in der Gipfelhöhe mit den Konstruktions- und aerodynamischen Größen des Flugzeugs verbunden. Es tritt darin der Einfluß der einzelnen Größen sehr klar hervor. Mit wachsender Höhe werden γ und ν immer kleiner; je kleinere Werte die rechte Seite der Gleichung annimmt, um so höher kann das Flugzeug steigen, wenn ein bestimmter Motor gegeben ist. Man kann am meisten erreichen, wenn man das Gewicht möglichst niedrig hält, da es in der 3. Potenz vorkommt; die Stärke des Motors tritt mit der 2. Potenz in Wirkung, die Fläche nur mit der ersten; durch Verminderung der Leistungsbelastung kann man die Steigfähigkeit also wirksamer erhöhen, als durch Verminderung der Flächenbelastung. Natürlich ist bei alledem zu bedenken, daß sowohl bei Erhöhung der Motorleistung als bei Vergrößerung der tragenden Fläche das Fluggewicht ebenfalls erhöht wird, wenn auch nicht im selben Maße. Die Größe $\frac{c_w^2}{c_a^3}$

geht in die beiden Gleichungen (21) und (23) so ein, daß sie unabhängig von der Höhe möglichst klein gehalten werden muß. Man steigt also nach unserem jetzigen Ansatz am schnellsten mit konstantem Anstellwinkel, während wir bei unserer früheren Diskussion zwar für den steilsten, nicht aber für den schnellsten Anstieg diese Konstanz fanden. Die Verschiedenheit dieser Resultate liegt in der Unsicherheit der Ansätze begründet, die ja beide nur willkürliche Näherungen darstellen. Das Minimum der Größe $\frac{c_w^2}{c_a^3}$ ist ziemlich flach, die Unsicherheit daher praktisch von geringer Bedeutung. Den Wert von $\frac{c_w^2}{c_a^3}$ kann man durch Auswahl eines Profils, welches hohe Auftriebsbeiwerte bei geringen Widerständen erreicht, herabdrücken, ferner durch günstige Seitenverhältnisse der Flügel und durch Verminderung des schädlichen Widerstandes. Schließlich ist der Wirkungsgrad der Schraube von großer Bedeutung; er läßt sich durch richtige Auswahl der Schraube recht stark beeinflussen; dabei kommt es vor allem auf die richtige Abschätzung der Fluggeschwindigkeit bzw. des Fortschrittgrades an, ferner auf die zulässige Schraubengröße und die — gegebenenfalls durch Getriebe herabgesetzte — Drehzahl. Es sei wieder daran erinnert, daß niedrige Drehzahl bei großem Durchmesser günstigere Verhältnisse gibt wie das Umgekehrte.

Von ausschlaggebender Bedeutung erweist sich ferner nach Gleichung (23) die Funktion ν; je größer der Wert von ν bei bestimmtem γ gehalten werden kann, um so höher und um so schneller kann man steigen; in der ersten Zeit der Flugtechnik bis lange in den Krieg hinein kannte man eine Beeinflussung dieser Größe nicht; man nahm allgemein als Näherung für alle Motoren an, daß die Leistung proportional mit der Luftdichte abnehme, und erhöhte die Steigfähigkeit im wesentlichen durch Erhöhung der Motorstärke, also Erniedrigung der Leistungsbelastung. In den letzten Kriegsjahren setzte aber eine intensive Entwicklung der Motorentechnik ein, welche gerade die Erhaltung großer Motorleistung bei abnehmender Luftdichte zum Ziel hatte. Es kann hier nur erwähnt werden, daß dies durch Überverdichtung, Überbemessung, Sauerstoffzufuhr oder Einbau eines Gebläses erreicht wird. Mit diesen Maßnahmen gelingt eine vollkommene Veränderung des ν, nicht nur eine kleine Verbesserung des Wertes, wie bei den anderen in Gleichung (23) stehenden Größen. Darum ist die Steigerung der Steigfähigkeit in erster Linie das Resultat der vervollkommneten Motorentechnik; die Kunst des Flugzeugkonstrukteurs kann heute in dieser Hinsicht nur noch relativ kleine Verbesserungen hervorbringen. So sehr überwiegt heute, was Steigfähigkeit anlangt, die Güte des Motors.

Die Fluggeschwindigkeit v folgt aus der Gleichung (20)

$$\frac{2g}{\gamma}\,\frac{G}{F c_a} \qquad (24)$$

Diese Beziehung genügt ohne weiteres, wenn der Anstellwinkel des Fluges gegeben ist; in diesem Fall ist der Staudruck in allen Höhen derselbe, die Geschwindigkeit wächst also mit wachsender Höhe und ist um so größer, je größer die Flächenbelastung gemacht wird. In letzterem Punkte ist also von Vorteil für die Ge-

schwindigkeit, was von Nachteil für die Steigfähigkeit ist. Soll das Flugzeug schnell sein, so sind kleine Flügelflächen, soll es gut steigen, große Flächen vorzuziehen.

In der Regel ist aber das Problem nicht so einfach abzutun, da nicht der Anstellwinkel gegeben ist. Kennt man die Steiggeschwindigkeit, so folgt aus den Gleichungen (19) und (20) die Geschwindigkeit nicht in analytischer Form, sondern indirekt; denn aus der Steiggeschwindigkeit (21) muß man erst den Anstellwinkel, nämlich seine Funktion $\frac{c_w^2}{c_a^3}$ berechnen; aus dieser folgt dann c_a mit Hilfe des empirisch bekannten Zusammenhangs zwischen c_a und c_w, daraus erst nach (24) die Geschwindigkeit. Beim schnellsten Anstieg bleibt der Anstellwinkel konstant, die Geschwindigkeit nimmt also mit wachsender Höhe zu. Beim Horizontalflug, der für die Wertung der Geschwindigkeitsleistung in erster Linie in Frage kommt, d. h. für $w = 0$, wird $\frac{c_w^2}{c_a^3}$ von der Luftdichte abhängig; der Zusammenhang ist durch Gleichung (23) gegeben; jeder Horizontalflug ist ja ein Flug in Gipfelhöhe bei einem bestimmten — in der Grenze dem günstigsten — Anstellwinkel. Je größer die Höhe, um so kleiner $\nu^2\gamma$, um so kleiner $\frac{c_w^2}{c_a^3}$, um so größer c_a, um so kleiner der Staudruck. Die Geschwindigkeit sinkt aber nicht ebenso wie der Staudruck, da ja die Dichte mit der Höhe abnimmt.

Die Abhängigkeit der Horizontalgeschwindigkeit von den einzelnen Konstruktionsgrößen ist nicht so einfach und durchsichtig, wie etwa bei der Gipfelhöhe. Alle Größen, welche die Steigfähigkeit günstig beeinflussen, vermindern den zum Horizontalflug gehörigen Anstellwinkel und somit den Wert von c_a; nur die Flächenbelastung kommt in doppelter Weise in Betracht. Erhöhung dieser Größe vermindert einerseits $\frac{c_w^2}{c_a^3}$ und somit den Wert von c_a, vermehrt aber anderseits die zu diesem c_a gehörige Geschwindigkeit nach (24); der letztere Einfluß überwiegt, so daß man einem Flugzeug, das sehr schnell sein soll, kleine Flächen geben muß. Natürlich darf man aber nicht schließen, daß etwa dasselbe Flugzeug bei größerem Gewicht, also bei stärkerer Belastung, schneller fliegt. Bei gleichem Anstellwinkel ist das wohl der Fall; in seiner Gipfelhöhe ist das schwerere Flugzeug wohl schneller als das leichtere Flugzeug in *seiner* Gipfelhöhe; aber diese erstere Höhe ist erheblich niedriger. In der gleichen Höhe fliegt das leichtere Flugzeug rascher.

Unter Umständen kann die Gleichung

(25)

welche für den Horizontalflug aus (19) und (20) folgt, von Nutzen sein, vor allem, wenn es darauf ankommt, die erreichbare Geschwindigkeit abzuschätzen. Die größte Geschwindigkeit ist erreichbar, wenn man bei kleinster Leistungsbelastung mit kleinstem $\frac{c_w}{c_a}$ fliegt. In geringer Höhe ist die Motorleistung am größten; dort muß man aber zum Horizontalflug einen kleinen Anstellwinkel verwenden, da man sonst keinen Leistungsüberschuß zum Steigen hat. Die beiden Forderungen guter Steigfähigkeit und größter Geschwindigkeit in irgendeiner Höhe stören sich also.

§ 5. Anstieg. Einfluß der Witterung.

Wir haben nun die Geschwindigkeit und die Steigfähigkeit in Abhängigkeit von der Luftdichte ausführlich erörtert; dies reicht aber noch nicht für alle praktischen Bedürfnisse aus. Die Luftdichte ist eine für das allgemeine Empfinden nicht anschauliche Größe; man will die Abhängigkeit von der Höhe selbst. Diese ist nun im allgemeinen eine indirekte, da die Höhe nur durch Vermittlung der Luftdichte auf die Luftkräfte von Einfluß ist; nur wenn man sich nicht mit der Kenntnis der Steiggeschwindigkeit begnügen, sondern die Höhe des Flugzeugs in Abhängigkeit von der Zeit vor sich sehen will, dann wird der Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdichte von ausschlaggebender Bedeutung. Denn die Steiggeschwindigkeit ist die Änderung der Steighöhe z mit der Zeit:

$$w = \frac{dz}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Auf der linken Seite der Gleichung (21) erscheint also die Höhe selbst, auf der rechten Seite nur die Luftdichte. Um die Gleichung (21) so zu integrieren, daß man die Steigzeit zwischen zwei Höhenstufen oder vom Boden bis zu einer bestimmten Höhe erhält, muß man eine Beziehung zwischen Höhe und Luftdichte einführen.

Diese Beziehung ist nun von Tag zu Tag, ja von Stunde zu Stunde verschieden; sie hängt von der Temperaturverteilung in der Atmosphäre, somit von Wind und Wetter ab. Um den Zusammenhang zu klären, müssen wir neben der Höhe z und der Luftdichte $\rho = \frac{\gamma}{g}$ noch den Luftdruck p, welchen der „Höhenschreiber" angibt, und die absolute Temperatur T einführen. Der Luftdruck auf die Flächeneinheit ist gleich dem Gewicht der darüberliegenden Luftsäule; geht man also um eine gewisse Strecke in die Höhe, so nimmt der Luftdruck um das Gewicht einer Luftsäule von dieser Höhe ab; mathematisch

$$dp = -\gamma dz. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Ferner sind p, γ und T durch die Gleichung der idealen Gase verknüpft:

$$p = R T \gamma, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

wobei die Konstante R für Luft den Wert $R = 29{,}3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Grad}}$ besitzt. Nimmt nun die Temperatur nach oben um den konstanten Betrag ϑ^0 pro Meter ab, so daß

$$dT = -\vartheta\, dz, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

so stellt sich ein Gleichgewicht ein, bei welchem in jeder Höhe ein bestimmter Druck und eine bestimmte Dichte herrschen. Bezeichnet der Index $_0$ den Wert einer Größe am Boden, so wird

$$T = T_0 - \vartheta z. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Führt man diesen Wert in (28) ein und drückt mit Hilfe dieser Gleichung γ in (27) durch p aus, so folgt

$$\frac{p}{p_0} \quad (\quad \vartheta z) \; ^{1}$$

und nach (28)

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left(1 - \frac{\vartheta z}{T_0}\right. \tag{32}$$

Welche Werte ϑ annehmen kann, folgt aus einer theoretischen Überlegung: Aus (31) und (32) folgt die Beziehung

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right. \tag{33}$$

Das ist eine sog. polytropische Verteilung von Druck und spezifischem Gewicht. Schlüsse über den Exponenten $n = \frac{1}{1 - R\,\vartheta}$ gestattet die Thermodynamik:

Wenn die in den unteren Schichten der Atmosphäre erwärmte Luft nach oben steigt, so wird sie infolge des geringeren Druckes sich ausdehnen; diese Ausdehnung ist je nach der Art des Wärmeaustausches mit der Umgebung eine verschiedene. Wird überhaupt keine Wärme von anderen Luftteilen aufgenommen oder infolge der Kondensation von Wasserdampf erzeugt, so geht die Ausdehnung adiabatisch vor sich; es wird sich also zwischen den einzelnen Schichten der Atmosphäre ein Gleichgewicht herstellen, bei welchem zwischen Druck und Dichte dieselbe Beziehung herrscht wie bei einer adiabatischen Zustandsänderung. In diesem Fall ist der Exponent n nach den Lehren der Thermodynamik gleich 1,41, daher $\vartheta = 0{,}01$; die Temperatur nimmt um 10^0 auf den Kilometer Höhe ab. Im entgegengesetzten Grenzfall, wenn die aufsteigende Luft aus der Umgebung soviel Wärme aufnimmt, daß ihre Temperatur trotz der Ausdehnung ungeändert bleibt, stellt sich ein isothermes Gleichgewicht her, $\vartheta = 0$. Zwischen diesen Grenzfällen liegen alle wirklich vorkommenden Verteilungen. Beim Ausgleich zwischen den einzelnen Höhenschichten wird der Verlauf meist mehr dem adiabatischen Grenzfall gleichen; dafür erweist eine einfache mechanische Betrachtung die Verteilung als um so stabiler, je geringer die Temperaturabnahme nach oben ist. Daher sind Verteilungen, bei welchen die Temperaturabnahme auf den Kilometer Höhe nicht zwischen 0^0 und 10^0 liegt, in der Wirklichkeit kaum anzutreffen.

Kennt man nun die Größe der Temperaturabnahme ϑ an einem bestimmten Tage, so kann man Gleichung (21) integrieren und die Steigzeit ausrechnen. Im allgemeinen ist natürlich ϑ nur empirisch gegeben; die Aufgabe ist aber meist nicht die Ausrechnung der Steigzeit an einem bestimmten Tag, sondern unter willkürlich gewählten Bedingungen, welche den Maßstab der Leistungen geben. Man fragt daher nach der Steigzeit in einer bestimmten „normalen" Atmosphäre und hat die Aufgabe, eine irgendwann gemessene Steigzeit immer auf diese Normale zu reduzieren.

Als normale Atmosphäre führt man eine solche ein, bei welcher ϑ gerade seinen mittleren Wert 5^0 in 1000 m annimmt; dann gehorchen Druck und spezifisches Gewicht der Luft den Beziehungen:

$$= \left(1 - \frac{0{,}005\, z}{T_0}\right)^{6{,}83} \tag{34}$$

und

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left(1 - \frac{0{,}005\, z}{T_0}\right)^{5{,}8} \qquad (35)^{1)}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{1{,}172} \qquad (36)$$

Dazu setzt man als Bodentemperatur 10^0 C, d. i. die absolute Temperatur $T_0 = 283^0$ fest, den Druck am Boden $p_0 = 10\,363$ kg/m², was einem Barometerstand von 762 mm Q.-S. entspricht, also ein spezifisches Luftgewicht $\gamma_0 = 1{,}250$ kg/m³. Die folgende Tabelle und Abb. 197 geben die einzelnen wichtigen Größen in Abhängigkeit von der Höhe. Die Spalten p und B geben die Druckwerte, welche bei allen gebräuchlichen Barographen mit den angeschriebenen Höhen gemeint sind.

Tabelle 1.

z	T_{abs}	p	B	γ	$\frac{\gamma}{\gamma_0}$
m	Grad	kg/m²	mm Q.-S.	kg/m³	—
—500	285,5	10990	808	1,312	1,050
0	283,0	10360	762	1,250	1,000
500	280,5	9750	717	1,188	0,950
1000	278,0	9180	675	1,127	0,902
1500	275,5	8620	634	1,069	0,855
2000	273,0	8100	596	1,013	0,810
2500	270,5	7610	560	0,960	0,768
3000	268,0	7140	525	0,910	0,728
3500	265,5	6700	493	0,862	0,690
4000	263,0	6280	462	0,815	0,652
4500	260,5	5890	433	0,770	0,616
5000	258,0	5510	405	0,729	0,583
5500	255,5	5160	379	0,689	0,550
6000	253,0	4820	355	0,651	0,521
6500	250,5	4510	332	0,614	0,491
7000	248,0	4210	310	0,579	0,463
7500	245,5	3930	289	0,546	0,437
8000	243,0	3660	270	0,515	0,412
8500	240,5	3400	250	0,483	0,386
9000	238,0	3160	233	0,454	0,364
9500	235,5	2950	217	0,427	0,342
10000	233,0	2770	204	0,405	0,324

Unter Zugrundelegung dieses Zusammenhangs wird Gleichung (21) am einfachsten numerisch integriert, indem man in Stufen von 1000 zu 1000 m oder auch von 500 zu 500 m das dort herrschende mittlere spezifische Luftgewicht γ und die zu diesem Luftgewicht empirisch bestimmte Motorleistung N einsetzt und den

[1]) Die von Everling a. a. O. und Kann a. a. O. verwendete Formel $\frac{\gamma}{\gamma_0} = 0{,}9^{\frac{z}{1000}}$ stimmt bis etwa 5000 m leidlich mit dieser Formel überein; sie ist praktisch für die formelmäßige Ausrechnung der Steigzeit, hat aber physikalisch keinen so klaren Sinn wie die obige.

Anstieg in diesen Stufen gleichförmig annimmt. Eine solche numerische Integration ist spielend ausführbar und immer genau genug. Man hat auch schon mit Hilfe eines angenommenen Zusammenhangs zwischen Höhe und spezifischem Luftgewicht und eines einfachen Gesetzes für die Abhängigkeit der Motorleistung von der Luftdichte die Integration in geschlossener Form ausgeführt. Diese Formeln scheinen uns aber keine praktische Bedeutung zu haben, sie sind an zu spezielle Voraussetzungen über die Motorleistung gebunden und für die Rechnung durchaus nicht handlicher als die numerische Integration.

Die Abweichungen von der normalen Dichteverteilung an beliebigen Tagen sind sehr bedeutend; daher ist ein Anstiegbarogramm, welches nur den Luftdruck als Funktion der Zeit anzeigt, keinesfalls ein einwandfreier Maßstab der Steigleistung. Mißt man aber beim Anstieg auch die Temperatur in Abhängigkeit vom Luftdruck, so ist die Umrechnung des Barogramms auf das normale Barogramm möglich; man kann berechnen, wie derselbe Anstieg erfolgt wäre, wenn in der Atmosphäre anstatt der wirklichen Dichteverteilung die normale geherrscht hätte. Für die Steigleistung maßgebend ist nur die Steiggeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Luftdichte, nicht das im Barogramm niedergelegte Integral dieser Größe; man hat daher durch eine richtige Differentiation aus dem Barogramm und der Temperatur die Steiggeschwindigkeit zu erschließen, und kann von dieser Größe ausgehend durch Integration unter der Annahme der normalen Atmosphäre das normale Barogramm errechnen.

Abb. 197. Normale Atmosphäre.

Zunächst ist der Luftdruck und somit die Höhenschreiberanzeige des Abflugortes nicht nur von seiner Höhenlage (worauf man selbstverständlich Rücksicht nimmt), sondern von der zufälligen Wetterlage abhängig; und noch stärker wie der Druck schwankt die Luftdichte, die auch noch von der Temperatur abhängt. Man muß daher nicht vom Erdboden als Anfangspunkt ausgehen, wenn man den Anstieg von Flugzeugen vergleichen oder werten will, sondern von der Höhe, in welcher eine gegebene Luftdichte herrscht, etwa die der normalen Atmosphäre bei 1000 m.

Diese Höhe ist an jedem Tage eine andere, dort wird aber das Flugzeug ceteribus paribus stets mit der gleichen Geschwindigkeit ansteigen.

Soweit ist die Luftdichte allein maßgebend; will man aber den zeitlichen Verlauf des Anstiegs verfolgen, so genügt die Kenntnis der Luftdichte allein nicht; die Schichten von bestimmter Luftdichte liegen nämlich an verschiedenen Tagen verschieden weit auseinander; die Zeit, welche das Flugzeug zwischen zwei Schichten von gegebener Luftdichte benötigt, ist also auch kein einwandfreier Maßstab. Diese Zeit ist proportional dem Schichtabstand, der mathematisch durch die Größe $-\frac{dz}{d\gamma}$ ausgedrückt wird. Geht man vom Erdboden aus in die Höhe, so findet man die Luftdichte aus zweierlei Gründen verändert, erstens wird der Druck geringer und infolgedessen die Dichte kleiner, zweitens aber nimmt die Temperatur ab, was bei gleichbleibendem Druck eine Vergrößerung der Dichte hervorrufen würde. Die beiden erwähnten Umstände arbeiten sich also entgegen. Bei bestimmter Dichte nimmt der Druck mit der Höhe in ganz eindeutiger Weise ab; es muß also für den Abfall der Dichte von einer bestimmten Dichteschicht aus der Einfluß des Temperaturabfalls ausschlaggebend sein. Daraus folgt, daß der Abstand zwischen zwei Schichten von bestimmter Dichte um so größer ist, je stärker die Temperatur mit der Höhe abnimmt. Je größer also unsere Größe ϑ ist, um so größer wird auch die Steigzeit eines und desselben Flugzeugs ausfallen. Der genaue Zusammenhang folgt aus den Gleichungen (27), (28) und (29). Differentiation von (28) ergibt nämlich

$$dp = RT\,d\gamma + R\gamma\,dT.$$

Bei Einführung dieser Beziehung und der Gleichung (29) in (27) folgt

$$dz = RT\,d\gamma - R\vartheta\gamma\,dz$$

oder

$$\frac{dz}{d\gamma} \qquad RT \tag{37}$$

Blasius gibt von dieser Formel eine sehr anschauliche Darstellung: Wenn man von gleichen Dichtewerten ausgeht, so wird nach (27) $\frac{dz}{d\gamma}$ proportional zu $\frac{dp}{d\gamma}$; der Zusammenhang zwischen p und γ ist aber von der Thermodynamik her dem Ingenieur geläufig. Abb. 198 zeigt, daß $\frac{dp}{d\gamma}$ bei der Adiabate, also bei großem ϑ größer ist als bei der Isotherme $\vartheta = 0$, und daß die Neigung derselben Polytrope bei gleichem γ um so größer ist, je höher die Temperatur. Die Schichten gleicher Dichte rücken auseinander, wenn der absolute Wert der Temperatur und das Temperaturgefälle wachsen. In welchem Maße dies der Fall ist, welche Unterschiede also im Anstieg eines Flugzeugs bei gleichbleibender Steigfähigkeit nur infolge verschiedener Beschaffenheit der Atmosphäre auftreten, veranschaulichen die Abb. 199 und 200. In der einen sind die Linien gleicher Dichte, in der anderen die Barogramme eines Flugzeuges eingezeichnet, welche sich bei der normalen

Atmosphäre $\vartheta = 5 \frac{\text{Grad}}{\text{km}}$, in den extremen Fällen $\vartheta = 0$ und $10 \frac{\text{Grad}}{\text{km}}$ und bei $= 5 \frac{\text{Grad}}{\text{km}}$, aber einer um 20° niedrigeren Bodentemperatur herstellen. In allen

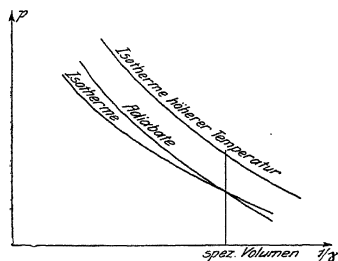



Abb. 198. Thermodynamische Erläuterung zur Umrechnung der Steigzeiten.

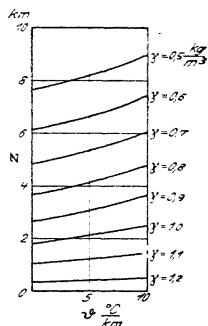



Abb. 199. Linien gleicher Dichte bei verschiedenem Temperaturgefälle.

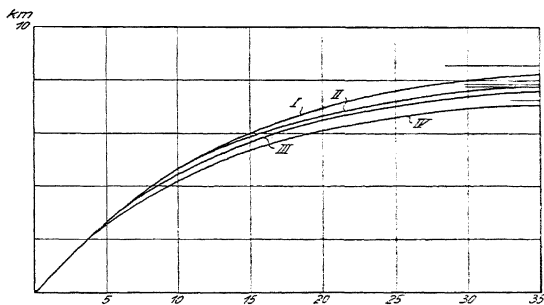



Abb. 200. Abhängigkeit der Steigzeiten von der Temperaturverteilung in der Atmosphäre.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I} & \vartheta = 10 \frac{\text{Grad}}{\text{km}} & T_0 = 283^0 \\ \text{II} & \vartheta = \;\;5 \;\;\text{,,} & T_0 = 263^0 \\ \text{III} & \vartheta = \;\;5 \;\;\text{,,} & T_0 = 283^0 \\ \text{IV} & \vartheta = \;\;0 \;\;\text{,,} & T_0 = 283^0 \end{array}\right\} p_0 = 10\,360$$

Fällen ist der Druck am Boden normal angenommen. Die Barogramme gehen vom Boden bis fast zur Gipfelhöhe; in Wirklichkeit stellt sich natürlich nie ein regelmäßiges Temperaturgefälle in diesem ganzen Bereich ein; aber unsere Betrachtungen gelten für jede einzelne Höhen- oder Dichtestufe. Man sieht den großen Einfluß von ϑ in großen Höhen; der Einfluß von T_0 bleibt auf niedrigere Höhen

Tabelle 2.

Umrechnung eines Barogramms.

Aus dem Barogramm z und t; aus Thermogramm T; p aus z nach Tabelle 1; $\gamma = \frac{p}{29{,}3\ T}$; $w = \frac{1}{\gamma_m}\,\frac{\Delta p}{60\ \Delta t}$. Daraus w-γ-Kurve in Abb. 201. Für die Höhenstufen des Normalbarogramms γ_m aus Tabelle 1, dazu w aus Abb. 201. $\Delta\tau = \frac{1000}{60\ w}$.

nelle Höhe	Druck	Δp	Zeit t	Δt	Temperatur T'		Spez. Luftgewicht	Mittelwert γ_m	eiggeschwindigkeit	Höhenstufe	w	Steigzeit $\Delta\tau$	Gesamte Steigzeit τ
					Grad Cels.	Grad abs.							
km	kg/m²	kg/m²	min.	min.			kg/m³	kg/m³	m/s	km	m/s		
0	10360		0,0		16,5	289,5	1,230				9,3	1,8	
		1180		2,0				1,172	9,1				
1	9180		2,0		8,0	281,0	1,113			1÷2			
		1080		2,3				1,053	7,4				4,0
2	8100		4,3		5,0	278,0	0,902						
		960		2,2				0,944	7,7				6,2
3	7140		6,5		-1,0	272,0	0,894				6,0		
		860						0,851	5,8				9,0
4	6280		9,4			265,0	0,808			4÷5	4,4		
		770		3,8				0,768					
5	5510		13,2		—15,0						3,6	4,6	
		690		4,6				0,688	3,6				17,4
6	4820		17,8		—18,0	255,0	0,647						
		610							2,0				
7	4210		—,—		—22,5	250,5	0,573			7÷7,5		9,8	
				8,4				0,560	0,8				
7,4	3980		34,6		—24,5	248,5	0,546						

beschränkt; oben wird durch T_0 die Dichte deshalb wenig verändert, weil infolge niedrigerer Temperatur die Dichte unten größer ist und somit der Druck nach (27) schneller abnimmt.

Tabelle 2 mit Abb. 201 zeigen das Schema einer Barogramm-Umrechnung auf die normale Atmosphäre; eine solche muß man immer vornehmen, wenn man aus einem Barogramm auf die Steigfähigkeit des Flugzeugs schließen will. In unserm der Praxis entnommenen Beispiel (Jagdeinsitzer Ru D I mit BMW-Motor 185 PS, Gewicht 800 kg) ist die Veränderung der Steigzeiten durch die Umrechnung recht gering. Lehrreich ist die w-γ-Kurve in Abb. 201; man erkennt an ihr die Unregelmäßigkeit im Aufstieg, welche man dem Führer oder einer Vertikalströmung zur Last legen muß; das Barogramm läßt davon nichts erkennen. Für tiefergehende Wertung ist die w-γ-Kurve viel ergiebiger; auch ist aus ihr allein eine Extrapolation auf die Gipfelhöhe mit leidlicher Sicherheit möglich.

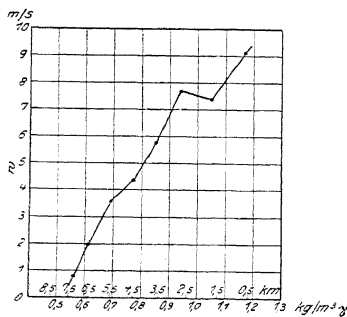



Abb. 201.
Zur Umrechnung eines Barogramms.

graphisches Verfahren für diese Umrechnung hat v. Mises angegeben.

§ 6. Gewinnung des numerischen Materials.

Die besprochenen theoretischen Zusammenhänge folgen in höchst einfacher Weise aus den beiden Grundgleichungen; sie gewinnen ihren praktischen Sinn aber erst dadurch, daß sie numerisch verwendet werden: die genaue Feststellung der Zahlenwerte, welche für die einzelnen Größen, insbesondere für die empirischen Funktionen einzusetzen sind, ist das wichtige Hauptproblem, welche die Kraftgleichungen aufwerfen. Dies Problem ist nun durchaus nicht einfach und noch sehr weit von einer einigermaßen befriedigenden Lösung entfernt. Überblickt man die aerodynamische Literatur, so gewinnt man den Eindruck, daß der grundsätzlichen Erörterung weit größere Aufmerksamkeit zugewandt ist als der Beschaffung des numerischen Materials; wir möchten darum an dieser Stelle betonen, daß unseres Erachtens die erstere einfach, die letztere hingegen schwierig und von ausschlaggebender Bedeutung ist. Erst durch gesichertes numerisches Material kann die ganze grundsätzliche Erörterung Sinn gewinnen.

Aus den Modellversuchen werden wichtige Gesichtspunkte für die numerischen Werte der Luftkräfte gewonnen; aber sie reichen nicht aus zur restlosen Durchdringung der Verhältnisse des Kräftegleichgewichtes. Wir kennen vor allem aus den Modellversuchen durchaus noch nicht die Werte des Schraubenzugs bei verschiedenen Drehzahlen und Geschwindigkeiten. Aus unseren Kenntnissen der einzelnen Werte kann erst dann ein gesichertes, allgemein verwendbares System werden, wenn systematische wissenschaftliche Versuche im Fluge die Verwendung der Einzelerfahrungen gestatten. Wie schon oben erwähnt, ist man in dieser Hinsicht noch nicht weit vorgeschritten; mag dies zur Entschuldigung dafür dienen, daß wir auf diesen Punkt wieder und wieder verweisen; wir sehen hier die empfindlichste Lücke im Gebäude der Flugwissenschaft. Für den Praktiker stellt sich die Frage so, daß er aus den von einem Flugzeug erzielten Leistungen mit Sicherheit beurteilen will, wie sie im Verhältnis zum Erreichten und Erreichbaren zu bewerten sind, und wo er zur Verbesserung anzusetzen hat; insbesondere will er bei nicht befriedigender Leistung wissen, ob die aerodynamische Durchbildung des Flugzeugs oder die Motorleistung oder die Schraube Schuld daran tragen. Er will beim Entwurf bereits über die wahrscheinlichen Leistungen Klarheit haben und bei der Durcharbeitung des fertigen Flugzeugs einen sicheren und richtigen Weg zur Vervollkommnung einschlagen. Dazu ist es wichtig, daß er aus den Leistungen die einzelnen Größen, welche für das Kräftegleichgewicht Bedeutung haben, erschließen kann, und daß er durch wissenschaftliche Untersuchungen Vergleichspunkte und sichere Maßstäbe für das Erreichbare geliefert bekommt. Im Kriege, als es nur auf den raschen Erfolg ankam, mußte hier notwendig ein sehr summarisches Verfahren und somit eine gewisse Oberflächlichkeit Platz greifen: wenn es eine geregelte und erfolgreiche Friedensentwicklung des Flugzeugs gibt, so kann man wohl auf einen soliden Ausbau dieser praktisch wichtigen Grundlagen rechnen, und es ist zu hoffen, daß in späteren Auflagen dieser und der folgende Paragraph weniger Zukunftsmusik und mehr gesicherte Ergebnisse enthalten werden.

Bei allen Messungen am Flugzeug kommt es, wie bei den Leistungen des Flugzeugs, in erster Linie auf das Flugzeuggewicht an; ein Versuchsflug, bei welchem

das Gewicht nicht genau bestimmt wird, hat keinen Wert. Man kann auch alle Leistungen durch keine Maßnahme so wirksam beeinflussen, wie durch Gewichtsersparnis. Bei Versuchen hat die Gewichtsbestimmung keine Schwierigkeit; während des Fluges wird das Gewicht nur durch den Brennstoffverbrauch geändert, der leicht abzuschätzen ist. Immerhin sind die Steigleistungen so empfindlich gegen Gewichtsänderungen, daß bei Flugzeugen, welche lange in der Luft bleiben, die Gipfelhöhe um einige hundert Meter infolge des Brennstoffverbrauchs erhöht wird.

Nächst dem Gewicht ist die Motorleistung wichtig, und zwar in Abhängigkeit von der Höhe. Zu diesem Zweck sind sog. Höhenprüfstände gebaut worden,[1]) in welchen der Motor bei verschiedenen Luftdichten arbeitet und seine Leistung sowie sein Brennstoffverbrauch und sonstige maschinentechnisch wichtige Größen gemessen werden können. Die so gewonnenen Werte können wohl zur Beurteilung und Vorausberechnung der Flugleistungen eine schöne Grundlage geben; doch wissen wir noch nicht, inwieweit man die Motorleistung wirklich als nur von der Luftdichte abhängig ansehen kann. Die Temperatur der umgebenden Luft und wohl ebenso ihr Druck werden auch einzeln einigen Einfluß auf den Gang und die Leistung des Motors haben, und diese Verhältnisse werden im Höhenprüfstand nicht der Wirklichkeit entsprechend wiedergegeben. Darum ist es zweifelhaft, ob man bei Auswertung von Flugversuchen ohne weiteres die Ergebnisse der Prüfstandmessungen zugrunde legen darf. Die Motorleistung beeinflußt ja alle Flugleistungen sehr entschieden; kleine Fehler in der Abschätzung dieser Größe werden sich bei der Auswertung von Versuchen sehr fühlbar machen. Auch sollte man keinesfalls den Leistungsmittelwert in solchen Fällen einsetzen, sondern den Bremswert des benutzten einzelnen Motors; die Abweichungen sind — ebenso wie beim Gewicht — fühlbar genug, um die Meßergebnisse zu verschleiern.

Sache der Versuchsflüge ist die Bestimmung der Kräfte, welche von der Luft auf das Flugzeug und auf die Schraube ausgeübt werden, also der in unseren Gleichungen vorkommenden Größen S, η, c_a, c_w. Von diesen ist am leichtesten die Größe c_a zu fassen, denn nach Gleichung (9) genügt die Bestimmung des Staudrucks, um sie zu berechnen. Dagegen stehen die beiden Unbekannten c_w und S (bzw. η) in der einen Gleichung (10), sind darum einzeln nicht zu erhalten, solange beide als unbekannt angesehen werden müssen; und es hat natürlich höchstens für eine Abschätzung Wert, etwa für c_w aus Modellversuchen den zum gemessenen c_a gehörigen Wert einzusetzen oder für η einen Mittelwert anzunehmen. Man muß vielmehr den Gleitflug zu Versuchszwecken heranziehen, und zwar nicht den Gleitflug der praktischen Fliegekunst, bei welchem die Schraube noch 600—900 $\frac{\text{Umläufe}}{\text{min}}$ macht, sondern einen theoretischen reinen Gleitflug, bei welchem die Schraube wirklich still steht oder wenigstens so langsam läuft, daß die Schraubenkraft klein gegen die Widerstandskraft angenommen werden kann. Es ist durchaus nicht leicht festzustellen, wie weit die Drehzahl dazu vermindert werden muß. Zwar nimmt nach Gleichung (11) die Schraubenkraft mit dem Quadrat der Drehzahl ab, aber der Beiwert ψ kann doch noch einen namhaften, und zwar posi-

[1]) Zuerst wohl 1916 in Deutschland und Amerika.

tiven oder negativen Wert haben. Mißt man bei einem reinen Gleitflug den Staudruck (direkt oder Dichte und Geschwindigkeit einzeln) und den Gleitwinkel oder die Sinkgeschwindigkeit, was mit Variometer oder durch Auswertung des Barogramms geschehen kann, so kann man aus den Gleichungen (1) und (2) ohne weiteres c_a und c_w berechnen und das Polardiagramm des Flugzeugs aufzeichnen. Der Anstellwinkel ist für das vorliegende Problem ohne Bedeutung, braucht darum für diesen Zweck nicht mitgemessen zu werden. Kennt man nun den Widerstand des Flugzeugs in Abhängigkeit von seinem Auftrieb, so kann man auch die Motorflüge mit verschiedener Drehzahl auswerten; c_a bestimmt sich ja beim Motorflug unmittelbar aus der bekannten Flächenbelastung und dem gemessenen Staudruck; aus c_a folgt nach dem Gleitflugversuch c_w, aus diesem und dem gemessenen Anstiegwinkel oder der Steiggeschwindigkeit der Schraubenzug. Wie aus dem Gleitflug das Polardiagramm, so folgt daher aus dem Motorflug der Schubwert ψ der Schraube in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad λ (s. I. Teil, 7. Kapitel). Nimmt man den Wert der Motorleistung aus den Messungen im Höhenprüfstand an, so folgt auch der Drehwert μ oder der Wirkungsgrad η der Schraube. Natürlich kann die Steiggeschwindigkeit auch negativ sein, wenn die Drehzahl genügend herabgedrückt wird; die Versuche liefern auch dann wichtige brauchbare Ergebnisse; nur muß man unter Umständen anstatt der Gleichung (9) und (10) die nicht vereinfachten Kraftgleichungen benutzen. Dies ist der Gedankengang, der allen einfachen Flugversuchen mit kleineren oder größeren Modifikationen zugrunde liegen muß; seine Durchführung ist nicht schwer; es bedarf nur weniger handlicher Instrumente, welche selbst registrieren oder abgelesen werden können; zu messen sind nur: Staudruck, Steig- bzw. Gleitgeschwindigkeit, Temperatur oder Dichte und Drehzahl; es kommt nur auf die Mittelwerte während eines nach Möglichkeit gleichmäßigen Fluges an. Die Einführung solcher Versuche müßte der Praxis in den Fabriken eine große Unterstützung sein; sie kann am leichtesten zur Kenntnis der für Entwurf und Wertung wichtigsten numerischen Werte führen. Leider ist bisher in dieser Richtung noch wenig geschehen; der ganze Gedankengang ist in der deutschen Literatur nur von König und Pröll an wenigen Flugzeugen praktisch durchgeführt worden. Auch wir selbst haben zusammen mit Herrn Dr. Blasius solche Versuche, welche wir unten verwenden werden, bei der Flugzeugmeisterei in Adlershof angestellt.

Auf technische Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden; man hat bei der Geschwindigkeitsmessung die Instrumentenangabe je nach dem Standort des Meßgerätes mit Hilfe der Zirkulationstheorie zu korrigieren; die Korrektur macht für den Staudruck, wenn das Instrument etwa um die Flügeltiefe über dem Oberflügel liegt, noch etwa 10 vH aus; bei Berechnung der Steiggeschwindigkeit aus dem Barogramm muß die Dichte unbedingt berücksichtigt werden; das Barogramm gibt $\frac{dp}{dt}$, die Steiggeschwindigkeit ist

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dt}.$$

Bei dem besprochenen Gedankengang wurden die Eigenschaften des Flugzeugs von denen der Schraube in einer Weise getrennt, die uns für die Be-

dürfnisse der Praxis brauchbar scheint, die aber durchaus nicht notwendig und logisch eindeutig ist; der Motor ist ein vom übrigen Flugzeug unabhängiges Organ, die Schraube bildet aber mit dem übrigen Flugzeug zusammen einen unteilbaren Organismus. Für die Versuchszwecke haben wir die Vorgänge so dargestellt, wie wenn eine Schraube von bestimmter Zugkraft ein Flugzeug von bestimmtem Widerstand und Auftrieb in Bewegung setzte; dies ist eine Idealisierung der tatsächlichen Verhältnisse. In Wirklichkeit wirft die Schraube einen Luftstrahl nach hinten, welcher bei den meisten Konstruktionen Flugzeugteile, insbesondere Rumpf und Leitwerk, aber auch Teile der Flügel überstreicht; infolgedessen werden die Luftkräfte an diesen Teilen bedeutend geändert; man kann also nicht streng sagen, daß der Widerstand des Flugzeugs, somit der Koeffizient c_w, welcher zu einem bestimmten c_a gehört, für Gleitflug und Motorflug derselbe ist. Umgekehrt wird aber auch die Zugkraft der Schraube durch ihren Einbau verändert; der Schraubenstrahl wird am Rumpf in verschiedener Weise je nach der Form des Rumpfes gestaut, die Schraubenkraft hängt recht wesentlich davon ab, ob die Schraube frei ausblasen kann oder nicht; man kann daher nicht erwarten, daß die Schraubenkraft bei einem Flug ebensogroß ist, als die, welche dieselbe Schraube bei derselben Drehzahl und derselben relativen Luftgeschwindigkeit aufweist, wenn sie allein im Luftstrom steht. Bei Druckschrauben ist die Trennung einwandfreier; denn die Ansaugung der Schraube (Vorstrom) ist nicht so empfindlich und für die Flugzeugteile nicht so wirksam, wie das Ausblasen. Bei Entenkonstruktion mit Druckschraube sind die idealisierten Verhältnisse vielleicht einigermaßen erreicht; aber eine solche Konstruktion existiert gegenwärtig nicht. Im übrigen muß man sich bei den vorgeschlagenen Versuchen alle diese Störungen in die Größe S bzw. η hineingenommen denken. Diese Größen hängen also bei Verfolgung des obigen Gedankengangs nicht nur vom Fortschrittsgrad, sondern auch von der Art des Zusammenbaues von Schraube und Flugzeug ab. Eine kleine Fehlerquelle ist noch die verschiedene Einstellung des Höhenruders bei Motorflug und Gleitflug; dadurch werden die Luftkräfte aber nur dann in fühlbarer Weise geändert, wenn es sich um recht große Ausschläge handelt; solche können, wie im I. Teil, VI § 3 gezeigt wurde, eine nicht unbedeutende Erhöhung des Widerstands verursachen; aber Flugzeuge, bei welchen im stationären Betrieb große Ruderausschläge vorkommen, sind wegen ihres schlechten Momentenausgleichs ohnehin unbrauchbar; wir können daher den erwähnten Fehler in der Regel vernachlässigen.

Ein anderer Weg zur Feststellung der numerischen Luftkraftwerte beginnt nicht bei den Eigenschaften des Flugzeugs, sondern bei denen der Schraube selbst mit Hilfe der in der Einleitung § 4 bereits beschriebenen Meßnabe. Hierbei werden die Schraubenkräfte — Zug und Drehmoment — gemessen und daraus einerseits auf das Flugzeug, andererseits auf den Motor Schlüsse gezogen. Bei dem vorher besprochenen Versuchsweg war der Motor ganz ausgeschaltet; seine Wertung konnte nur aus der in bestimmter Höhe erreichbaren Drehzahl der Schraube gewonnen werden; sie durfte auch bei der rein aerodynamischen Fragestellung zurücktreten. Mit der Meßnabe wird das Drehmoment der Schraube, welches nach Gleichung (5) dem Drehmoment des Motors gleich ist, unmittelbar gemessen; diese Meßergebnisse liefern also eine sehr wertvolle Kontrolle und Ergänzung der Mes-

sungen im Höhenprüfstand, bei welchen, wie erwähnt, nicht alle Verhältnisse der höheren Atmosphärenschichten nachgeahmt werden können. Für unsere Betrachtungen kommt nur die direkte Messung des Schraubenzugs in Betracht, die ja im Zusammenhang mit Geschwindigkeits- und Steiggeschwindigkeitsmessung auch Auftrieb und Widerstand und somit sämtliche Luftkraftbeiwerte der Kraftgleichungen zu ermitteln gestattet. Man kann aus Gleichung (10) wie früher c_a und aus Gleichung (9), unter Einsetzung des gemessenen Wertes von S, c_w berechnen. Dabei haben aber diese beiden letzteren Größen nicht ganz dieselbe Bedeutung wie in unserem ersten auf dem Gleitflug ruhenden Gedankengang; die Trennung des einheitlichen Flugmechanismus in Flugzeug und Schraube erfolgt hier in anderer Weise. Die Meßnabe gibt die von der Schraube auf den Rumpf übertragene Kraft an, welche dazu dient, den Flugwiderstand des gesamten Flugzeugs ohne Schraube beim Motorflug zu überwinden, also einen Flugwiderstand, der größer als der Gleitflugwiderstand ist; die Größen S und c_w, welche bei der Auswertung dieser Versuche erscheinen, sind also größer als die bei den Versuchen erster Art auftretenden; dementsprechend wird auch der Wirkungsgrad η ein verschiedener sein. Der Unterschied ist von Munk durch Modellversuche qualitativ klargestellt worden; Parallelversuche im Fluge der ersten und zweiten hier beschriebenen Art könnten von großem Interesse sein.

Munk mißt den Widerstand W_1 eines Rumpfes für sich, den Widerstand W_2 des Rumpfes, wenn er im Schraubenstrahl steht, und den Zug $S_1 = - W_3$ (negativen Widerstand) des ganzen Systems Rumpf + Schraube. Er unterscheidet den „gesamten Zug“ S_1, welcher zur Überwindung des Widerstandes der übrigen Flugzeugteile zur Verfügung steht, von dem „Meßnabenschraubenzug“ $S_2 = W_2 - W_3$ und dem „Rechnungsschraubenzug“ $S_3 = W_1 - W_3$. Munk hält nur die Größe S_1 für physikalisch wichtig; diese ist auch für Modellversuche sinnvoll, aber beim Flugversuch nicht meßbar und daher für die Praxis nicht den anderen Werten vorzuziehen. Durch die Trennung des Rumpfes vom übrigen Flugzeug begeht man auch eine Willkür, die nur durch praktische Verwertbarkeit zu rechtfertigen wäre. Setzt man an Stelle des Rumpfes allein das ganze Flugzeug, so wird beim Flug $S_1 = 0$, also bedeutungslos. Dagegen sind die anderen beiden Größen gerade für den Flugversuch wichtig. S_2 gibt nämlich die beim Meßnabenversuch gemessene Kraft an und S_3 die Kraft, welche bei den auf den Gleitflug aufbauenden Versuchen herauskommt. Beide Größen haben physikalischen Sinn. Die Definition der Schraubenkraft und ihre Abtrennung vom Flugzeugwiderstand ist stets mit einer gewissen Willkür behaftet und gibt nur die Meßvorschrift innerhalb einer bestimmten Versuchsreihe. Welche Definition sich einbürgern wird, hängt nur davon ab, welche Versuche besser zum Ziel, nämlich zu gesicherten numerischen Werten führen werden. Die im Modellversuch gemessenen Luftkraftbeiwerte sind offenbar nur mit den durch Gleitflugversuch gemessenen zu vergleichen. Sie lassen sich also nur zusammen mit solchen Werten von S und η verwenden, welche aus einer Versuchsreihe der ersten besprochenen Art folgen. Kombiniert man sie ohne weiteres mit den Ergebnissen der Meßnabenversuche, so gelangt man zu falschen Schlüssen.

Die bisher veröffentlichten Versuche mit der Meßnabe ergeben, wie zu er-

warten, höhere η als die Versuche mit Gleitflügen. Sie sind aber noch nicht so weit durchgeführt, daß man auch die dazugehörigen c_w-Werte aus den Angaben errechnen könnte.

Abb. 202 zeigt Munks Versuchsergebnisse (Schraubenkraft in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrade) bei spitzem und stumpfem Rumpf; man erkennt daraus, um wieviel der Widerstand des Flugzeugrumpfes im Motorflug gegen den Widerstand im Gleitflug erhöht wird. Der Unterschied in den Schraubenkraftwerten nach den beiden Definitionen wird etwa 10—20 vH betragen, je nach der Gestalt des Rumpfes; entsprechend werden auch die c_w-Werte verschieden sein. Es ist interessant zu sehen, wie verschieden dieselbe Wirkung bei verschiedener Rumpfgestaltung ausfällt. Bei stumpfem Rumpf muß natürlich mehr vom Impuls des Schraubenstrahls gestaut werden; infolgedessen wird der Rumpfwiderstand mehr erhöht und damit kommt auch der Meßnabenschraubenzug S_2 größer heraus. Trotzdem ist der spitze Rumpf günstiger; denn er läßt mehr Impuls der Luftbewegung ungestört nach hinten, was größere Reaktionskraft nach vorn zur Folge hat. Würde die Schraube vom Rumpf ganz abgeschirmt, so könnte offenbar gar keine vorwärtstreibende Kraft zustande kommen; der Meßnabenschraubenzug, eine innere Kraft des Systems, würde aber dabei einen besonders großen Wert erhalten. Bei Verwertung von Meßnabenversuchen muß auf diesen Punkt wohl geachtet werden.

Abb. 202. Modellversuche über Rumpf und Schraube.

Solange systematische Versuche der geschilderten Art nicht vorliegen, muß man, um numerisches Material zu erhalten, aus den vorliegenden Versuchen nach Möglichkeit Schlüsse ziehen; wirklich durchgeführt[1]) sind aber nur wenige Horizontalflugmessungen und eine große Menge Steigflüge, deren Barogramm man auswerten kann. Auch von diesen ist der weitaus größte Teil wertlos, da man die Temperatur nicht mitgemessen hat. Aus diesem Material sind natürlich keine exakten

[1]) Diese Aussage bezieht sich auf Deutschland und die Zeit des Kriegsendes; heute liegen eine große Anzahl — besonders amerikanischer — Versuche vor, deren Auswertung im Sinne obiger Darlegungen hier noch nicht vorgenommen werden konnte

Werte herauszuholen, auch nicht mit der Sicherheit, welche für die Praxis nötig ist. Es kann nur die Übertragung einer zufälligen Erfahrung auf andere Fälle bedeuten, wenn man aus den Ergebnissen solcher Versuche Mittelwerte der Größen c_a, c_w und η berechnet, um diese dann bei Entwurf und Wertung zu verwenden. Eine Auswertung nach Schraubenzugwerten hat kaum einen Sinn; man muß sich mit dem Begriff des Wirkungsgrades begnügen, der durch Einsetzen der Motorleistung aus den Höhenprüfstandmessungen gewonnen wird. Aus den Geschwindigkeitsmessungen folgt die Größe c_a ohne weiteres, c_w und η aber nicht gesondert, sondern nur in der Verbindung $\frac{c_w}{\eta}$; wenn dasselbe Flugzeug in verschiedenen Höhen geflogen wurde, wie es z. B. in den Versuchen von Heidelberg und Hölzel geschehen ist, so läßt sich also eine Art Polardiagramm konstruieren. Solch ein Diagramm, aus Geschwindigkeitsmessungen gewonnen, mag mit einer gewissen Sicherheit bei Vorausberechnungen der Geschwindigkeit zugrunde gelegt werden.

Etwas Ähnliches kann man durch Auswertung von Barogrammen erreichen: das Barogramm gibt die Änderung des Luftdrucks mit der Zeit $\frac{dp}{dt}$, die Temperaturmessung durch die Gleichung $\gamma = \frac{RT}{p}$ die Luftdichte; aus diesen beiden Größen folgt die Steiggeschwindigkeit $w = -\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dt}$ als Funktion der Luftdichte. Dieses Ergebnis kann aerodynamisch ausgewertet werden; die Gleichung (21) stellt nämlich nun eine lineare Beziehung zwischen den beiden Unbekannten η und $\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}$ dar:

$$w = \frac{75\,N}{G}\cdot\eta - \sqrt{\frac{2gG}{\gamma F}}\cdot\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}} = A\eta - B\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}.$$

In einem Diagramm mit den Koordinaten η und $\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}$ ist dies eine Gerade. In verschiedenen Höhen hat man verschiedene Dichten, verschiedene Motorleistungen und verschiedene Steiggeschwindigkeiten, also wird die Lage der Geraden im Diagramm von der Höhe abhängen; jedes Barogramm gibt eine Schar von solchen Geraden. Würde ein Anstieg nun mit konstantem Anstellwinkel, also konstantem c_a und c_w und mit konstantem Wirkungsgrad geflogen, so würden sich die Geraden alle in einem Punkt schneiden, und die Werte von η und $\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}$, die zu diesem Punkte gehören, könnten eindeutig jeder Anstiegberechnung zugrunde gelegt werden. Aber natürlich liegen die Verhältnisse nicht so einfach; die Geraden schneiden sich unter sehr kleinen Winkeln, die Schnittpunkte liegen daher sehr unsicher und weit auseinander. Man muß sich also damit begnügen, ein Gebiet im Diagramm abzugrenzen, innerhalb dessen die Mittelwerte der beiden aerodynamischen Konstanten zu suchen sind. Man tut dies am besten unter Bevorzugung der Geraden, welche der höchsten Anstiegkurve entspricht, weil in dieser der Führer sich in der Regel mehr wie in den unteren Stufen darum bemüht hat, das Mögliche aus dem

Tabelle 3.

Berechnung von η und $\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}$ aus der Steiggeschwindigkeit.

$G = 800$ kg; $F = 16{,}6$ m²; Ru D I mit BMW-Motor 185 PS.

$$\eta = \frac{G}{75} \cdot \frac{w}{N} + \frac{G}{75} \sqrt{\frac{2gG}{F}} \cdot \frac{1}{N\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}} = 10{,}6 \frac{w}{N} + 327 \cdot \frac{1}{N\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}$$

In Abhängigkeit von γ aus Abb. 201, N aus Messungen im Höhenprüfstand.

γ kg/m³	w m/s	N PS	$10{,}6 \frac{w}{N}$	$\frac{327}{N\sqrt{\gamma}}$
0,960	7,7	180	0,45	1,85
0,862	6,0	180	0,35	1,95
0,770	4,4	160	0,29	2,33
0,689	3,6	140	0,27	2,81
0,614	2,1	122	0,18	3,42
0,565	0,85	110	0,082	3,96
	Mittelwerte:		0,27	2,72

Flugzeug herauszuholen, sich darum der günstigsten Anstiegsart am meisten genähert hat, und weil beim Anstieg der größere Teil der Zeit doch für die höheren Schichten verwandt werden muß. Tabelle 3 und Abb. 203, welche an Tabelle 2 und Abb. 201 anknüpfen, zeigen, wie man bei der Auswertung vorgehen kann, und geben ein Bild von der Genauigkeit (oder besser gesagt Ungenauigkeit) dieser aerodynamischen Konstantenbestimmung. Immerhin kann man aber aus diesem Diagramm einen Anhalt gewinnen, welche Werte von $\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}$ und η man zusammenordnen darf, wenn man die wirklich erreichten Leistungen rechnerisch fassen will. Mit dem in der Figur mit einem Stern bezeichneten Mittelwert, welcher allen Geraden naheliegt, kann man die Anstiegverhältnisse in erster Näherung gut darstellen. Die große Abweichung der obersten Geraden ($\gamma = 0{,}960$ kg/m³) findet man in dem auffallend hohen Wert der Steiggeschwindigkeit in dieser Höhe (Abb. 201) wieder.

Abb. 203.
Auswertung eines Barogramms.

§ 7. Zusammenstellung der numerischen Werte.

So lückenhaft unsere Kenntnis der numerischen Werte auch ist, der Praktiker kann nicht auf einwandfreie wissenschaftliche Versuche warten. Deshalb ist im Folgenden zusammengestellt, was an numerischen Daten wichtig und nützlich sein kann. Die Werte können eine Grundlage für Entwürfe abgeben; man kann sich

nicht auf alles sicher verlassen, aber man wird in der Größenordnung nicht fehlgehen, wenn man die Werte in die Gleichungen der vorigen Paragraphen einsetzt und danach die von einem Entwurf zu erwartenden Leistungen abschätzt.

1. **Motorleistung.** Da der Motor unabhängig vom Flugzeug hergestellt wird, muß der Flugzeugkonstrukteur mit dem Motor als etwas fest Gegebenem rechnen; der Bau der Motortypen wird bisher nur in ganz allgemeiner Weise von den Bedürfnissen der Flugzeugtechnik beeinflußt; im Einzelfall muß sich das Flugzeug nach dem Motor richten. Wir geben zunächst eine Tafel (Abb. 204) mit den Drehmomenten der wichtigsten deutschen Motoren in Abhängigkeit von der Drehzahl;

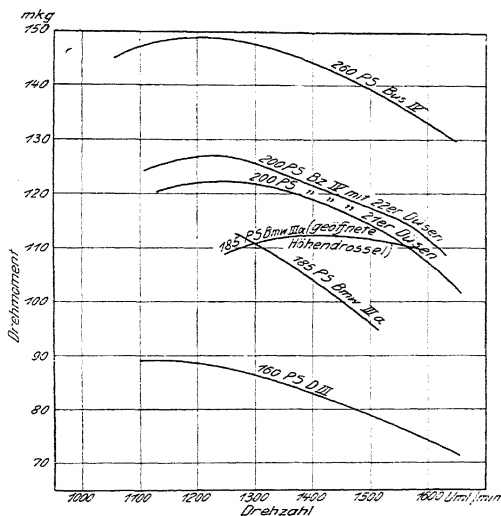



Abb. 204. Motordrehmoment abhängig von der Drehzahl.

man braucht die Werte, wenn man nach (5) die Drehzahl einer gegebenen Schraube berechnen will; beim heutigen Stand der Kenntnisse wird man aber wohl kaum in so exakter Weise rechnen können und muß sich damit begnügen, das Motordrehmoment als konstant innerhalb des praktischen Bereiches anzusehen, so daß die Motorleistung einfach proportional der Drehzahl wird.

Die Abhängigkeit der Motorleistung von der Luftdichte, welche für alle aerodynamischen Rechnungen von ausschlaggebender Wichtigkeit ist, kann nach Kutzbach in folgender Weise konstruiert werden (Abb. 205): Von dem an der Bremse am Boden ermittelten Wert N_B nimmt die indizierte Leistung des gewöhnlichen Motors proportional der Luftdichte ab; etwa 10 vH der indizierten Leistung gehen aber für die Reibung in Triebwerk und Steuerung, für Betriebsstoff und Kühlwasserförderung usw. verloren, so daß man nicht die der Luft-

schraube zur Verfügung stehende Leistung als proportional der Luftdichte ansehen darf. Man hat vielmehr die Gerade in dem Diagramm durch den Abszissenpunkt $\frac{\gamma}{\gamma_0} = 0,1$ oder $\gamma = 0,125$ kg/m³ zu ziehen. Die Abweichung ist groß genug, um z. B. bei der Berechnung der Steigzeiten entscheidend ins Gewicht zu fallen. Diese Gerade gibt ein Maß für die in jeder Höhe erreichbare Leistung; sie stellt die sog. „Ladungsgrenze" dar. In Wirklichkeit wird die Leistung eines Motors besonders in größeren Höhen stets etwas darunter bleiben, und zwar in einer Weise, die sehr von den individuellen Eigenschaften des Motors, insonderheit von der Vergasereinstellung abhängt.

Zur Verbesserung der Motorleistung mit der Höhe kann man nach Kutzbach vier Wege einschlagen: Vergrößerung der Kolbenfläche, Überverdichtung, Zufuhr von Sauerstoff und Erhöhung der Luftdichte durch ein Gebläse. Im letzteren Fall erhöht sich der Reibungsverlust um die zum Betriebe des Gebläses nötige Leistung, sonst bleibt er derselbe. Die Leistung des Höhenmotors wird durch eine Gerade dargestellt, die bei der Dichte Null durch denselben Wert wie beim gewöhnlichen Motor geht, bei der Luftdichte am Boden aber einen größeren Wert anzeigt. Dieser Geraden entsprechend kann aber der Motor nur in größerer Höhe arbeiten; bei größeren Luftdichten muß eine gewisse Betriebsgrenze der Motorleistung, die meist mit der Leistung des gewöhnlichen Motors bei der Luftdichte am Boden zusammenfällt, eingehalten werden. Man nimmt für aerodynamische Rechnungen als günstigsten Fall an, daß die Betriebsgrenze bis zu der Dichte eingehalten wird, bei welcher die Gerade der Höhenleistung den Wert der Betriebsgrenze erreicht, und daß von da an die Leistung dieser Geraden entsprechend abnimmt. In Abb. 205 ist die geschilderte Konstruktion durchgeführt und die angenommene Leistungskurve stärker gezeichnet. Dazu ist die Höhe der normalen Atmosphäre bei den betreffenden Luftdichten angegeben; dabei ist zu beachten, daß die Werte N_B und N_H, wie beim Motorbau üblich, nicht bei der Bodendichte der normalen Atmosphäre gemessen und angegeben sind, sondern bei $\gamma = 1,225$ kg/m³. Die Konstruktion kann für jeden Motor durchgeführt werden, wenn man nur die Leistungswerte am Boden N_B und N_H mit und ohne Höhengas kennt. Diese Größen sind für die zur Zeit wichtigsten deutschen Motoren in Tabelle 4, die wir Herrn Prof. Kutzbach danken, angegeben. Die Werte gelten alle nur bei der gleichfalls in der Tabelle verzeichneten normalen Drehzahl des Motors; bei anderer Drehzahl muß die Leistung proportional der Drehzahl verändert werden.

Abb. 205.
Motorleistung abhängig von der Höhe.

Tabelle 4.

Fabrik	Bezeichnung	Normale Drehzahl n $\frac{U}{\min}$	Verdrängungsgrad „Überverdichtung" von 1 : 5 ab ε	Zylindermaß	Bodenleistung (γ = 1,225 kg/m³) N_B PS	beim mittleren Druck p_e kg/m²	Leistung mit Höhengas, auf γ = 1,225 kg/m³ umgerechnet N_H PS	beim mittleren Druck p_e kg/m²
1. Luftgekühlte Umlaufmotoren.								
Oberursel	UR IIa	1200	1÷5,0		115	5,75	∼ 140	7,0
„	UR IIIa	1200	1÷5,0		≧ 145	5,9	∼ 170	7,0
Goebel	Goe III	1150	1 : 5,3	vergrößert	160	4,66	∼ 200	5,8
Siemens	Sh III	± 900	1 : 5,0	„	160	4,4	∼ 200	5,5
2. Wassergekühlte Standmotoren.								
Daimler (Mercedes) .	D IIIa	1400	1 : 4,6		160	7,0	—	—
„ „ .	D IIIaü	1400	1 : 5,6		160	7,0	195	8,5
„ „ .	D IVa	1450	1 : 4,8		250	7,4	286	8,5
Bayr. Mot.-Werke .	BMW IIIa	1400	1 : 6,5	„	185	6,25	260	8,8
Benz	Bz IIIaü	1400	1 : 5,2		195	7,0	235	8,6
„	Bz IIIb	1700	1 : 5,2		195	7,5	215	8,3
„	Bz IIIb V	1800	1 : 6,2	„	200	6,2	255	8,0
„	Bz IVü	1400	1 : 5,8		225	7,75	260	8,8
„	Bz Vb	1800			300	5,8	415	8,0
Maybach	Mb IVa	1400	1 : 6	„	245	6,5	320	8,9
„	Mb VII	1500 (?)			600		720	

Zur Berechnung der Gipfelhöhe nach (23) muß man für jeden Motor die Funktion $\nu^2\gamma = \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 \gamma$ kennen; für die wichtigsten Motoren ist diese in Abb. 206 zu finden.

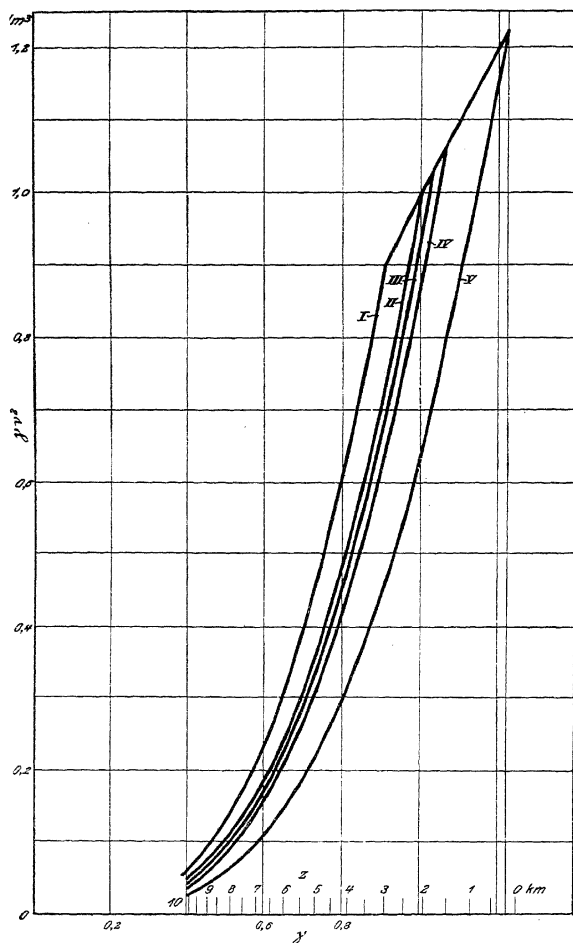
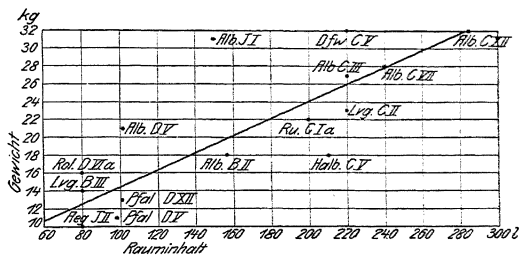
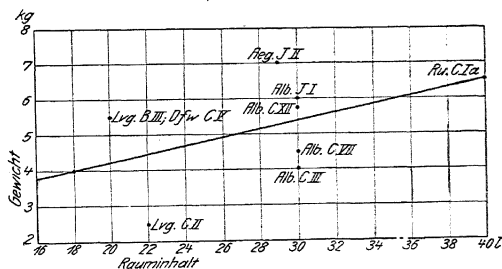



Abb. 206. Zur Berechnung von Gipfelhöhen.
I BMW IIIa. II Sh III. III Mb IVa. IV Bz IV. V D IIIa.

2. Das Gewicht des Flugzeugs setzt sich aus drei Teilen zusammen: a) dem Triebwerk, welches alle vom Motor allein abhängigen Teile umfaßt, b) der Nutzlast, deren Gewicht, von Motor- und Flugzeugkonstruktion unabhängig, durch die

a) Betriebstoffbehälter.

b) Falltanks.

c) Ölbehälter.

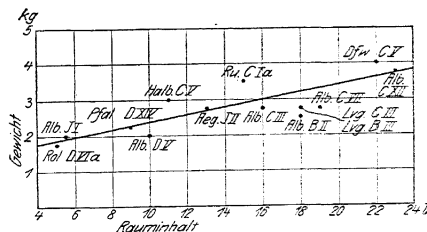



Abb. 207. Behältergewichte.

Verwendung des Flugzeugs bestimmt ist, und c) dem Flugwerk, der eigentlichen Flugzeugkonstruktion, deren Gewicht vom Gewicht des Triebwerks und der Nutzlast, sowie von der geforderten Festigkeit abhängt. Folgende Tabellen geben einen Überblick über die gebräuchlichen Werte.

Tabelle 5. **Triebwerks-**

Bezeichnung des Motors	Motor, nackt	Anlaß-vorrichtung	Auspuff-sammler	Kühler leer	Leitungen und Armaturen
UR IIa	147				17,0
UR IIIa	169				17,0
Sh III	198				17,0
Goe III	176				17,0
D IIIa	270	2,0—5,0	8,0—10,6	23,2—32,0	14,0—30,0
D IIIaü	308	2,0—5,0	5,0—11,0	18,0—32,0	14,0—47,0
D IVa	405	1,5—5,0	8,5—13,5	25,0—46,5	15,5—49,1
BMW IIIa	305		5,0—6,0	25,0—48,0	
Bz IIIaü	284		5,0—7,0	15,0—30,0	
Bz IIIbV	255		5,0—7,0	25,0—48,0	
Bz IIIb	298		5,0—7,0		
Bz IVü	388	3,0—5,0	7,0—14,0	23,0—40,0	15,0—49,5
Bz Vb	430	4,0	14,0	35,0	33,0
Mb IVa	435	3,5	11,0	24,6—28,5	33,0
Mb VII	880	3,8	25,5		

Tabelle 5 läßt erkennen, wie sehr die Gewichte der einzelnen Konstruktionsteile noch schwanken; der Konstrukteur hat also die Möglichkeit, schon beim Zusammenbau des Triebwerks an Gewicht zu sparen. Der Betriebsstoff- und Ölverbrauch der einzelnen Motoren ist auch in Tabelle 5 verzeichnet, und zwar mit einem Mittelwert; am Boden ist der Wert kleiner, in der Höhe größer. Man wird Betriebsstoff und Öl aber sinngemäß nicht zum Triebwerk rechnen, sondern zur Nutzlast, da die mitzuführende Menge ausschließlich vom Aktionsradius, also von der Verwendung des Flugzeugs abhängt.

Tabelle 6. **Gewichte**

Gegenstand		Gegenstand	
1 Insasse mit Ausrüstung	85,0	1 Maschinengewehr 08/15	11,0
Fallschirm	10,0	Elektrische Kraftanlage, Bosch-Dynamo	25,0
Atemgerät für 1 Insassen	10,0	Benzinmotor dazu	32,0
„ „ 2 Insassen	11,1	Akkumulatoren	20,0
Behälter für flüssige Luft	3,5	Scheinwerfer, Bogenlicht von 7000 NK.	15,0
Schlauch und Maske	0,5	Funkspruchеinrichtung	23
Heizeinrichtung	10,0	Photographische Kamera	14—40
Feuerlöscher	1,8	Reihenbildner	47,6
Sanitätstasche	1,1	Breitreihenbildner	64,0
Eiserne Portion	1,3	Pionierpistole	1,2
Beobachtersitz im R-Flugzeug	1,1—4,0	Eisfeld-Pistole	0,6
Feldstuhl	1,15	1 Leuchtkugel	0,20
Teppich	2,1	1 Rauchball	0,5
Bordtasche mit Inhalt	5,0	Leuchtmine mit Fallschirm	0,45
Werkzeugkasten für R-Flugzeuge	10,7	Handscheinwerfer	1,4—6,5
1 Satz Notwerkzeug	5,0		

gewichte in Kilogramm.

Schraubenanlage		Öl im Motor	Kühlwasser		Gesamtes Triebwerksgewicht	Triebwerksgewicht/PS am Boden		Mittlerer Brennstoffverbrauch g/PS.h	Mittlerer Ölverbrauch g/PS.h
Luftschraube	Nabe		im Motor	in Kühler und Leitungen		N_B	N_H		
14,5—18,0					180	1,6	(1,3)	375	66,7
18,0—22,0					200	1,4	(1.2)	310	55,2
20,0—25,0	6,0				240	1,5	(1,2)	237	81,3
28,0—30,0					220	1,4	(1,1)	314	68,6
13,0—17,0	5,0	10,0	12,0	24,4—33,6	400	2,5	(—)	226	25,5
18,0—24,0		6,0—12,0	10,0	10,0—20,0	420	2,6	(2,2)	243	26,9
31,4—48,0		8,5	36,0—45,0		570	2,3	(2,0)	241	20,7
20,0—24,0		3,2	15,0	28,2—35,2	450	2,4	(1,7)	210	23,0
24,0—28,0		2,2	12,0	22,1—34,2	420	2,2	(1,8)	227	10,8
20,0—24,0		1,2	10,0	10,0—17,0	380	1,9	(1,8)	224	21,5
28,0—32,0		2,0	10,4	10,0—17,0	430	2,2	(1,7)	230	25,6
19,0—30,8	9,0	2,4	13,0	12,4—20,0	530	2,4	(2,0)	260	10,0
60,0		5,0	10,0	25,0	620	2,0	(1,4)	260	11,5
19,0—27,0	15,0	8,5	10,0	19,5—32,4	590	2,4	(1,8)	225	12,5
25,1		21,0						245	83,3

Tabelle 7 enthält das uns erreichbare Material über die Gewichte der einzelnen Flugwerkteile. Der Konstrukteur, welcher dieses numerische Material vor Augen hat, kann beurteilen, wie weit er von dem bisher Erreichten entfernt ist, bzw. wie weit er es übertroffen hat; er kann einigermaßen voraussehen, was er von der Konstruktion erwarten kann und kann Hinweise auf Verbesserungsmöglichkeiten entnehmen. Tabelle 8 enthält die Mittelwerte der Gewichtsanteile von Triebwerk, Nutzlast und Flugwerk bei verschiedenen Flugzeuggattungen; sie ist aus einem großen Material von Everling zusammengestellt. Im übrigen ist das Material

der Ausrüstung.

Gegenstand	kg	Gegenstand	
Munition dazu, 750 Patronen	19,0	Bombenzielgerät	10,4
Steuerung, Zielfernrohr usw. dazu	10,5	Höhenschreiber	0,7—1,4
1 L.M.G. 14/17	9,0	Variometer	0,9—1,5
Munition dazu: 4 Trommeln zu 200 Patronen	25,0	Fahrtschreiber	1,6
Gewehrträger und Zielfernrohr	6,5	Kompaß	1,8—3,5
1 Gastgewehr	15,0	Luftschifferkompaß mit Beleuchtung	7,5
Munition dazu: 4 Magazine zu 200 Patronen	37,0	Drehzahlschreiber	2,2
Pivot und Zielfernrohr	7,5	Bordthermometer	0,6
2 M.G. im Einsitzer mit Munition usw.	60,0	Kühlwasserthermometer	1,5
Abwurfvorrichtung f. 1 Stück 50-kg-Bombe	4,0—5,2	Benzindruckmesser	0,5
— f. 3 Stück 50-kg-Bomben	9,0	Flugzeugspiegel	0,4—0,85
— f. 4 Stück 12-kg-Bomben	7,5	Befehlsübermittler, elektrisch	1,25
— f. 6 Stück 12-kg-Bomben	9,5	Fernglas	0,8—1,7
		1 Liter Leichtbenzin	0,73
		1 Liter Öl	0,91

Tabelle 7. **Flugwerk**

Bezeichnung des Flugzeugs	Art des Flugzeugs	Festigkeitsstufe	Gesamtgewicht G	Flügelfläche F m^2	Motorleistung N_0 PS	Flächenbelastung G/F	Leistungsbelastung G/N_0	Rumpf und Zubehör	Fahrgestell
Alb D III ..	Doppeldecker einstielig	V	887	20,9	162	42,4	5,5	85	40
Pfal D III .			907	22,7	162	39,9	5,6	82	43
Rol D VI ..			846	21,8	162	38,7	5,2	69	36
Ssw D III .			696	18,7	136	37,0	5,1	81	49
Pfal D XII[1])			892	21,7	162	41,0	5,5	165.	
Pfal D VII .			715	17,1	136	41,5	5,3	165	
Fok Dr I ..	Dreidecker einstielig		586	18,7	130	31,3	4,5	68	34
Pfal Dr I ...			705	17,2	136	41,0	5,2	173	
Fok D IV ..	Doppeldecker		841	23,0	162	36,6	5,2	85	35
Halb D II .			780	23,6	140	33,1	5,6	85	40
Pfal D VIII			738	17,2	136	43,0	5,4	177	
Halb CL II	Doppeldecker einstielig		1133	27,5	162	41,3	7,0	113	45
Halb CL IV			1026	26,7	162	38,5	6,3	82	35
Han CL III.			1074	32,7	162	33,1	6,6	108	44
Zep CL I ..			974,5	27,1	162	35,8	6,0	116	40
Junk CL I .	Eindecker verspanngslos		1050	23,4	162	44,9	6,5	115	45
Rol C II ...	Doppeldecker einstielig	IV	1230	28,0	162	43,9	7,6	122	40
Junk J I ..	Doppeldecker gepanzert freitragend		2003	50,8	220	39,4	9,1	529	76
Aeg C IV ..	Doppeldecker zweistielig		1353	37,6	162	36,0	8,4	177	54
Alb C III...			1286	34,4	162	37,4	7,9	130	68
Alb C XII			1639	42,7	260	38,4	6,3	124	71
Alb C V ..			1585	43,4	220	36,5	7,2	148	70
Ru C I ...			1333	35,7	162	37,3	8,2	180	54
Ru C IV ..			1643	34,0	260	48,3	6,4	177	54
Lvg C V ..			1505	40,5	220	37,0	6,8	144	52
Lvg C VI .			1342	34,6	220	38,8	6,1	108	63
Aeg J I	Doppeldecker zweistielig gepanzert		1876	37,2	220	50,3	8,5	542	70
Alb J I			1808	42,7	220	40,2	8,2	519	68
Aeg G IV ..	Doppeldecker zweimotorig zweistielig		3415	68,7	520	49,7	6,6	270	130
Ru G III ..	Doppeldecker zweimotorig dreistielig	III	3620	77,5	520	46,8	7,0	410	110
Fdh G III .	Doppeldecker zweimotorig vierstielig		3795	94,3	520	40,3	7,3	314	190
Go G IV . .			3648	84,8	520	42,7	7,0	407	167
Go G V .. .			3895	84,8	520	46,0	7,5	428	161

[1]) Zweistielig.

gewichte in Kilogramm

Flügel	Flügeleinheit kg/m²	Leitwerk	Flugwerk Gewicht	Flugwerk in Teilen von G	Triebwerk Gewicht	Triebwerk in Teilen von G	Nutzlast Gewicht	Nutzlast in Teilen von G	Gesamtgewicht Nutzlast + Triebwerk
113	5,4	15	253	0,285	384	0,433	250		1,40
122	5,3	14	261	0,287	374	0,412	273	0,301	1,40
123	5,6	14	241	0,285	359	0,424	246	0,291	1,40
86	4,6	12	228	0,327	266	0,381	203	0,292	1,48
127	5,8	11	303	0,340	398	0,447	190	0,213	1,50
103	6,0	6	275	0,385	289	0,335	201	0,280	1,46
90	4,8	12	206	0,351	187	0,319	193	0,330	1,54
95	5,5	5	274	0,388	224	0,319	207	0,293	1,63
84	3,7	15	219	0,250	382	0,454	240	0,286	1,35
105	4,4	15	245	0,325	330	0,412	205	0,263	1,46
115	6,7	6	298	0,395	239	0,325	201	0,264	1,68
145	5,3	25	328	0,290	420	0,370	385	0,340	1,41
130	4,9	20	268	0,259	391	0,381	368	0,360	1,36
130	4,0	20	302	0,281	415	0,386	357	0,333	1,39
95	3,5	10	262	0,268	365	0,375	348	0,357	1,36
123	5,2	19	302	0,287	386	0,368	362	0,345	1,41
144	5,1	18	324	0,273	389	0,317	516	0,420	1,36
401	7,9	49	1055	0,528	511	0,254	437	0,218	2,11
156	4,2	16	403	0,298	400	0,295	550	0,407	1,43
146	4,2	16	360	0,279	390	0,304	536	0,417	1,39
196	4,6	32	423	0,259	614	0,375	601	0,366	1,35
189	4,3	23	429	0,270	585	0,369	571	0,361	1,50
167	4,7	18	419	0,314	393	0,295	521	0,391	1,46
178	5,2	21	431	0,263	564	0,343	647	0,394	1,36
192	4,7	16	404	0,258	540	0,361	561	0,371	1,37
163	4,7	15	349	0,261	536	0,399	457	0,340	1,35
200	5,4	20	832	0,444	525	0,280	508	0,276	1,81
198	4,6	26	812	0,449	567	0,314	430	0,237	1,82
400	5,8	42	842	0,246	1157	0,339	1416	0,415	1,33
430	5,5	60	1010	0,279	1276	0,352	1334	0,369	1,39
638	4,0	46	1188	0,313	1200	0,316	1407	0,371	1,45
496	5,8	21	1092	0,300	1143	0,314	1413	0,386	1,43
670	7,9	37	1296	0,332	1197	0,308	1402	0,360	1,50

Tabelle 8. **Gewichtsanteile.**

Flugzeugart	Bezeichnung	Motor	Triebwerk vH	Nutzlast vH	Flugwerk vH
Einsitzer (Ein- u. Doppeldecker)	E u. D	Umlauf	30	39	31
Einsitzer (Doppeldecker) .	D	Stand	42	28	30
Zwei- und Dreisitzer . . .	C u. G	1—2 Stand	32	39	29
Gepanzerte Zweisitzer . .	J	Stand	26	46[1])	28
Riesenflugzeuge	R	3—6 Stand	25	33	42

ein wenig zufällig, lückenhaft und nicht in jeder Einzelheit nachprüfbar, aber hoffentlich doch wertvoll und lehrreich. Die angegebenen Festigkeitsstufen bedeuten, daß das Flugzeug folgende Vielfache seines Fluggewichtes nach Abzug des Flügelgewichtes verträgt.

Tabelle 9. **Festigkeitsgruppen der Flugzeugmeisterei.**

Festigkeitsgruppe	Fluggewichte kg	Lastvielfache				Leitwerkbelastung kg/m²
		Abfangen (Fall A)	Gleitflug (Fall B)	Sturzflug (Fall C)	Rückenflug (Fall D)	
I	> 5000	4,0	2,5	1,2	—	120
II	2500 ÷ 5000 (Nachtflugzeug)	4,8	2,6	1,5	—	120
III	2500 ÷ 4000 (Tagesflugzeug)	5,5	3,2	1,75	2,8	150
IV	1200 ÷ 2500	5,8	3,3	2,0	2,8	180
V	< 1200	6,5	4,0	2,0	3,5	200

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß diese Zahlen die Lastvielfachen angeben, welche das Flugzeug bei der Festigkeitsprüfung ausgehalten hat, daß aber der statischen Berechnung, bei welcher die Plattenwirkung infolge der Bespannung, der Rand- und Zwischenleisten, der Rippen usw. nicht berücksichtigt werden, kleinere Werte zugrunde gelegt werden (s. Band Statik).

Es fällt auf, daß die Zahlen der letzten Rubrik von Tabelle 7, welche man beim Entwerfen wohl zuerst zu Rate ziehen möchte und welche wesentlich von der geforderten Festigkeit bestimmt sein müssen, tatsächlich nur sehr wenig von der Festigkeit abhängen. Das kann nur daher rühren, daß kleinere Festigkeit bei größeren Flugzeugen gefordert wird. Durch die Vergrößerung wird die nötige Festigkeit des statischen Aufbaues erschwert, so daß der Gewinn an Gewicht, welchen die kleinere Festigkeitsforderung erwarten läßt, dadurch zum größten Teil wieder verloren geht.

3. Polardiagramme, welche für den Gleitflug maßgebend sind, bei welchen also der Einfluß der Schraube vollkommen wegfällt, sind bisher durch Versuchsflüge

[1]) Hierbei ist der Panzer zur Nutzlast gerechnet.

nur wenig bestimmt. Für die Beurteilung der in bestimmten Fällen zu erwartenden Flugleistungen mag man Ergebnisse von Modellversuchen zugrunde legen. Abb. 208 enthält einige empirische Polardiagramme; die meisten sind aus den erwähnten Gleitflugmessungen von König mit AEG Flugzeugen und mit Fok D VII berechnet; die Messung am Lvg C V wurde von Blasius und Hopf in Adlershof bei vollkommen stillstehender Luftschraube angestellt. Dazu sind zwei Göttinger Messungen an vollständigen Flugzeugmodellen eingetragen. Man sieht daraus,

Abb. 208.
Polardiagramme nach Gleitflügen und Modellversuchen.

daß die Versuche im Fluge und die Modellversuche recht gut zusammenstimmen, und man kann trotz der Zufälligkeit des Materials sich ein Urteil bilden, wie groß die Streuung und somit die Abhängigkeit der aerodynamischen Eigenschaften vom individuellen Bau des Flugzeugs ist. Leider liegen uns keine Messungen an einem Flugzeug und an dessen genauem Modell vor, so daß nicht entschieden werden kann, ob systematische Abweichungen zwischen Modell- und Flugversuch vorhanden sind, und wie große.

Für praktische Rechnungen wird man sich auf Modellmessungen und die Umrechnungsformeln für den induzierten Widerstand stützen. (I. Teil III § 10 u. IV § 4.)

Tabelle 10 enthält einige Beiwerte des schädlichen Widerstandes c_{ws}, die auf die Flügelfläche bezogen sind.[1])

Tabelle 10. **Schädliche Widerstände.**

Flugzeugart	Klein, verspannungslos (C- und D-Flugzeuge)	in, verspannt (C und D)	Groß, verspannt (G-Flugzeug)	Sehr groß (R-Flugzeug)
c_{ws}	0,018 bis 0,025	0,030 bis 0,035	0,025 bis 0,030	0,020 bis 0,025

4. Der Wirkungsgrad η wird in der Regel zu hoch angenommen, besonders da man diese Rechengröße meist mit den aus Modellversuchen entnommenen Gleitflugwerten kombiniert, also nicht den „Meßnabenwirkungsgrad" (vgl. § 6) meint. Ergebnisse mit der Meßnabe stehen uns nicht zur Verfügung, so daß wir hier nur ein System von numerischen Größen nach dem ersten in § 6 dargelegten Gedankengang geben können.

Das uns zur Verfügung stehende Material zur Bestimmung von η ist gering und durchaus nicht ganz einwandfrei. Damit der Leser sich ein Urteil über die Zuverlässigkeit unserer Abschätzung bilden kann, sei die Herleitung vollständig in den Tabellen 11 und 12 mitgeteilt. Tabelle 11 enthält eine Auswertung der Geschwindigkeitsmessungen von Heidelberg und Hölzel; sie beruht zum Teil auf Angaben, welche in deren Veröffentlichung nicht mitgeteilt sind; da es sich nach der Angabe der Verfasser um Vorversuche handelt, darf die Genauigkeit nicht allzuhoch eingeschätzt werden. Dichte und Geschwindigkeit sind gemessen, daraus c_a nach der Formel $c_a = \frac{2gG}{\gamma F v^2}$ berechnet; zu jedem c_a ist nach Modellversuchen am Flügelprofil und unter Annahme eines bestimmten schädlichen Widerstands c_{ws} (s. Tabelle 10) c_w abgeschätzt; nur für den Fok D VII ist die Gleitflugmessung von König (Abb. 208) zugrunde gelegt. Daraus und aus den nach Tabelle 4 konstruierten Werten von ν folgt

$$F v^3$$

[1]) Anmerkung bei der Korrektur: Hier muß es auffallen, daß die Werte der Tabelle 10 erheblich niedriger abgeschätzt sind, als es die Rechnungen nach Modellversuchen im I. Teil rechtfertigen. Die letzteren stützen sich auf exaktere und neuere Versuche, so daß möglicherweise die größeren Werte von c_{ws} richtiger sind; dies würde nach den folgenden Ausführungen auch höhere Mittelwerte von η zur Folge haben. Jedoch ist es auch möglich, daß die schädlichen Widerstände im Flugzeug wegen der größeren Reynoldsschen Zahlen systematisch kleiner sind als beim Modellversuch, oder — was die neueste Göttinger Veröffentlichung wahrscheinlich macht — daß im Folgenden zwar die schädlichen Widerstände unterschätzt sind, dafür der Profilwiderstand überschätzt ist. Jedenfalls zeigen sich in den folgenden Tabellen da, wo keine Modellversuche benutzt worden sind, keine systematisch höheren η-Werte, als da, wo die Werte der Tab. 10 herangezogen wurden. Wir glauben uns daher berechtigt, einstweilen die Tab. 10 beizubehalten und das in diesem Paragraphen entwickelte System von Zahlenwerten als in sich konsequent und einstweilen brauchbar anzusehen. Auf den provisorischen Charakter ist ja an mehreren Stellen hingewiesen.

In der vorletzten Spalte ist der maximale theoretische Wirkungsgrad verzeichnet, der aus Abb. 192 im 1. Teil folgt. Dabei ist der Wert D des Schraubendurchmessers benutzt, der in der Tabelle zu finden ist.

Tabelle 11.

Auswertung von Geschwindigkeitsmessungen nach η.

Flugzeug und Konstanten	γ $\frac{kg}{m^3}$	v m/s	ν	c_a	c_w	Herkunft von c_w	η	$\eta_{max.}$ theor.	$\frac{\eta}{\eta_{max.}}$
Fok D VII Motor: D III $G = 884$ kg $F = 20{,}9$ m² $N_0 = 160$ PS $D = 2{,}75$ m	0,94	45,0	0,74	0,435	0,0630	Gleitflugversuch (König) s. Abb. 208	0,65	0,92	0,71
	0,89	44,5	0,69	0,471	0,0645		0,65	0,93	0,70
	0,84	43,2	0,64	0,528	0,070		0,66	0,92	0,72
Rol D IIa Motor: Argus $G = 916$ kg $F = 22{,}8$ m² $N_0 = 170$ PS $D = 280$ m	0,925	41,4	0,726	0,495	0,085	Modellversuch $c_{ws} = 0{,}030$	0,70	0,91	0,77
	0,89	39,7	0,692	0,561	0,087		0,64	0,90	0,71
	0,86	37,7	0,661	0,644	0,092		0,58	0,89	0,65
Pfal D IIIa Motor: D III $G = 921$ kg $F = 22{,}1$ m² $N_0 = 160$ PS $D = 2{,}75$ m	0,92	41,4	0,72	0,54	0,080	Modellversuch $c_{ws} = 0{,}030$	0,68	0,91	0,75
	0,87	39,8	0,67	0,57	0,081		0,62	0,91	0,68
	0,83	38,5	0,63	0,69	0,092		0,65	0,89	0,73
	0,74	33,9	0,54	0,81	0,104		0,52	0,89	0,58
Junk C I Motor: D III $G = 1024$ kg $F = 23{,}4$ m $N_0 = 160$ PS $D = 2{,}75$ m	0,89	44,7	0,69	0,49	0,057	Modellversuch $c_{ws} = 0{,}018$	0,65	0,93	0,70
	0,84	44,0	0,64	0,54	0,061		0,68	0,93	0,73
	0,77	43,0	0,57	0,59	0,066		0,70	0,92	0,76
Halb CL IV Motor: D III $G = 1028$ kg $F = 28{,}7$ m² $N_0 = 160$ PS $D = 2{,}75$ m	0,91	41,1	0,71	0,45	0,065	Modellversuch $c_{ws} = 0{,}030$	0,70	0,91	0,77
	0,86	37,3	0,66	0,58	0,070		0,58	0,90	0,64
	0,81	34,1	0,61	0,74	0,083		0,53	0,88	0,60
Fok Dr I Motor: Le Rhône $G = 571$ kg $F = 17{,}5$ m² $N_0 = 105$ PS $D = 2{,}50$ m	0,93	43,3	0,80	0,365	0,060	Modellversuch $c_{ws} = 0{,}022$	0,64	0,93	0,69
	0,88	41,3	0,75	0,42	0,062		0,58	0,92	0,63
	0,79	38,4	0,66	0,55	0,071		0,54	0,91	0,59

Tabelle 12.

Auswertung von Versuchen mit Lvg C V nach η-Werten.

Formeln: $c_a = \frac{G}{q\,F}$; $\eta = \frac{G}{75\,N}\;\frac{c_w}{c_a}\,v$

$F = 40{,}5$ m²; $D = 3{,}00$ m.

v m/s	γ kg/m³	q kg/m²	G kg	N PS	w m/s	c_a	c_w	η	η max. theor.	$\frac{\eta}{\eta \text{ max.}}$
41,1	1,07	92,6	1280	215	0,11	0,342	0,066	0,64	0,89	0,72
40,8	0,78	66,6	1330	156	0,3	0,490	0,070	0,62	0,89	0,70
40,7	1,18	99,6	1275	220	0,48	0,317	0,065	0,68	0,89	0,76
38,1	0,79	58,5	1370	158	0,25	0,578	0,074	0,59	0,87	0,68
33,4	0,80	45,5	1370	160	1,13	0,744	0,089	0,58	0,83	0,70
33,4	1,15	66,0	1240	220	2,84	0,462	0,069	0,58	0,83	0,70
32,5	0,83	44,5	1330	167	1,14	0,739	0,088	0,53	0,82	0,65
32,4	1,03	55,5	1370	212	3,30	0,609	0,076	0,63	0,82	0,77
31,1	1,11	55,4	1240	220	3,20	0,554	0,073	0,55	0,81	0,68
29,5	0,80	36,0	1350	160	0,77	0,925	0,113 (?)	0,49	0,80	0,61
29,3	0,89	39,0	1350	180	1,90	0,854	0,102 (?)	0,54	0,80	0,67
29,2	1,08	47,4	1290	215	3,8	0,68	0,082	0,58	0,79	0,73
28,9	1,07	45,5	1270	215	3,5	0,69	0,083	0,55	0,79	0,70
26,2	1,02	35,4	1240	212	2,9	0,86	0,104 (?)	0,49	0,75	0,65
26,0	0,95	34,5	1240	195	2,0	0,89	0,106 (?)	0,48	0,75	0,64

Tabelle 12 enthält die Auswertung der erwähnten eigenen Versuche am Lvg C V; sie dürften recht zuverlässig sein, haben aber als Einzelfall auch nur beschränkten Wert. Dabei ist c_w nach den oben erwähnten Gleitflugmessungen mit vollkommen stillstehender Luftschraube berechnet; nur die mit (?) angemerkten Werte sind durch Extrapolation dieser Gleitflugkurve gewonnen, also wenig zuverlässig. Es ist möglich, daß dabei c_w unterschätzt wird, also in Wirklichkeit η bei den kleinen Geschwindigkeiten nicht so stark sinkt wie nach der Tabelle. Interessant ist das starke Abfallen von η bei fallender Geschwindigkeit, also der relativ schlechte Wirkungsgrad beim Anstieg. Der theoretische maximale Wirkungsgrad fällt in der gleichen Weise; dennoch ist es nicht geklärt, ob nicht eine Schraube von größerer Steigung, deren maximaler Wirkungsgrad bei einer kleineren Geschwindigkeit liegt, bessere Absolutwerte des Wirkungsgrads erreichen könnte.

Abb. 209. Höchstwirkungsgrad und beobachteter Wirkungsgrad der Luftschraube.

Nur eine Weiterbildung des hier angegebenen dürftigen Versuchsmaterials kann die wichtige Frage nach den numerischen Werten von η klären. Einstweilen können wir nur die Faustregel folgern:

Der Wirkungsgrad η, welcher mit den Gleitflugwerten der Luftkräfte zusammen in die aerodynamische Berechnung eingestellt werden muß, beträgt etwa 70 vH des theoretischen maximalen Wirkungsgrades. Bei nicht untersetzten Schrauben kann man im Durchschnitt für den Horizontalflug auf 64 vH, für den steilsten Anstieg auf 58 vH rechnen; bei den Geschwindigkeiten, welche zum Maximalwert von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ gehören, ist der Wirkungsgrad noch kleiner.

Schließlich seien noch die Mittelwerte mitgeteilt, welche ein reichhaltiges Material von Barogrammen, das nach der am Schluß des § 6 geschilderten Methode ausgewertet wurde, ergeben hat, sowie Werte, die aus beobachteten Gipfelhöhen folgen.

Tabelle 13.

Flugzeugart	$\sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3}}$	η	$\frac{c_a^3}{c_w^2}\eta^2$
Einsitzer-Doppeldecker, verspannungslos .	0,126	0,66	27
Einsitzer-Doppeldecker, verspannt	0,132	0,64	23
Zweisitzer-Doppeldecker, verspannt	0,116	0,59	26
Großflugzeuge	—	—	29
Riesenflugzeuge mit untersetzter Schraube .	—	—	49

Diese Werte sind natürlich unsicher; es kann leicht — was Tabelle 12 nahelegt — bei dieser Art Abschätzung der Schraubenzug, dafür auch der Widerstand überschätzt sein. Indes ist es auch nicht unplausibel, daß bei schneller fliegenden Flugzeugen größere Wirkungsgrade erzielt werden. Das Versuchsflugzeug, mit welchem die Werte von Tabelle 12 erzielt wurden, war ein altes, sicher nicht sehr gutes Exemplar; daher können die gegen die Mittelwerte etwas ungünstigen Ergebnisse rühren. Der hohe Wert der Größe $\frac{c_a^3}{c_w^2}\eta^2$ bei R-Flugzeugen rührt wohl von der Untersetzung der Schraube und vom günstigen Seitenverhältnis her.

Es ist vielleicht nicht überflüssig nochmals darauf hinzuweisen, daß wir obige Zahlwerte für sehr unsicher halten, und sie nur gebracht haben in Ermanglung eines besseren Materials, welches hoffentlich gute Versuche bald liefern werden. Wir hoffen, durch unsere Darlegung Anregungen dazu gegeben zu haben.

§ 8. Erstes Beispiel: Schnelles Flugzeug.

Als erstes Beispiel, welches die praktische Verwendung der dargelegten Forschungsergebnisse zeigen soll, sei ein Flugzeug betrachtet, dessen Aufgabe schneller Transport großer Gewichte auf kurze Entfernungen sei. Diese Aufgabe hatte im Kriege das gepanzerte Infanterieflugzeug, welches keine großen Höhen zu erreichen brauchte, nicht viel Betriebsstoff mit sich führen mußte, von dem aber sehr hohe Horizontalgeschwindigkeit in geringer Höhe gefordert wurde.

Es seien nun folgende Forderungen gestellt: Das Flugzeug soll einen Mann

Besatzung haben, Betriebsstoffe für 1 Stunde in 1 km Höhe mit sich führen, und außerdem an Bewaffnung und Panzer oder an friedlicher Ladung ein Gewicht von 400 kg tragen. Dafür steht ein Motor Mb IVa (Abb. 205) von 255 PS Bodenleistung zur Verfügung. Die geforderte Festigkeitsstufe sei IV in Tabelle 7. Es sei nach den erreichbaren Leistungen, vor allem nach der Horizontalgeschwindigkeit gefragt, sowie nach Gesichtspunkten, welche für den Entwurf oder die Verbesserung eines solchen Flugzeugs nützlich sein können.

Zuerst müssen wir uns natürlich über das Gewicht klar werden; möglichst geringes Gewicht ist ja unter allen Umständen, ganz unabhängig von der besonderen Bestimmung des Flugzeugs, ein Vorteil. Nach unserer Tabelle 5 ist das Triebwerksgewicht mit 590 kg zu veranschlagen. Da in niedriger Höhe geflogen werden soll, muß bei Berechnung des Brennstoffverbrauchs die volle Bodenleistung des Motors eingesetzt werden; das ergibt nach Tabelle 5:

Benzin . . 57,5 kg oder 79 Liter (spez. Gewicht des Leichtbenzins 0,73 kg/l)
Öl . . . . 3,2 „ „ 3,5 „ („ „ „ Öls 0,91 kg/l).

Dazu kommt das Gewicht des Führers 85 kg, Behältergewichte von 10, 3 und 2 kg nach Abb. 207 und die Ladung von 400 kg; weitere 10 kg sollen für Instrumente, Werkzeuge usw. zugeschlagen werden. Wir erhalten so das Gesamtgewicht des Triebwerks und der Nutzlast zu 1160 kg. Über das bei normaler Konstruktion wahrscheinliche Gesamtgewicht des Flugzeugs belehrt uns die letzte Spalte der Tabelle 7; dort finden wir, daß bewährte Zweisitzer von demselben Triebwerk- und Nutzlastgewicht im ganzen das 1,35- bis 1,40fache dieser Größe wiegen können; die schwereren dort verzeichneten Flugzeuge sind älteren Datums. Die ins einzelne gehende Tabelle 7 kann den Konstrukteur darauf hinweisen, welche Teile er noch zu schwer konstruiert hat, wenn das Gesamtgewicht in der Ausführung zu groß wird. Für unsere Überschlagsrechnung werden wir ohne großen Fehler als gesamtes Flugzeuggewicht $1160 \cdot 1{,}36 = 1580$ kg einsetzen können. Damit haben wir die Leistungsbelastung am Boden mit $\frac{1580}{255} = 6{,}2$ kg/PS zu veranschlagen. Zum weiteren Entwurf werden wir die Gleichung für die Horizontalgeschwindigkeit in erster Linie heranziehen, da auf diese der größte Wert gelegt werden soll. Es können Zweifel entstehen, ob Gleichung (24) und (25) zum selben Ergebnis führen; scheint es doch auf den ersten Blick, als ob aus (24)

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\,\frac{G}{F c_a}}$$

folge, daß man tunlichst mit kleinen c_a-Werten fliegen muß, während nach (25)

$$v = 75\,\frac{N\eta}{G}\,\frac{c_a}{c_w}$$

eine kleine Gleitzahl das richtigste scheint. Man könnte meinen, daß sich diese beiden Forderungen widersprechen; doch muß man berücksichtigen, daß zu beiden die Nebenbedingung (23) des Horizontalflugs hinzutritt

Die Gleichungen (24) und (25) widersprechen sich mit dieser Nebenbedingung nicht; der Widerspruch wird nur durch den verschiedenen Ausgangspunkt vorgetäuscht. Bei gegebener Leistungsbelastung fliegt man am schnellsten mit dem Anstellwinkel kleinster Gleitzahl; dann folgt aber die dazugehörige Flächenbelastung aus (23); bei gegebener Flächenbelastung fliegt man am schnellsten mit Anstellwinkeln von möglichst kleinem c_a; wie weit man im Einzelfall c_a herunterdrücken kann, folgt aus (23). Da die Leistungsbelastung in unserem Beispiel gegeben ist, wäre es das Beste, von (25) auszugehen, wenn die Flächenbelastung beliebige Werte annehmen dürfte. Wächst c_a von kleinen Werten bis zu dem Wert, zu welchem das Minimum der Gleitzahl gehört, so wächst $\frac{c_a{}^3}{c_w{}^2}$, und zwar kann man in erster Näherung die Änderung von c_w vernachlässigen. Die Flächenbelastung wächst also mit der dritten Potenz des c_a-Wertes, welcher beim Horizontalflug verwendet werden soll. Setzt man dies in (24) ein, so folgt, daß die Horizontalgeschwindigkeit

$$= \left(\frac{G}{F}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Je größer die Flächenbelastung, um so größer die Horizontalgeschwindigkeit; aber man kann mit der Flächenbelastung nicht beliebig hoch gehen, da die statischen Verhältnisse und die Steuerbarkeit sonst zu ungünstig werden, und da man zum Landen und Starten auch kleine Geschwindigkeiten erreichen muß. Man wird also beim Entwurf unseres Flugzeugs die Flächenbelastung so hoch wählen, als es bei Berücksichtigung aller dieser Punkte möglich ist; zur Durchrechnung wählen wir $\frac{G}{F} = 50$ kg/m², welche Größe bis zum Jahr 1920 kaum von einem bewährten Flugzeug überschritten worden ist. Wir gelangen zu einer Flächengröße von 31,6 m².

Bei diesen Festsetzungen muß man nun die aerodynamischen Größen so beeinflussen, daß beim Horizontalflug in niedriger Höhe c_a möglichst klein wird. Auf alle Fälle muß man η durch geeignete Schraubenwahl möglichst groß machen; Profil und Flügelanordnung müssen dann so ausgewählt werden, daß bei kleinen c_a-Werten $\frac{c_a{}^3}{c_w{}^2}$ einen möglichst großen Wert aufweist, also c_w klein bleibt. Nun zeigt ein Blick auf irgendein Polardiagramm, daß bei $c_a = 0{,}3$ bis $0{,}4$ der induzierte Widerstand, der ja $c_a{}^2$ proportional ist, nur einen recht geringen Einfluß hat. Es ist also für den vorliegenden Zweck gar nicht von ausschlaggebender Bedeutung, Kleinheit des induzierten Widerstandes anzustreben, d. h. das Seitenverhältnis und die Mehrdeckeranordnung besonders günstig zu gestalten; die erreichbare Geschwindigkeit wird kaum dadurch beeinflußt, ob das Flugzeug als Eindecker oder Mehrdecker gebaut ist, und ob seine Spannweite (bei der gegebenen Gesamtfläche) mehr oder weniger groß ist. Da geringe Spannweite Erhöhung der Wendigkeit und unter Umständen Verringerung des Gewichts bedeuten kann, ist sie vielleicht sogar vorzuziehen.

Von großem Einfluß auf die Geschwindigkeit sind hingegen der Profil- und der schädliche Widerstand. Um diese möglichst klein zu halten, wähle man ein Profil

mit kleinen Luftkraftbeiwerten; man findet solche z. B. unter den Göttinger Messungen nach dem Verzeichnis von Munk und Hückel. Von den Profilen mit kleinem Profilwiderstand bei kleinem c_a scheiden aber sehr viele aus konstruktiven Gründen aus, da eine gewisse Flügeldicke aus Festigkeitsgründen notwendig ist. Strebenförmige Ausgestaltung der Vorderkante wirkt in dieser Hinsicht bei dicken Profilen recht entscheidend; auch eine kleine Aufbiegung der Hinterkante kann nützlich sein. Der folgenden Berechnung ist das Profil 344 der Göttinger Versuchsanstalt zugrunde gelegt (Abb. 210). Ferner soll angenommen werden, daß das Flugzeug als Doppeldecker von zwei gleichen Flügeln vom Seitenverhältnis 1 : 6, also mit einer Spannweite von 9,7 m gebaut sei.

Der schädliche Widerstand wird am besten durch verspannungslose Bauart klein gehalten; eine solche kann in diesem Fall, wo die Spannweite keine ent-

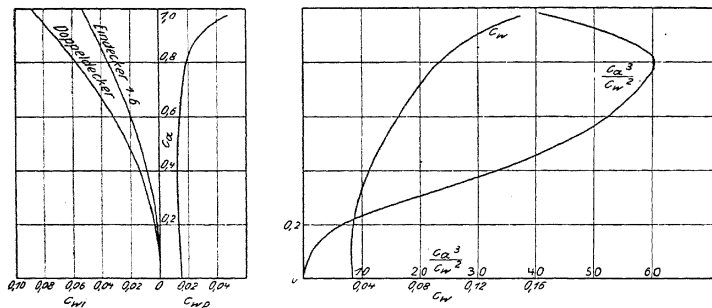



Abb. 210. Beispiel: Schnelles Flugzeug.

scheidende Bedeutung hat, auf keine Schwierigkeiten stoßen und wohl auch nicht eine wesentliche Gewichtssteigerung zur Folge haben. Der Beiwert des schädlichen Widerstandes sei zu 0,018 veranschlagt. In Abb. 210 sind (in einer zuerst von Junkers angewandten Weise) induzierter und Profilwiderstand der Flügelanordnung gesondert aufgetragen; dabei ist für den induzierten Widerstand des Eindeckers 1 : 6, dessen Polardiagramm der Modellmessung entnommen ist, nach dem I. Teil III § 10

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi}\frac{F}{b^2} \text{ (} F \text{ und } b \text{ auf das Modell bezogen)}$$

gesetzt, für den Doppeldecker die von Munk angegebene empirische Formel

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{1{,}21\,\pi} \cdot \frac{F}{b^2}.$$

Ferner ist das Polardiagramm des gesamten Flugzeugs und die daraus berechnete Funktion $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ in der Abbildung eingezeichnet.

Um für η einen brauchbaren Mittelwert einzusetzen, nehmen wir an, daß die Schraube etwa 3 m Durchmesser hat, also

$$\frac{\gamma}{\gamma_0}\frac{N}{F_S} \text{ ungefähr} = 40 \text{ PS/m}^2$$

wird; da man auf eine Geschwindigkeit von etwa 60 m/s rechnen muß, folgt nach Abb. 192 ein theoretischer Wirkungsgrad von 95 vH. Nach den in § 7 auseinandergesetzten Erfahrungen können wir $\eta = 0{,}67$ in unsere Rechnungen einsetzen. Wir sind nun imstande, die Horizontalgeschwindigkeit in jeder Höhe zu berechnen: In jeder Höhe ist die normale Luftdichte und nach Abb. 205 ν gegeben. Nach (23) ist dort mit unseren Zahlenwerten:

$$\frac{c_a{}^3}{c_w{}^2} = \frac{14{,}9}{\gamma\nu^2}.$$

Aus dieser Größe folgt c_a nach Abb. 210, und daraus schließlich

$$31{,}3$$

Tabelle 14.

Geschwindigkeit im Horizontalflug.

Höhe z	γ	ν	$\frac{c_a{}^3}{c_w{}^2}$	c_a	v	
m	kg/m³				m/s	km/h
0	1,25	1,0	11,9	0,25	56	202
1000	1,13	1,0	13,2	0,26	58	209
2000	1,01	1,0	14,7	0,27	60	216
3000	0,91	0,96	17,8	0,29	61	220
4000	0,82	0,84	25,8	0,35	58	209
5000	0,73	0,73	38,3	0,44	55	198
6000	0,65	0,64	56,0	0,66	48	173

Die Horizontalgeschwindigkeit hängt also in den niedrigen Luftschichten sehr wenig von der Höhe ab; sie erreicht ein sehr flaches Maximum bei etwa 3000 m. Solange die Motorleistung nicht nachläßt, also $\nu = 1{,}0$ gesetzt werden kann, wird nach (23), wenn wieder die Änderung von c_w vernachlässigt wird,

somit

$$v \sim (\gamma\ c_a)$$

also nimmt die Geschwindigkeit langsam zu, wenn die Luftdichte sinkt. Wäre die Motorleistung proportional der Luftdichte, also

$$\nu \sim \gamma,$$

so würde $c_a \sim \gamma^{-1}$ und v unabhängig von der Höhe. Da in höheren Schichten die Motorleistung stärker nachläßt, muß die Geschwindigkeit abnehmen.

Ferner ist bemerkenswert, daß v in geringen Höhen auch vom Flugzeuggewicht unabhängig wird; der Nachteil des größeren c_a-Wertes bei wachsendem Gewicht wird in dieser Hinsicht durch das Wachsen der Flächenbelastung genau aufgewogen. Nach (23) wird $c_a \sim G$ und nach (24) v konstant. Wenn man nur die Geschwindigkeitsleistung im Auge hat, braucht man also auf Gewichtsersparnis gar keinen allzugroßen Wert zu legen; man kann mit erhöhter Nutzlast gerade so schnell fliegen, wie mit normaler. Der Einfluß des Gewichtes wird erst ganz wesentlich, wenn es auch auf die Steigleistung ankommt.

Die Gipfelhöhe läßt sich nach (23) berechnen, wenn für $\frac{c_a}{c_w}$ folgende Maximum 60,5 eingesetzt wird. Dann ist

$$\gamma \nu^2 = 0{,}246 \text{ und nach Abb. 206 } z_g = 6200 \text{ m}.$$

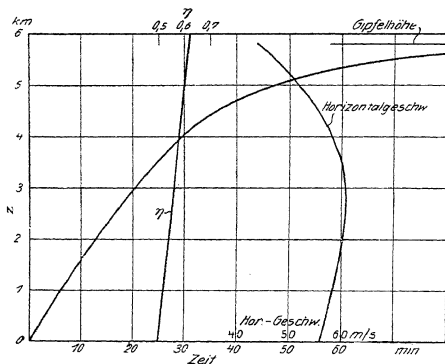



Abb. 211. Beispiel: Schnelles Flugzeug.

In der Gipfelhöhe wird $c_a = 0{,}80$, $\gamma = 0{,}64$ kg/m³ und daher $v = 44$ m/s. Bei dieser Rechnung ist nun nicht darauf Rücksicht genommen, daß η bei dieser kleinen Geschwindigkeit nicht mehr seinen vollen Wert haben kann; denn in Rücksicht auf die Bestimmung unseres Flugzeugs wird man die Luftschraube so auswählen, daß sie bei der normalen Drehzahl 1400 U/min und bei der Geschwindigkeit von 60 m/s, also bei einem Fortschrittsgrad $\lambda = 0{,}3$ den besten Wirkungsgrad aufweist. In der Gipfelhöhe ist die Geschwindigkeit geringer, dafür aber auch die Drehzahl des Motors kleiner, somit der Fortschrittsgrad nicht ebensoviel vermindert wie die Geschwindigkeit des Flugzeugs; immerhin mag λ auf 0,24 gesunken sein. Die Kurven der Abb. 189 zeigen, daß in diesem Fall auch bei flachem Maximum von η in Abhängigkeit von v mit einer Verminderung von η um 5 vH gerechnet werden muß. Die Gipfelhöhe wird daher zum Werte

$$\gamma \nu^2 = 0{,}286$$

gehören und nur 5800 m betragen.

Bei Berechnung der Steigleistung muß man den Schraubenwirkungsgrad noch geringer einsetzen; denn bei bester Ausnutzung der Flügel zum Steigen wird in allen Höhen der Wert von c_a, zu welchem das Maximum von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ gehört, beibehalten; daher ist der Staudruck in allen Höhen derselbe, die Geschwindigkeit in niedrigen Höhen kleiner; am Boden ist die Fluggeschwindigkeit im Steigen

---

Somit sinkt λ auf 0,15. Bei solchen Fortschrittsgraden, welche nur die Hälfte des Wertes betragen, welcher zum Maximum von η gehört, ist η um etwa 20 vH gesunken. Daher steigt man immer in niedrigen Höhen, und in unserem Fall wohl auch bis in die Nähe der Gipfelhöhe, besser mit kleinerem c_a, also mit größerer Fluggeschwindigkeit. Bei Berechnung der Steigzeiten kann man darüber verschiedene Annahmen machen; wir wollen den Maximalwert von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ zugrunde legen, aber dazu kein konstantes η verwenden, sondern η am Boden mit 0,50 veranschlagen und es bis zur Gipfelhöhe auf 0,62 wachsen lassen.

Die Steiggeschwindigkeit folgt aus (21) mit unseren Zahlenwerten zu

$$w = 12{,}1\,\eta\,\nu - 4{,}03 \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Tabelle 15.

Höhenstufe	Mittleres γ	ν	η	$12{,}1\,\eta\,\nu$	$\frac{4{,}03}{\sqrt{\gamma}}$	w	Steigzeit für die Höhenstufe	Gesamte Steigzeit
km	kg/m³	—	—	m/s	m/s	m/s	min	min
0÷1	1,18	1,00	0,51	6,2	3,7	2,5	6,7	6,7
1÷2	1,07	1,00	0,53	6,4	3,9	2,5	6,7	13,4
2÷3	0,96	0,98	0,55	6,5	4,1	2,4	7,0	20,4
3÷4	0,86	0,90	0,57	6,2	4,3	1,9	8,8	29,2
4÷5	0,77	0,78	0,59	5,6	4,6	1,0	16,7	46
5÷5,5	0,71	0,71	0,61	5,2	4,8	0,4	21	67

Dieser Anstieg ist nicht der günstigste; jeder Anstieg, besonders bei einem nicht für gutes Steigen gebautem Flugzeug, ist ein Kompromiß zwischen Luftschraube und Flugzeug. Den richtigen Kompromiß zu schließen, ist die Kunst des erfahrenen Fliegers; diese Feinheiten durch verschiedene Wahl von c_a und η rechnerisch zu verfolgen, hat nicht viel Interesse.

Will man die Steigleistung eines solchen schnellen Flugzeugs verbessern, so kann das durch allerhand Maßnahmen geschehen, die aber meist ein Opfer an Geschwindigkeit zur Folge haben; am wenigsten eingreifend ist wohl Verminderung des induzierten Widerstandes oder Auswahl eines anderen Profils mit etwas größeren Widerstandswerten, welches dafür größere $\frac{c_a^3}{c_w^2}$-Werte aufweist; durchgreifender wirken Auswahl einer anderen Luftschraube, deren Maximum bei kleineren Fortschrittsgraden liegt (kleinere Steigung), und Vergrößerung der Flügelfläche.

§ 9. Zweites Beispiel: Gut steigendes Flugzeug.

Das Gegenbeispiel zu dem betrachteten bietet ein Flugzeug, dessen Aufgabe hauptsächlich im raschen Erreichen großer Höhen und Zurücklegen großer Strecken besteht. Im Kriege hatte das Fernaufklärungsflugzeug diesen Charakter, im Frieden werden ähnliche Gesichtspunkte maßgebend sein, wenn es sich um Forschungsreisen, Überfliegen von Gebirgen und unwirtlichen Gegenden u. dgl. handelt.

An Nutzlast sei mitzunehmen: 2 Insassen mit 170 kg, eine photographische Einrichtung mit 50 kg, Bewaffnung oder sonstige Ladung mit 80 kg, 2 Fallschirme mit 20 kg, Atmungsgerät mit 11 kg, ferner Instrumente u. dgl. mit 19 kg, so daß die gesamte Nutzlast ohne Betriebsstoffe 350 kg betrage.

Ein Motor Mb IVa, wie im ersten Beispiel, stehe zur Verfügung; das Triebwerksgewicht ohne Behälter muß also mit 590 kg veranschlagt werden.

An Betriebsstoffen sei soviel mitzuführen, daß das Flugzeug eine Stunde ansteigen und drei Stunden in der Höhe 6500 m fliegen kann. Aus Tabelle 5 folgt der Brennstoffverbrauch: 225 $\frac{g}{\mathrm{PS} \cdot h}$; als mittlere Motorleistung für den Anstieg sei die in 5000 m Höhe, also nach Abb. 205 187 PS, für den Flug in 6500 m 151 PS eingesetzt. Daraus folgt das Gewicht des mitzuführenden Brennstoffes zu 144 kg oder 197 Liter.

Der Ölverbrauch ist nach Tabelle 7 mit 8,00 kg oder 7,3 Liter zu veranschlagen. Das ergibt nach Abb. 207 Behältergewichte von 24 kg und 2 kg.

Somit gelangen wir zu einem Gewicht der Nutzlast und des Triebwerks von 1118 kg. Das Gesamtgewicht schätzen wir wieder ab als das 1,36fache dieser Größe, also zu 1520 kg; die Leistungsbelastung wird 6,0 kg/PS; wir gelangen somit in dieser Hinsicht zu Verhältnissen, die denen des vorigen Beispiels ganz ähnlich sind.

Im übrigen wird aber die Ausgestaltung dieses Flugzeugs sehr weitgehend von der des vorher behandelten abweichen. Da die Steigleistung als wichtiger angesehen werden sollte, als die Erreichung hoher Geschwindigkeit, muß die Flächenbelastung möglichst klein gehalten werden. Das Profil muß große Auftriebsbeiwerte aufweisen, damit hohe Werte von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ erreicht werden können. Hohe Wölbung und spitzes Hinterende scheinen für diesen Fall im allgemeinen günstig. Da vor allem der Flug mit größeren c_a-Werten wichtig ist, spielt der induzierte Widerstand die ausschlaggebende Rolle, Profil- und schädlicher Widerstand treten zurück. Es müßte also günstig sein, ein solches Flugzeug als Eindecker von großer Spannweite zu bauen, selbst wenn das nicht ohne Verspannungen möglich sein sollte. Doch werden dagegen in den meisten Fällen konstruktive Gründe sprechen; denn die kleine Flächenbelastung wird zu sehr großer Spannweite führen und dadurch wird das Gewicht sich vielleicht nicht so niedrig halten lassen, als oben angenommen wurde. Dies ist indes Sache des Konstrukteurs, der im Einzelfall verschiedene Möglichkeiten gegeneinander abwägen muß. Wir wollen hier zuerst allgemein den Einfluß der einzelnen Konstruktionsgrößen auf die Leistungen des Flugzeugs diskutieren.

Wir gehen von der kleinen Flächenbelastung $\frac{G}{F} = 30$ kg/m² aus, nehmen einen Doppeldecker von zwei gleichen Flügeln mit einem gewöhnlichen Profil und dem Seitenverhältnis 1 : 7 des einzelnen Flügels an und setzen den Beiwert 0,03 für den schädlichen Widerstand c_{ws} des verspannten Flugzeugs ein (Abb. 212 IA). Wir haben also eine Flügelfläche von 50,6 m² und eine Spannweite von 13,3 m. Die Schraube sei so gewählt, daß das Flugzeug in den großen Höhen am leistungsfähigsten ist; das Maximum des Wirkungsgrades soll daher bei der Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{g}{\gamma}\,\frac{G}{F c_a}} = \sqrt{\frac{\cdots}{0{,}6\cdot 1{,}0}} = 32 \text{ m/s}$$

liegen; für $\frac{\gamma}{\gamma_0}\,\frac{N}{F_S}$ sei wieder der Wert 40 PS/m² eingesetzt, also ein Schraubendurchmesser von etwa 3 m zugelassen. Dabei findet man in Abb. 192 einen theoreti-

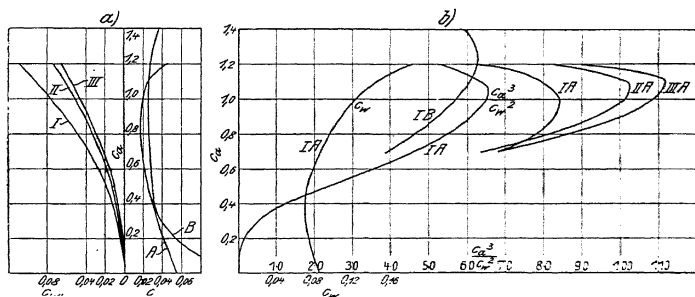



Abb. 212. Beispiel: Gut steigendes Flugzeug.

I Doppeldecker $\frac{F}{b^2} = \frac{1}{3{,}5}$

II Doppeldecker $\frac{F}{b^2} = \frac{1}{5}$

III Eindecker . $\frac{F}{b^2}$

A Gewöhnliches Profil

B Profil mit hohem $c_{a\,max}$-Wert.

schen Höchstwirkungsgrad von nur 80 vH; dürfen also nach unserer Faustregel η nur mit 0,56 in die Rechnung einstellen. Mit diesen Werten ergibt sich für die Gipfelhöhe

$$\gamma\,\nu^2 = 0{,}182 \text{ und nach Abb. 206 } z_g = 6900 \text{ m};$$

die Anstiegkurve ist in Abb. 213 als Kurve I eingezeichnet. Sie wird in Wirklichkeit durch den Brennstoffverbrauch beim Anstieg etwas verbessert. In einer Stunde sind nach unseren Voraussetzungen ungefähr 40 kg Brennstoff verbraucht; daher das Gewicht auf 1480 kg gesunken. Damit sinkt $\gamma\,\nu^2$ auf 0,170 und die Gipfelhöhe wird 7050 m. Durch den weiteren Brennstoffverbrauch erhöht sich die Gipfelhöhe während des weiteren Fluges ständig.

Wir überlegen nun verschiedene Möglichkeiten, um bessere Ergebnisse zu erhalten. Zunächst veranschaulichen wir den Einfluß der einzelnen Konstruktions-

größen, indem wir in Abb. 213 neben die Kurve I folgende Kurven ein-

II: Anstieg bei einer Gewichtsersparnis von 10 vH,
einer Leistungserhöhung um 10 vH,
einer Flächenvergrößerung ı

tungserhöhung ist eine Erhöhung des
ıivalent einer Flächenvergrößerung
Beiwertes $\frac{c_a^3}{c_w^2}$. Gewichtsersparnis ist die
, dann gs- oder Wirkungsgraderhöhung, erst an

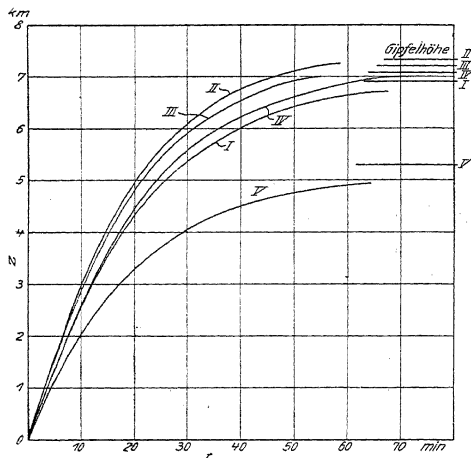



Abb. 213. Beispiel: Gut steigendes Flugzeug.

Stelle kommt der Einfluß der Flächengröße und aerodynamischer Maßnahmen. Daß es so sein muß, sieht man am besten, wenn man die Änderung der Gipfelhöhe infolge einer Konstruktionsänderung betrachtet. Aus Gleichung (23) ergibt sich durch logarithmisches Differenzieren:

$$= 3 \frac{u\,\upsilon}{\gamma} - 2 \; l N_0 \quad \frac{dF}{F} - 2\, \frac{d\eta}{\eta} - \frac{d\,\frac{c_a^3}{c_w^2}}{} \quad \ldots\ldots (38)$$

Aus dieser Gleichung kann man den Einfluß einer kleinen Änderung unmittelbar ablesen. Man kann auch von der Änderung der Größe $\gamma\, \nu^2$ unmittelbar zur Änderung der Gipfelhöhe selbst übergehen, wenn man sich für einen bestimmten Motor

innerhalb eines bestimmten Gebietes eine empirische Beziehung sucht. In unserem Falle ist näherungsweise zu setzen:

$$\frac{d(\gamma v^2)}{\gamma v^2} = 3{,}3 \frac{d\gamma}{\gamma}.$$

Da ferner nach den Ausführungen des § 5

$$dz = -\frac{dp}{\gamma} \text{ und in der normalen Atmosphäre } \frac{dp}{p} = 1{,}17 \frac{d\gamma}{\gamma},$$

wird $dz = -1{,}17 \frac{p}{\gamma} \frac{d\gamma}{\gamma} = -1{,}17 \cdot \quad \frac{d\gamma}{\quad}$, und mit den besonderen Zahlwerten der Höhe um 7000 m

$$1{,}17 \cdot 29{,}3 \cdot 248 \quad d\,($$

So erhält Gleichung (38) für unser Beispiel die übersichtliche Form:

$$dz = 2600 \quad -3\frac{dG}{G} \qquad \quad_0 \qquad \frac{dF}{} \qquad \frac{c_a^3}{c_w^2} \quad m \quad . \tag{38'}$$

Die Beeinflussung der Gipfelhöhe allein gibt aber noch kein volles Bild des Einflusses einer Maßnahme auf die Steigzeiten; während die Gipfelhöhen I, IV, III und II in Abb. 213 in gleichem Abstand einander folgen, ist die Verbesserung der Steigzeit zwischen den Kurven IV und III bedeutender als zwischen den anderen Kurven. Alle Maßnahmen, welche den ersten Summanden in Gleichung (21) vergrößern, sind in dieser Hinsicht wirksamer wie diejenigen, welche den zweiten Summanden verringern. Wenn man also eine bestimmte Gipfelhöhenverbesserung einmal durch Vergrößerung von $\frac{N}{G}$ und ein andermal durch Vergrößerung von $F\frac{c_a^3}{c_w^2}$ erzielt, so verbessert man im ersten Fall die Steigzeiten nachhaltiger. Alle Veränderungen der Kurven II, III und IV gegenüber I sind aber geringfügig gegenüber der in Kurve V veranschaulichten, welche äußerlich am Flugzeug überhaupt nicht in Erscheinung tritt. Dabei ist nämlich alles angenommen wie bei I, nur der Motor ist normal gebaut, nicht überverdichtend und nicht überbemessen, also etwa durch einen D IVa-Motor ersetzt. Man sieht, wie fast allein entscheidend für die Steigleistung die Bauart des Motors wirkt.

Diese Betrachtungen geben aber nur ein theoretisches Schema und dringen noch nicht in das besondere technische Problem ein; einesteils ist dabei nicht darauf Rücksicht genommen, daß man in der Regel nicht eine Konstruktionsgröße verändern kann, ohne auch die anderen mit zu verändern, anderenteils ist eine Veränderung der verschiedenen Größen um denselben Prozentsatz durchaus nicht gleich leicht zu erzielen. Dadurch können sich die in Abb. 213 dargestellten Möglichkeiten erheblich verschieben.

In unserem Beispiel muß man als besonders ungünstig den geringen Wert von η ansehen und zunächst an eine Verbesserung dieses Wertes denken; die Erniedrigung des theoretischen Wirkungsgrades um 30 vH ist schließlich nur

eine Faustregel, die man anzweifeln kann; doch geben die im vorigen Abschnitt besprochenen Versuche nicht das Recht, η höher abzuschätzen. Man könnte in erster Linie daran denken, daß man vielleicht besser mit einem kleineren c_a-Wert fliege, als dem, welcher zum Maximum von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ gehört; man besitzt dann größere Fluggeschwindigkeit und kann somit höhere η-Werte erzielen. Berechnet man aber für verschiedene c_a-Werte die Geschwindigkeit nach (24) und daraus nach Abb. 192 und unserer Faustregel η, so steigt der Wert $\frac{c_a^3}{c_w^2}\eta^2$, der für die Gipfelhöhe maßgebend ist, zwischen $c_a = 0{,}8$ und $c_a = 1{,}05$ nur von 19,5 auf 20,5. H. v. Sanden hat eine ähnliche Rechnung durchgeführt und gezeigt, daß man bei einer gegebenen, für größere Geschwindigkeiten gebauten Luftschraube unter gewissen Voraussetzungen zuviel an Wirkungsgrad und Motorleistung opfert, wenn man mit dem Maximalwert von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ fliegt; er findet das Optimum etwa beim Maximum von $\frac{c_a^{2,5}}{c_w^2}$. Dies trifft in unserem Falle nicht zu, da wir über die Schraube so verfügen wollen, daß sie ihren besten Wirkungsgrad nicht bei höheren Geschwindigkeiten, sondern bei der Geschwindigkeit in der Nähe der Gipfelhöhe hat. Bei anderer Schraubenwahl wird die Gipfelhöhe noch kleiner.

Anstatt durch Auswahl eines kleineren c_a-Wertes kann man die Geschwindigkeit auch durch Erhöhung der Flächenbelastung vermehren; verkleinert man die Fläche von 50,7 auf 43,7 m², also um 14 vH, ohne aber das Gesamtgewicht zu erniedrigen, so wächst die Flächenbelastung von 30 auf 35 kg/m², somit die Geschwindigkeit in der Nähe der Gipfelhöhe von 32,0 auf 34,5 m/s; η' steigt dabei um 3 vH; also kann man auch mit dieser Maßnahme nach (38) nur Nachteile in bezug auf die Gipfelhöhe erreichen.

Die einzige wirksame Methode, um η zu erhöhen, besteht in der Verminderung von $\frac{N}{F_S}$, also im Einbau eines Getriebes. Wenn dieses die Drehzahl der Schraube von 1400 auf 900 U/min erniedrigt, so muß — bei gleichbleibendem μ — der Durchmesser auf etwa 3,9 m wachsen. Damit wird $\frac{N}{F_S}$ auf 24 PS/m² heruntergedrückt und η' kann infolgedessen um 6 vH wachsen; mindestens ebenso hoch können wir die Zunahme von η annehmen, da die in § 6 besprochene Störung der Luftströmung im Flugzeug durch die größere Schraube eher vermindert als vermehrt wird. Man könnte also auf eine Verminderung von $\gamma\,\nu^2$ um 12 vH rechnen, wenn das Gewicht des Getriebes und der Energieverlust im Getriebe zu vernachlässigen wären. Setzt man für das Gewicht 20 kg, also etwa 1,3 vH des Flugzeuggewichtes ein und nimmt den Energieverlust mit 2 vH an, so vermindert das Getriebe $\gamma\,\nu^2$ nur um 4 vH; die Gipfelhöhe erhöht sich gegenüber I auf 7000 m. Der starke Abfall der Motorleistung mit der Höhe hat zur Folge, daß die Gipfelhöhe nicht sehr empfindlich gegen Verbesserung von η ist. In den Steigzeiten kommt die Verbesserung mehr zum Ausdruck, wie Kurve III in Abb. 213 zeigt.

Eine Gewichtsverminderung um 10 vH, wie sie in Abb. 213 angenommen wurde, dürfte praktisch kaum zu erzielen sein, wenn nicht die Nutzlast entsprechend

verringert wird. Unter den oben angenommenen Wert 1,36 dürfte man das Verhältnis $\frac{\text{Gesamtgewicht}}{\text{Triebwerk} + \text{Nutzlast}}$ kaum herunterdrücken können; erreicht man diesen Wert nicht einigermaßen, so werden die Steigleistungen stark vermindert. Auch eine Flächenvergrößerung gegen Kurve I kommt praktisch wohl nicht in Frage: schon bei $\frac{G}{F} = 30$ kg/m² ist die Geschwindigkeit sehr gering; noch mehr Geschwindigkeit wird man kaum zugunsten der Steigleistung opfern wollen. Für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit in der Nähe der Gipfelhöhe von der Flächenbelastung gilt nicht dieselbe Beziehung wie im ersten Beispiel, wo es sich um die Geschwindigkeit in niedriger Höhe handelte; jetzt müssen wir c_a ungefähr konstant setzen, erhalten also

$$v \sim$$

Die Abhängigkeit ist also empfindlicher wie im ersten Fall.

In weiteren Grenzen ist eine Beeinflussung der aerodynamischen Konstanten möglich, wie Abb. 212 erkennen läßt. Es gibt drei Wege zur Beeinflussung der aerodynamischen Konstanten:

1. Änderung des induzierten Widerstands: In Abb. 212a sind die induzierten Widerstände für einen Doppeldecker (II) von der Spannweite 15,9 m, für welchen $\frac{F}{b^2} = \frac{1}{5}$, und für einen Eindecker (III) von der Spannweite 18,8 m $\left(\frac{F}{b^2} = \frac{1}{7}\right)$ aufgetragen (s. I. Teil IV § 4), in Abb. 212b die entsprechenden Werte von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$. Der Eindecker ist gegen den Doppeldecker von derselben Spannweite immer etwas im Nachteil; bei der größeren hier angenommenen Spannweite wird er besser. Bei der Anordnung II ist das Verhältnis $\frac{\text{Flügelabstand}}{\text{Spannweite}}$ größer angenommen wie bei I; doch spielt das für das Ergebnis nur eine untergeordnete Rolle. Baut man ein Flugzeug mit größerer Spannweite, so ist stets ein erheblicher Vorteil für die Steigleistung damit verbunden; die Abänderung von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ um 10 vH, wie sie in Abb. 213 angenommen wurde, ist ohne unübersteigliche Schwierigkeiten vielfach zu überbieten; bei Anordnung III ist $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ gegenüber Anordnung I um 70 vH gestiegen. Eine solche Anordnung gibt also eine Verbesserung der Steigleistung, selbst wenn das Gewicht des Flugzeugs um 20 vH dabei steigt. Durch Vergrößerung des induzierten Widerstandes kann man also ein Flugzeug ebenso stark schädigen wie durch Gewichtsvergrößerung. Auch die Doppeldeckeranordnung II hat gegen I solche aerodynamischen Vorteile, daß ein Mehrgewicht von 18 vH, also 275 kg, dadurch aufgewogen wird. Dies klingt erstaunlich und ist einstweilen durch Versuche nicht bestätigt; trotzdem kann man es wohl als richtig gelten lassen. Doch ist dabei Voraussetzung, daß die Schraube wirklich für die langsame, den hohen c_a-Werten entsprechende Geschwindigkeit gebaut ist. In Wirklichkeit sind die Schrauben alle für höhere Geschwindigkeiten gebaut, da das Flugzeug stets einen Kompromiß zwischen Geschwindigkeits- und Steigleistungen

zu schließen hat, und dann verliert die Schraube bei den kleinen Fortschrittsgraden soviel an Wirkungsgrad, daß man mit kleineren c_a-Werten fliegen muß, bei welchen der Unterschied der Werte von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ nicht mehr ganz so bedeutend, wenn auch immer noch groß genug ist. In diesem Fall besteht die oben erwähnte Überlegung v. Sandens zu Recht; bei den Versuchen der Tabelle 12 z. B. wird die Steiggeschwindigkeit oberhalb $c_a = 0{,}7$ bedeutend kleiner, was höchst wahrscheinlich dem Nachlassen des Schraubenwirkungsgrades zuzuschreiben ist.

2. Änderung des Profils: Die Kurve B in Abb. 212a gibt das Polardiagramm eines Profils, welches man wegen seiner hohen Auftriebsbeiwerte für besonders geeignet zum Steigen halten möchte. Die dazugehörige Kurve von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ zeigt aber, daß dies eine irrige Ansicht ist; das Profil bietet keinen Vorteil für das Steigen. Auch ein Profil, welches bei großen c_a-Werten kleinere c_w zeigt, bringt keinen wesentlichen Vorteil, da der Profilwiderstand zu wenig gegenüber dem induzierten ausmacht. In diesem Punkte steht unser Beispiel 2 im strikten Gegensatz zu Beispiel 1, wo es wenig auf den induzierten Widerstand und sehr viel auf die richtige Profilauswahl ankam.

3. Verminderung des schädlichen Widerstandes bringt Vorteil für die Steigleistungen, wenn auch nicht einen so bedeutenden als Verminderung des induzierten Widerstandes. In der Kurve IA der Abb. 212b, deren Maximum bei $\frac{c_a^3}{c_w^2} = 84$ liegt, ist angenommen, daß das Profil A in der Anordnung I verwendet sei, aber der Beiwert des schädlichen Widerstandes von 0,030 auf 0,015 herabgemindert sei; dieser Wert dürfte das Minimum des Erreichbaren, auch bei voller Verspannungslosigkeit und vollständiger Verkleidung aller Teile darstellen. Der Größtwert von $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ wird dabei um 27 vH erhöht; der Vorteil ist also immer noch groß genug, um eine Gewichtserhöhung von 9 vH auszugleichen.

Dieser Überblick über die im Einzelfall auftretenden Fragen mag genügen. Unsere beiden Beispiele sind einseitig gewählt; beim wirklichen Flugzeug werden immer Gesichtspunkte aus beiden Gedankenreihen zu berücksichtigen sein.

Der formale Rechnungsgang kann natürlich auch anders als in unseren Beispielen geführt werden; es sei vor allem auf die besonders von König ausgebildete Methode, mit Hilfe von Diagrammen wie Abb. 195 zu rechnen, ferner auf die logarithmischen Polardiagramme von Eiffel hingewiesen.

II. Kapitel.

Momentengleichgewicht im geraden Flug.

§ 1. Ausgleich der Längsmomente und statische Stabilität.

Für unsere bisherigen Betrachtungen war das Flugzeug, mechanisch gesprochen, nur ein materieller Punkt; wir verfolgten nur seine translatorische Bewegung. Volles Gleichgewicht im symmetrischen Fall ist aber nur dann vorhanden, wenn auch das Moment verschwindet, welches das Flugzeug zu drehen sucht. Wir hatten

oben (S. 254) drei Unbekannte in den Bewegungsgleichungen und wiesen schon darauf hin, daß die eine davon, der Anstellwinkel, durch den Ausgleich der Drehmomente in der Symmetrieebene bestimmt wird. Das Gewicht des Flugzeugs greift im Schwerpunkt an, die Schraubenkraft geht im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt; sie schneidet jedoch die Schwerkraftrichtung (Abb. 214) in einem Punkte, der in der Regel nicht weit vom Schwerpunkt entfernt liegt. Aber die resultierende Luftkraft geht nicht ohne weiteres durch diesen Schwerpunkt hindurch. Wir sahen im I. Teil, wie verschieden bei verschiedenem Anstellwinkel die resultierende Flügelkraft am Flügel und somit im Flugzeug gelegen ist. Um also ein Flugzeug bei verschiedenen Anstellwinkeln im ungestörten Gleichgewicht zu halten, muß man die

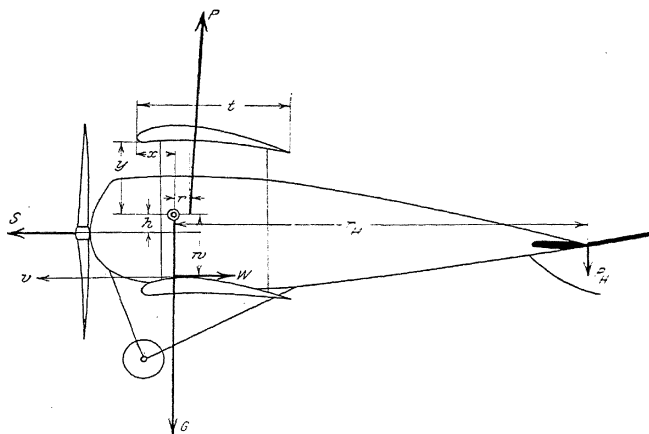



Abb. 214. Lage der Kräfte im Flugzeug.

Möglichkeit haben, ohne großen Eingriff in das Gleichgewicht der Kräfte große Drehmomente auf das Flugzeug wirken zu lassen; dies ist nur möglich, wenn im Flugzeug eine kleine Kraft willkürlich veränderlich ist, welche an einem großen Hebelarm wirkt. Dies ist das Wesen der Leitwerkskraft, welche als Kraft im Haushalt des ganzen Flugzeugs fast keine Rolle spielt, durch den großen Hebelarm der Rumpflänge aber imstande ist, die von den großen Flügelkräften am kleinen Hebelarm herrührenden Momente auszugleichen.

Zur mathematischen Fassung ist es am bequemsten, als Bezugspunkt der Momente den Schwerpunkt zu wählen. Um diesen übt das Gewicht kein Moment aus, und auch das Moment des Schraubenschubs ist in der Regel gering. Mit den Bezeichnungen der Abb. 214 lautet die Gleichung, wenn in W alle schädlichen Widerstände zusammengefaßt sind, und deren Resultierende am Hebelarm w um den Schwerpunkt wirkt:

$$M = M_F + M_H - S h + W w = 0$$

oder (1)

$$P \cdot r + P_H \, r_H - S h + W w = 0$$

Bis auf S sind alle in dieser Gleichung auftretenden Kräfte proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit; bleibt h klein, so spielt dies Glied keine Rolle und die Geschwindigkeit hebt sich aus der Gleichung weg. So kommt es, daß in erster Näherung der Anstellwinkel, von welchen P, r, P_H, in geringer Weise auch r_H, W und w abhängen, als einzige Unbekannte auftritt. Diese Unbekannte kann alle möglichen Werte dadurch erhalten, daß das Leitwerkmoment $P_H r_H$ durch den Ausschlag des Steuers weitgehend variiert werden kann. Die Größe r_H freilich wird nur in mäßigen Grenzen veränderlich sein, so daß sie in den meisten praktischen Fällen als Konstante betrachtet werden kann; P_H jedoch ist vom Ruderausschlag sehr empfindlich abhängig; die Abhängigkeit folgt aus den Gesetzen des ebenen oder gewölbten Tragflügels, wenn das Leitwerk nur aus einer beweglichen Fläche besteht, aus den im I. Teil VI § 3 besprochenen Modellmessungen, wenn das bewegliche „Ruder“ mit einer festen „Flosse“ verbunden ist.

Der Ausgleich der Momente in der Symmetrieebene hat für die Flugeigenschaften, für die Beherrschung des Flugzeugs durch seinen Führer die größte Bedeutung; im engsten Zusammenhang damit steht nämlich die sog. statische Stabilität. Stabilität ist Eigenschaft eines Gleichgewichtszustandes; nicht jeder Gleichgewichtszustand ist stabil; ein auf dem Finger balancierter Stock oder ein auf die Spitze gestelltes Ei sind im Gleichgewicht, aber nicht im stabilen Gleichgewicht; sich selbst überlassen geben sie die Gleichgewichtslage zugunsten einer beschleunigten Bewegung auf, welche erst in einer anderen, einer stabilen Gleichgewichtslage endet. Rechnet man das Gleichgewicht eines mechanischen Systems aus, so kann man verschiedene Gleichgewichtszustände erhalten, aber noch nicht ohne weiteres sagen, ob diese Zustände auch stabil sind. Um dies zu entscheiden, schließt man allgemein so: Man denkt sich das System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage herausgerückt, also z. B. den balancierten Stock nicht vertikal, sondern unter einem kleinen Winkel gegen die Schwerkraftrichtung geneigt. Dann ist kein Gleichgewicht mehr vorhanden; die Kräfte und Momente, welche sich vorher das Gleichgewicht hielten, haben jetzt eine nicht verschwindende Resultierende von bestimmter Richtung bzw. ein Moment von bestimmtem Drehsinn. Sucht nun diese Resultierende oder dies Moment das System in den alten Gleichgewichtszustand zurückzubringen, so ist dieser Zustand durch eine kleine Störung nicht aus der Welt zu schaffen; man kann ihn als stabil bezeichnen. Wirkt aber die Resultierende so, daß die Störung des Gleichgewichtszustandes weiter vergrößert wird, daß also das System sich immer weiter aus dem ursprünglichen Zustand entfernt, so ist dieser instabil. Diese Schlußweise wendet man auch auf den Gleichgewichtszustand eines fliegenden Flugzeugs an; ein Zustand stationärer Bewegung kann ebensogut auf Stabilität untersucht werden, wie ein Ruhezustand.

Ein Flugzeug, welches in gleichförmigem Fluge mit ausgeglichenem Moment begriffen ist, werde durch irgendeine Störung aus seiner Lage zur Flugbahn herausgedreht, so daß sein Anstellwinkel geändert wird. Dann ist der Ausgleich der

Momente aufgehoben, ein bestimmtes Drehmoment kommt zur Wirkung. Sucht nun dieses Moment das Flugzeug in seine ursprüngliche Lage zurückzudrücken, so ist die zufällige äußere Einwirkung nicht imstande, das Flugzeug dauernd von seiner gleichmäßigen Bahn abzudrängen; die Bewegung des Flugzeugs ist eine stabile. Tritt der umgekehrte Fall ein und sucht das entstehende Moment das Flugzeug noch mehr aus seiner ursprünglichen Lage zu entfernen, so kann das Flugzeug von selbst nicht in seine alte gleichförmige Bewegung zurückkehren, die Bewegung ist instabil. Für stabiles Verhalten ist also erforderlich, daß z. B. bei einer zufälligen Vergrößerung des Anstellwinkels ein Moment entsteht, welches das Flugzeug mit der Spitze nach unten zu drücken sucht, ein kopflastig wirkendes Moment (Kippmoment).

Von vornherein muß beachtet werden, daß Stabilität oder Instabilität Eigenschaften eines Gleichgewichtszustandes sind. Daher kann die Stabilität nur im Zusammenhang mit dem Momentenausgleich behandelt werden.

Mathematisch ist das Problem in folgender Weise zu formulieren: Bei einem bestimmten Anstellwinkel α erfährt das Flugzeug ein Drehmoment M, das von den Abmessungen des Flugzeugs und von der Stellung des Ruders abhängt. Kopflastige Momente seien positiv gerechnet. Dann ist der Ruderausschlag ϑ bestimmt durch das Momentengleichgewicht $M = 0$ [Gleichung (1)]; er folgt bei bestimmtem Anstellwinkel aus der Größe von P_H. Stabilität ist vorhanden, wenn mit wachsendem Anstellwinkel das Kopflastmoment wächst, also wenn

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} > 0 \tag{2}$$

ist. Hier ist der partielle Differentialquotient maßgebend, nicht der totale, so daß bei der Differentiation ϑ als von α unabhängig angesehen wird. In den Ausdruck für $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ ist der aus (1) errechnete Wert von ϑ einzusetzen. Die physikalische Vorstellung ist dabei, daß das Ruder beim gleichförmigen Flug auf Ausgleich der Momente eingestellt wird, aber unverändert bleibt bei einer zufälligen Störung des Gleichgewichts. Numerisch hängt $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ wenig von ϑ ab; für das grundsätzliche Verständnis ist es indes wichtig, diesen exakten Gedankengang vor Augen zu haben; manche mißverständliche Folgerung kann dann vermieden werden.

Das Moment der Luftkraft auf die Flügel wird in zweierlei Weise angegeben. Immer muß man es auf einen willkürlichen Punkt beziehen, und als solcher wird stets die vordere Spitze des Flügelprofils, also die vordere Kante des Flügels bzw. die Vorderkante des Oberflügels oder eine ideale mittlere Vorderkante beim Mehrdecker gewählt. Numerisch angegeben wird entweder ein Beiwert c_m, definiert durch den Ansatz:

$$\text{Moment um die Vorderkante } M_0 = c_{m0}\, q\, F\, t \quad \ldots\ldots \tag{3}$$

oder die Entfernung der Kraftresultierenden von der Vorderkante.

Bei der letzteren Darstellung werden in anschaulichster Weise alle Wirkungen der Luft auf den Flügel graphisch zusammengefaßt. Man knüpft darum gern allgemeine Auseinandersetzungen daran an. Die Druckpunktverschiebung geht

(s. I. Teil, Einleitung) mit ... ellwinkel bei allen gewölbten Flächen im praktischen Bereich von hinten ... vorn, bei ebenen Flächen umgekehrt. Diese Verschiebung hängt offenbar m... r Momentenänderung und daher mit der statischen Stabilität eng zusamm... nken wir uns (Abb. 215) einen einzelnen ... oder im T... das einfachste fliegende ... Sch... bestimmten ... bb. ... P die Größe

Die statische Stabilität

$$(4)$$

Für das Vorzeichen dieser Größe entscheidet, da l verschwindet, das Vorzeichen von $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$; und zwar ist, getreu der obigen Festsetzung des Momentenvorzeichens, l positiv zu nehmen, wenn die Kraft hinter dem Schwerpunkt angreift. Aus diesem Gedankengang folgt, daß **der Flügel stabil oder instabil ist, je nachdem die Luftkraftresultierende mit wachsendem Anstellwinkel nach hinten oder nach vorne rückt.** Dieser Satz gilt allgemein für jedes fliegende System, nicht nur für einen einzelnen Flügel; er ist auch verschiedentlich, besonders von Eiffel und Hunsaker, auf Flügelkombinationen und auf ganze Flugzeuge angewandt worden. Aber er gilt nur für einen Gleichgewichtszustand; denn nur für einen solchen hat der Begriff der Stabilität einen Sinn; die Nichtbeachtung dieses Grundsatzes hat zu falschen Schlüssen geführt, auf die hingewiesen werden muß:

Abb. 215.
Kraftresultierende am einzelnen Flügel.

Die gewonnene Stabilitätsaussage gilt für einen bestimmten Zustand, bei welchem die Schwerpunktlage gegeben und der Anstellwinkel danach gewählt ist; aber bei der Vergleichung verschiedener Flugzustände kommt man leicht zu Trugschlüssen. Wegen der Druckpunktverschiebung ist bei der Schwerpunktlage der Abb. 215 die gewölbte Fläche instabil; eine ebene Fläche, welche bei derselben Schwerpunktlage im Gleichgewicht ist, zeigt die entgegengesetzte Druckpunktverschiebung, ist daher stabil. Je kleiner der Anstellwinkel ist, um so größer wird bei der gewölbten Fläche der absolute Betrag von $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, und da ceteris paribus P

dasselbe bleibt, muß man schließen, daß die Instabilität wächst, wenn der Anstellwinkel kleiner wird. Dies bedeutet aber nur, daß die Stabilität eines unter kleinem Anstellwinkel stehenden Flügels mit einer Schwerpunktlage, welche durch die Lage der Resultierenden bei diesem Winkel gegeben ist, also etwa mit dem Druckpunkt zusammenfällt, kleiner ist als die Stabilität desselben Flügels bei einem größeren Anstellwinkel mit der dazugehörigen Schwerpunktlage. Der oft gezogene Schluß, daß ein Flügel im Sturzflug instabiler sie als im horizontalen Flug, ist vollkommen falsch. Es hat überhaupt keinen Sinn, ein fliegendes System in verschiedenen Momentenzuständen zu vergleichen, wenn nicht angegeben ist, in welcher Weise diese verschiedenen Zustände erreicht werden, in welcher Weise die Momente in jedem Fall ausgeglichen werden sollen. Spricht man von der Stabilität eines Flügels an sich, so kann das zweierlei Bedeutungen haben: erstens kann man meinen, daß der Flügel ein vollständiges fliegendes System ist, zweitens, daß der Flügel einen Teil eines fliegenden Systems bildet, wie im Flugzeug, und einen gewissen Beitrag zur Stabilität des Ganzen liefert. Im ersten Fall muß man angeben, wie verschiedene Flugzustände zustande kommen sollen, und da gibt es nur eine Möglichkeit, sich das vorzustellen, nämlich willkürliche Verschiebung des Schwerpunktes. Ein Gleitflieger, in welchem der Insasse sein Körpergewicht so verschieben kann, daß er unter verschiedenen Gleitwinkeln fliegt, stellt ein derartiges durch Schwerpunktverschiebung gesteuertes System vor. Für dieses hat der obige Gedanke Gültigkeit; die Druckpunktverschiebung $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$ ist ein direktes Maß der Stabilität; der Sturzflug ist instabiler wie der flache Gleitflug. Im zweiten Fall, der natürlich für den normalen Flugzeugbau der richtige ist, hat wohl die Gleichung (4) für den Stabilitätsanteil des Flügels ihre Gültigkeit, jedoch ist nicht mehr $l = 0$, also die Momentenänderung durchaus nicht proportional der Druckpunktverschiebung; der obige Schluß ist ein Trugschluß und führt numerisch und somit praktisch zu falschen Folgerungen.

Wie einzelne Flügel, so sind auch Doppeldeckerzellen und ganze Flugzeugmodelle durchgemessen und auf Stabilität geprüft worden. Für diese Messungen und die daraus gezogenen Folgerungen gilt unverändert das über den einfachen Flügel Gesagte. Bei einer Doppeldeckerzelle ist das Kraftstrahlenbündel sehr empfindlich abhängig von der Art, wie die beiden Flächen zusammengestellt sind; dies verdeutlichen die Abb. 216a, b, c, die Messungen von Betz entnommen sind. Die Staffelung (b) hat einen geringen Einfluß; wohl verschieben sich die Resultierenden in bezug auf die einzelnen Flächen gegenüber der ungestaffelten Anordnung(a), aber nur wenig in bezug auf eine ideale mittlere Fläche, welche den natürlichen Vergleichsmaßstab abgibt. Eine Änderung kann sich überhaupt nur als Folge der gegenseitigen Beeinflussung einstellen.

Ganz anders wird das Bild, wenn zur Staffelung eine Schränkung tritt. Ist der Oberflügel vorwärtsgestaffelt und um einige Grad „vorangestellt" (geschränkt) wie in Abb. 216c, so trägt er mehr als der Unterflügel; dieser Effekt hat nichts mit der gegenseitigen Beeinflussung zu tun und wirkt daher um so stärker, je kleiner absolut genommen, die einzelnen Kräfte sind, also stärker bei kleinen Anstellwinkeln. Der Erfolg ist ein Zusammenziehen des Kraftstrahlenbündels,

eine bedeutende Verringerung der D ... gibt nun zwischen den beiden Flügeln Schwerpunktlagen, ...tverschiebung mit ...hsendem Anstellwinkel von vorn n... besteht die Möglichkeit automatisch stabiler Glei... ände. Dagegen ... nicht die Schlußfolgerung ziehen, daß die ges... e Anordnung allgemein stabiler sei als die ungeschränkte; man vergleicht ... Anordnungen mit zwei verschiedenen Schwerpunktlagen. Für den ... solchen Zelle in einem bestimmten ... folgt aus den graphischen Darstellungen noch nichts; denn ein Flugzeug hat eine bestimmte Schwerpunktslage. Einen Sinn, der unter Umständen nach unten auseinander zu setzenden Gesichtspunkten, Bedeutung haben kann, hat die Folgerung in der Gestalt: Wenn man ein Flugzeug so bauen will, daß der Stabilitätsanteil der Flügel positiv oder wenigstens nur klein negativ ist, und dabei in

Abb. 216. Kraftresultierende bei Doppeldeckern.

a) Ohne Staffelung und Schränkung. b) Mit Staffelung ohne Schränkung. c) Mit Staffelung und Schränkung.

einem bestimmten Flugzustand die Flügel für sich im Gleichgewicht sein sollen, also das Leitwerk vollkommen entlastet sein soll, so kann man das mit einem zwischen den Flügeln liegenden Schwerpunkt bei einer gestaffelten und geschränkten Anordnung wie Abb. 216c erreichen, bei einer ungeschränkten Anordnung nur mit einem unter dem Unterflügel liegenden Schwerpunkt. Aber man darf nicht etwa ganz allgemein schließen, daß die gestaffelte und geschränkte Anordnung „stabiler“ sei als die anderen Anordnungen. Die starke Empfehlung der Anordnung Abb. 216c durch Betz und Hunsaker beruht auf einem Trugschluß. Die Nachteile einer solchen Anordnung, die in der starken Überbelastung des Oberflügels gegenüber dem Unterflügel und der Verschlechterung des Polardiagramms liegen, wiegen im allgemeinen den auf das richtige Maß zurückgeführten Stabilitätsvorteil auf.

Bei den Messungen ganzer Flugzeugmodelle muß man auch darauf Rücksicht nehmen, daß nur Gleichgewichtszustände Stabilität oder Instabilität zeigen können. Die Messungen im Luftstrom werden meist mit feststehendem Ruder angestellt, sind daher nicht ohne weiteres für die Beurteilung der Stabilität heran-

zuziehen. Abb. 217, welche Eiffel entnommen ist, mit einem ganz außerhalb des Kraftstrahlenbündels liegenden Schwerpunkt, ist von diesem Standpunkt aus vollkommen sinnlos. Man müßte bei der Modellmessung ständig die Stellung des Ruders verändern und für jede Ruderstellung ein Kraftstrahlenbündel zeichnen, um graphisch die Stabilitätsverhältnisse zu durchschauen. Wie sich diese Kraftstrahlenbilder mit dem Ruderausschlag ändern, zeigen die Abb. 218 a, b, c, welche für einen idealisierten einfachen Fall (Eindecker mit Ruder ohne Flosse) ausgerechnet sind. An ihnen ist besonders lehrreich, wie sich der Hebelarm l bei kleinen Anstellwinkeln stärker mit dem Anstellwinkel verändert, als bei großen Anstellwinkeln, und zwar in einem Stabilität zeigenden Sinn; aus der Eiffelschen Figur allein ist man versucht, den gegenteiligen Schluß zu ziehen.

Abb. 217. Kraftresultierende bei einem Flugzeugmodell.

Um ein Maß der Stabilität zu gewinnen, lag es am nächsten, die bei Schiffen

metazentrischen Höhe heranzuziehen.
um den Anstellwinkel $d\alpha$ unterschiedener
heißt Metazentrum, die Hüllkurve, welche
zentrische Kurve, den Vertikalabstand
alle Abb. 219 ist
des
ersichtlich, daß

$$h = \frac{d\,l}{d\,\beta} = \frac{\partial l}{\partial \alpha} \cdot d\alpha \tag{5}$$

$\frac{d\,\beta}{d\,\alpha}$ ist aber, wie h selbst, durch die Form der metazentrischen Kurve bestimmt, so daß diese Kurve ein Maß für die in Gleichung (4) bedeutungsvolle Größe $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$

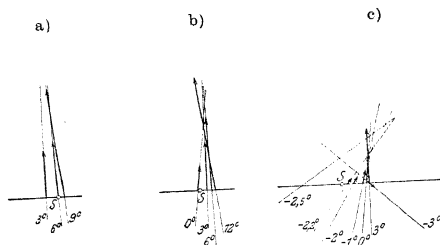



Abb. 218. Berechnete Kraftresultierende bei Berücksichtigung des Ruderausschlags.

	a)	b)	c)
Gleichgewicht bei $\alpha =$	6°	1°	— 2,5°
Ruderausschlag $\vartheta =$	— 6°	— 3°	— 1°.

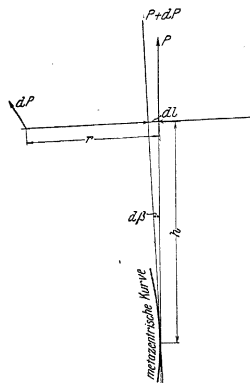



Abb. 219. Metazentrische Höhe und Stabilitätsarm.

abgeben kann. Aber praktisch ist dieses Maß nicht; denn $\frac{d\,\beta}{d\,\alpha}$ ist nicht einfach zu bestimmen, da bei Flugzeugen die Auftriebskraft keine feste Lage im Raum hat. Bei Schiffen und Luftschiffen ist dies der Fall und $\frac{d\,\beta}{d\,\alpha} = 1$. Auch gilt von der metazentrischen Kurve dasselbe wie von der graphischen Darstellung mit Kraftstrahlen; man darf $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$ und somit die metazentrische Kurve als Stabilitätsmaß nur für ein vollständiges fliegendes System gebrauchen, nicht für einen Teil eines fliegenden Systems.

Ein besser brauchbares Maß ist der von Knoller eingeführte **Stabilitätsarm** r. Seine Definition folgt aus Gleichung (4), wenn man schreibt

$$\partial M \quad \overline{\partial \alpha}$$

also

$$r = l \quad \frac{P}{\frac{\partial P}{\partial \alpha}} \cdot \frac{\partial l}{\partial \alpha}. \tag{6}$$

Man kann sich den Luftkraftvektor $P + dP$ beim Anstellwinkel $\alpha - d\alpha$ aus dem Luftkraftvektor P beim Anstellwinkel α und dem Vektor des Luftkraftzuwachses dP entstanden denken (Abb. 219); der Stabilitätsarm ist dann der Hebelarm, an welchem der Luftkraftzuwachs angreift.

Aus unseren Darlegungen ist wohl klar geworden, was die graphische Darstellung vermag und was nicht. Für die Verfolgung der Stabilitätsverhältnisse durch alle Flugzustände hindurch erweist sie sich als sehr umständlich und auch numerisch als nicht fein genug. Für die wirkliche Berechnung eines Flugzeugs ist sie entschieden der rein rechnerischen Methode unterlegen. Sie ist wohl auch in der Praxis, und jedenfalls in den Modellversuchsanstalten, von dieser verdrängt.

§ 2. Flügelmoment.

Will man den Anteil der Flügel am Gesamtmoment und an der Stabilität eines Flugzeugs berechnen, so muß man zunächst das in den Modellmessungen auf die Vorderkante bezogene Moment auf den Flugzeugschwerpunkt umrechnen. Man zerlegt zu diesem Zweck die resultierende Luftkraft in die Pfeilkraft mit Beiwert c_n und die Sehnenkraft mit Beiwert c_t. Dann folgt mit den Bezeichnungen der Abb. 214 das Moment der Flügel um den Schwerpunkt

(7)

Da c_n im praktischen Bereich sehr groß gegenüber c_t ist, folgt eine sehr starke Abhängigkeit von der Rücklage x, während die Abhängigkeit von der Tieflage y sich in engeren Grenzen hält. Die Abb. 220 und 221 veranschaulichen diese Abhängigkeit. Dort ist die Größe $c_m = \frac{M}{F q t}$ als Funktion des Anstellwinkels aufgetragen; als positiv sind dabei Momente angesehen, welche das Flugzeug nach vorn zu kippen trachten. Also bedeutet es Kopflastigkeit, wenn die Momentenkurve oberhalb, Schwanzlastigkeit, wenn sie unterhalb zur Abszissenachse verläuft. Als Beispiel ist ein in der Praxis verwendeter Doppeldecker angenommen. Als Grenzen der Rücklage für die anderen Kurven sind Vorderkante und Flügelmitte, als Grenzen der Tieflage Unter- und Oberflügel eines Doppeldeckers angenommen.

An beiden Abbildungen fällt zunächst auf, daß sich alle Kurven in einem Punkte schneiden; die Bedeutung dieser Schnittpunkte ist leicht einzusehen. Die Rücklage bzw. Tieflage des Schwerpunktes sind dann ohne Einfluß auf das Moment, wenn die resultierende Luftkraft parallel bzw. senkrecht der Flügelsehne verläuft. Der erstere Fall fällt sehr nahe zusammen mit dem Fall verschwindenden Auftriebs, also er gehört zum steilsten Sturzflug; der letztere Punkt entspricht einem Anstellwinkel des normalen Flugs. Die Tieflage übt, wie man sieht, gewöhnlich einen sehr geringen Einfluß aus; nur im Sturzflug kann sie von Bedeutung werden.

Der Stabilitätsanteil eines Flügels im Flugzeug hängt sehr empfindlich von der Schwerpunktlage ab, und zwar fast ausschließlich von der **Rücklage**. Liegt der Schwerpunkt im vordersten Teil des Flügels, so steigt das Moment mit wachsendem Anstellwinkel steil an, der Stabilitätsbeitrag ist positiv und groß; liegt es in der Mitte des Flügels oder noch weiter hinten, so wirkt der Flügel stark instabilisierend. In den mittleren Lagen, die bei dem jetzt herrschenden Flugzeugtyp die einzig praktisch verwendbaren sind, haben die Momente im Durchschnitt sehr kleine Werte im Vergleich zu den Werten bei anderen Schwerpunktlagen. Dies

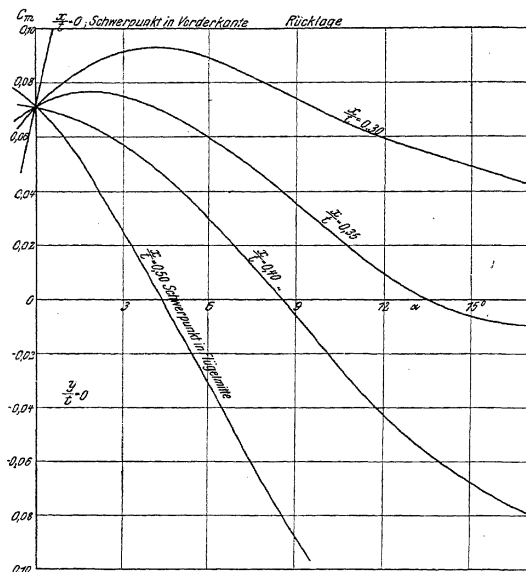



Abb. 220. Flügelmoment bei verschiedener Rücklage des Schwerpunktes.

veranschaulicht unsere Abb. 222, in welcher im gleichen Maßstab das Moment um den so gelegenen Schwerpunkt und das Moment um die Vorderkante eingezeichnet sind. Der praktische Wert einer derartigen Schwerpunktlage liegt darin, daß nur kleine Leitwerkkräfte nötig sind, und zwar kleine Kräfte auf die feste Flosse, da der Absolutwert der Momente mäßig ist, und kleine Kräfte auf das Ruder, da der Unterschied der Momente in verschiedenen Flugzuständen nur gering ist. Der Stabilitätsbeitrag hält sich in mäßigen Grenzen und ist etwas negativ. Bei einer solchen Schwerpunktlage zeigen die Flügel für sich bei schnellem Flug, kleinem Anstellwinkel Kopflastigkeit, bei langsamem Flug, großem Anstellwinkel Schwanzlastigkeit, aber beides in recht geringem Maße.

Der Einfluß der Tieflage auf die Momente und auf die Stabilität ist weit geringer. Dies ist physikalisch selbstverständlich, wenn man in Betracht zieht, daß die Luftkräfte fast ausschließlich senkrecht zum Flügel wirken. Das primitive Gefühl ist durch die Erfahrung an Ballonen in dieser Hinsicht etwas mißleitet; man findet vielfach die Vorstellung, daß die Tieflage ausschlaggebend für die Stabilität sein müsse, weil dies bei allen Maschinen mit statischem Auftrieb, also bei Luftschiffen und Schiffen der Fall ist. Hier handelt es sich aber um Kräfte ganz anderen Charakters, die der primitiven Erfahrung nicht so schnell sich erschließen. Auch

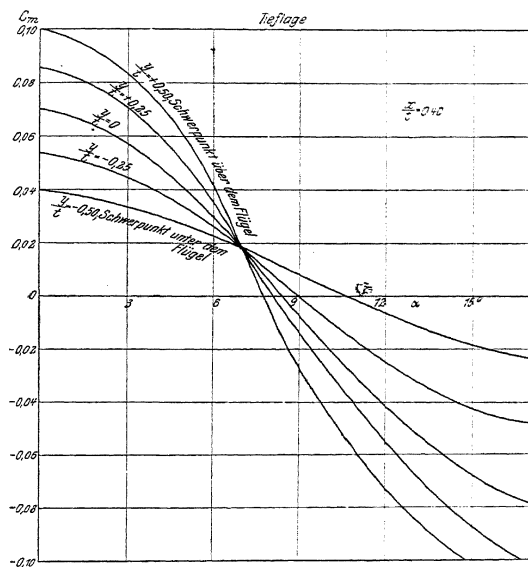



Abb. 221. Flügelmoment bei verschiedener Tieflage des Schwerpunkts.

der erfahrene Ingenieur kann sich nicht leicht über dies falsche Gefühl hinwegsetzen.

Der Einfluß der Profilform ist höchstens von der Größenordnung des Tieflageneinflusses; auch er tritt gegenüber dem Rücklageneinfluß kaum hervor. Die von v. Mises durchgeführte hydrodynamische Theorie (I. Kap. II § 10) liefert für den Zusammenhang zwischen c_a und c_{mo} für alle Profile eine Gerade von der Neigung 4 : 1; dabei ist der Wert von c_{mo} bei $c_a = 0$ um so größer, je größer die Wölbung des Profils ist. Diese Folgerungen der Theorie stehen in guter Übereinstimmung mit den Göttinger Modellmessungen. Der Zusammenhang zwischen c_m und α läßt sich also auf den im I. Teil ausführlich behandelten Zu-

sammenhang zwischen c_a und α zurückführen. Hier ist für uns wichtig, daß die Stabilität von der Wahl des Flügelprofils sehr wenig abhängig ist, daß also Rücksichten auf die Stabilität für die Auswahl des Profils nicht maßgebend sein können. Auch S-förmige Ausgestaltung des Profils beeinflußt die Stabilität nicht, sondern setzt nur den Absolutwert der Momente etwas herab. Das Moment bei verschwindendem Auftrieb kann nur für die statische Beanspruchung des Flügels im Sturzflug von großer Wichtigkeit sein.

Um Irrtümern vorzubeugen, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die in den Abb. 220—222 auftretende Größe nicht das Moment selbst, sondern die Momentenzahl ist. Das Moment selbst hängt in anderer Weise vom Anstellwinkel ab, da ja Geschwindigkeit und Staudruck bei verschiedenen Anstellwinkeln verschieden sind. Bei kleinem Anstellwinkel ist im statonären Geradeausflug der Staudruck wesentlich größer als bei großem; daher fallen die Momente mit wachsendem Anstellwinkel viel stärker als die Momentenzahlen. Das Moment selbst ist

Abb. 222.

$$M = c_m\, q\, F t = \frac{c_m\, G t}{c_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wenn

$$c_r = \sqrt{c_a^2 + c_w^2}.$$

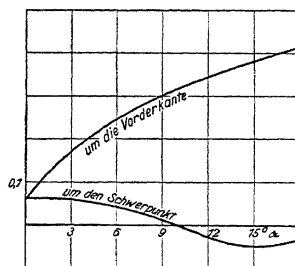
Auf die Größe $\frac{c_m}{c_r}$ kommt es an, wenn man das vom Leitwerk auszuübende Moment seiner absoluten Größe nach kennen will, also bei der Frage nach den vom Steuer aus zu übertragenden Kräften, welche damit zwangläufig zusammenhängen. Wenn es sich rein aerodynamisch um den Ausgleich zwischen Flügel- und Leitwerkmoment handelt, die beide dem Staudruck proportional sind, dann spielt nur die Größe c_m eine Rolle.

Für manche Zwecke kann es nützlich sein, für den Momentenbeiwert einen analytischen Ausdruck einzuführen, und zwar kann man die experimentellen Daten im gebräuchlichen Anstellwinkelbereich sehr gut durch einen quadratischen Ausdruck darstellen:

$$= A + B\alpha + C\alpha^2 \qquad (9)$$

Dabei ist als Anstellwinkel $\alpha = 0$ derjenige zu nehmen, bei welchem der Auftrieb verschwindet, so daß man näherungsweise

setzen kann; wenn es sich nur um oberflächliche Schätzungen handelt, kann man dazu c_t von α unabhängig annehmen.

Wir wollen mit Hilfe dieser Näherungen den Einfluß von Pfeilstellung und Verwindung beim einzelnen Flügel und den Einfluß von Staffelung und Schränkung beim Doppeldecker deutlich machen.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 223 ist das Moment der Luftkraft auf ein Element dz des Flügels um den Schwerpunkt

$$\frac{dM}{qt^2} = \left[\left(A + c_t\frac{y}{t}\right) + \left(B - c_n'\left[\frac{x}{t} - \frac{z}{t}\operatorname{tg}\iota\right]\right)\varkappa - C\varkappa^2\right]dz.$$

Ist nun der Flügel noch verwunden, so hängt α von z ab; wir machen den einfachen Ansatz

$$\alpha = \alpha_0 - \varkappa\frac{2z}{b} \quad (\alpha_0 \text{ Anstellwinkel für } z = 0) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Das Moment des ganzen Flügels erhält man durch Integration von 0 bis $\frac{b}{2}$:

$$\frac{M}{qFt} = A + c_t\frac{y}{t} - \frac{c_n'}{24}\frac{b}{t}\varkappa\operatorname{tg}\iota + \frac{C}{12}\varkappa^2$$
$$+\left[B - c'_n\left(\frac{x}{t} - \frac{b}{4t}\operatorname{tg}\iota\right)\right]\left(\alpha_0 - \frac{\varkappa}{2}\right) + C\left(\alpha_0 - \frac{\varkappa}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß eine pfeilförmige, verwundene Fläche sich ebenso verhält, wie eine nicht pfeilförmige, welche ihre mittlere Lage $x - \frac{b}{4}\operatorname{tg}\iota$ gegen den Schwerpunkt einnimmt, mit ihrem mittleren Anstellwinkel $\alpha_0 - \frac{\varkappa}{2}$. Der Absolutwert des Moments ist erniedrigt um den Betrag $\frac{c'_n}{24}\frac{b}{t}\varkappa\operatorname{tg}\iota - \frac{C}{12}\varkappa^2$; der erste der beiden Summanden kann viel größere Werte annehmen wie der zweite; denn C ist in der Regel sehr klein und auch $\varkappa$ kann nur kleine Werte haben, während c'_n groß ist und ι z. B. beim Pfeilflugzeug von Dunne etwa 30° betrug. Der Stabilitätsanteil des Flügels $\frac{\partial M}{\partial\alpha_0}$ wird weder durch Pfeilstellung noch durch Verwindung geändert.

Abb. 223.
Flügel in Pfeilstellung.

Man findet oft die entgegengesetzte Anschauung; doch liegt dies daran, daß das Problem anders gestellt ist. Man betrachtet nämlich den pfeilförmigen, verwundenen Flügel nicht als einen Teil eines Flugzeugs, sondern als fliegendes System selbst und sieht nicht die Schwerpunktlage als festgegebene Größe an, sondern bestimmt sie so, daß das Momentengleichgewicht hergestellt ist. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{qFt}\frac{\partial M}{\partial\alpha_0} = -\frac{1}{\alpha_0 - \frac{\varkappa}{2}}\left[A + c_t\frac{y}{t} - \frac{c'_n}{24}\frac{b}{t}\varkappa\operatorname{tg}\iota + \frac{C}{12}\varkappa^2 + C\left(\alpha - \frac{\varkappa}{2}\right)^2\right]. \quad (12)$$

Bei dieser Problemstellung erscheint eine stark stabilisierende Wirkung des Zusammenwirkens von Pfeilstellung und Verwindung in dem Gliede $\frac{c_n'}{24}\frac{b}{t}\varkappa\operatorname{tg}\iota$; aber bei dieser Problemstellung vergleicht man die Anordnungen auch

nicht bei derselben Schwerpunktlage; denn die Gleichung $M = 0$ ergibt für die verwundene pfeilförmige Fläche eine im Sinne der Abb. 220 günstigere Lage, als für die unverwundene gewöhnliche Fläche. Ganz analoge Ergebnisse erhält man, wenn man bei konstanter Schwerpunktlage die Verwindung immer so verändert, daß das Momentengleichgewicht hergestellt ist; dann kann man nämlich durch starke Verwindung erreichen, daß die vorderen Teile des Pfeiles viel stärker tragen wie die hinteren, und daß daher eine Schwerpunktlage verwendet werden kann, die nach Abb. 220 den Flügel stabil macht. Dieser Fall entspricht ungefähr dem Dunne-Flugzeug.

Nur eine andere Form derselben Fragestellung bietet der gestaffelte und geschränkte Doppeldecker; auch hierbei wird der Absolutwert des Momentes herabgemindert um einen Ausdruck, der vom Produkt der Staffelung und Schränkung herrührt, und die Stabilität wird durch Staffelung und Voranstellung des vorderen Flügels erhöht, wenn der Doppeldecker als vollständiges fliegendes System betrachtet wird, welches durch Schwerpunktverschiebung oder Veränderung der Einstellung im Gleichgewicht gehalten wird. Aber wenn man die Doppeldeckerzelle mit fester Einstellung als Teil eines Flugzeugs mit festgegebenem Schwerpunkt ansieht, so entfällt jeder Vorteil der Staffelung mit Schränkung hinsichtlich der statischen Stabilität.

§ 3. Leitwerksmoment.

Ganz anderen Einflüssen als das Flügelmoment unterliegt das Moment des Höhenleitwerks. Hier haben wir eine kleine Kraft am großen Hebelarm, daher eine geringe Empfindlichkeit gegen Unsicherheiten in der Bemessung des letzteren und sehr große Empfindlichkeit gegen alle Einflüsse auf die Kraft. Das Moment des Höhenleitwerks ist nach der Formel

$$M_H = c_{nH}^{\times} F_H q_H l \quad \text{. . . . . (13)}$$

zu berechnen. Dabei bedeutet $c_{nH}^{\times}$ den Beiwert der senkrecht zur Rumpfachse (genauer gesagt zur Verbindungslinie des Schwerpunkts mit dem Druckpunkt des Leitwerks) wirkenden Kraft, F_H die Fläche des Leitwerks, q_H den am Leitwerk wirkenden Staudruck und l den Abstand des Leitwerkdruckpunkts vom Schwerpunkt.

Der Hebelarm l ist groß gegen die möglichen Lagenänderungen des Schwerpunkts und des Leitwerkdruckpunkts. Dieser ändert seine Lage natürlich beim Leitwerk ebensogut wie beim Flügel, besonders, da die Tiefe des Leitwerks in der Regel nicht ganz unbedeutend ist. Aus den bisher vorliegenden Messungen scheint indes hervorzugehen, daß er bei den üblichen kleinen Anstellwinkeln, auch wenn dem Ruder nur ein geringer Ausschlag gegeben ist, sehr nahe an der Ruderachse liegt (s. Abb. 151). Daher kann man von dieser kleinen Verschiebung bei Änderung des Flugzustandes vollkommen absehen und als Hebelarm l einfach den Abstand des Schwerpunktes von der Ruderachse nehmen; auch die genaue Kenntnis der Schwerpunktlage spielt dafür keine nennenswerte Rolle.

Die Leitwerkskraft $c_{nH}^{\times} F_H q_H$, auf die es sehr genau ankommt, hängt nun nicht nur vom Anstellwinkel des Flugzeugs gegen die Flugrichtung und vom Ruder-

ausschlag ab, sondern auch sehr wesentlich von der gesamten Luftbewegung im Flugzeug, insbesondere vom Schraubenstrahl und vom Abwind, d. i. von der Richtungsänderung, welche die gegen das Flugzeug anströmende Luft infolge der Zirkulation um die Flügel erfährt. Deshalb sind die im I. Teil VI § 3 besprochenen Messungen, welche die Abhängigkeit von Anstellwinkel und Ruderausschlag geben, nicht ohne weiteres anwendbar, sondern müssen nicht unerheblich in Rücksicht auf den besonderen Fall korrigiert werden.

Infolge des Abwindes wird der Anstellwinkel und mit ihm der Wert von $c_{nH}^{\times}$ vermindert, und zwar ist diese Verminderung nach den ganzen Überlegungen der Auftriebstheorie proportional dem Auftriebsbeiwert der Flügel. Mit wachsendem Anstellwinkel des Flugzeugs wird also die Verminderung stärker; der wirkliche Anstellwinkel des Leitwerks, der für $c_{nH}^{\times}$ maßgebend ist, wächst langsamer als der Anstellwinkel des Flugzeugs. Der Stabilitätsanteil des Leitwerks ist aber die Abhängigkeit des Leitwerksmoments vom Flugzeuganstellwinkel. Bezeichnet nun c_{nH} den Beiwert der Leitwerkskraft bei Vernachlässigung der Flügelzirkulation, also den Beiwert, den man aus Modellmessungen entnehmen kann, und Δ die Verminderung des Anstellwinkels infolge der Flügelzirkulation, so ist

$$\alpha_H = \alpha + \Delta,$$

und

$$c_{nH}^{\times}(\alpha) = c_{nH}(\alpha_H) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

$$\frac{\partial c_{nH}^{\times}}{\partial \alpha} = \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}\left(1 + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Hierbei ist nun mit α konsequent der Anstellwinkel des Flugzeugs bezeichnet; der partielle Differentialquotient bedeutet wieder, daß der Ruderausschlag bei der Differentiation als unveränderlich angesehen werden soll. $\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}$ ist der Differentialquotient des Momentenbeiwerts nach dem Anstellwinkel, der unmittelbar den Modellmessungen zu entnehmen ist. Die Größe Δ kann aus der Zirkulationstheorie berechnet werden; sie hängt aber wesentlich davon ab, wie man die Auftriebsverteilung über die Flügel annimmt, und wird in großer Entfernung doppelt so groß bei elliptischer Verteilung (neuere Theorie) als bei dem einfachen Hufeisenwirbel (s. I, Kap. IV § 5). Nach letzterer Theorie gilt die Formel

$$\Delta = -\frac{1}{2\pi} \cdot c_a \cdot 57{,}3\,\frac{t}{b}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2l}\right)^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

$$\text{nach ersterer } \Delta = -\frac{2}{\pi}\, c_a\, \frac{F}{b^2}\, 57{,}3\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{2l}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Die Versuchsergebnisse von Munk und Cario liegen zwischen den beiden Werten; sie streuen stark, ohne einen systematischen Einfluß der Flügelverwindung deutlich erkennen zu lassen; als Mittel wird angegeben:

$$\Delta = -\frac{1{,}6}{\pi}\, c_a\, \frac{F}{b^2}\, 57{,}3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Die älteren Versuche von Föppl stimmen besser mit (16) überein.

großen Unsicherheit aller numer
Rechnungen damit zu belasten.

vermittelst des Auftriebsbeiwertes ab; daher ist $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$ sicher proportional und dem Seitenverhältnis oder, im Sinne der neueren Theorie besser gesagt dem Verhältnis $\frac{\text{Fläche}}{(\text{Spannweite})^2}$.

Die Abhängigkeit des Beiwertes c_{nH} vom Ruderausschlag wird durch die Abwindberechnung nicht berührt; sie ist aus Modellversuchen ohne weiteres zu entnehmen (s. Abb. 144). Schließlich kann man noch den Wert von c_{nH} bei losgelassenem Steuer brauchen. In diesem Fall muß das Rudermoment der Luftkräfte um die Ruderachse, das „Verstellmoment", dem Drehmoment des Gewichts um dieselbe Achse das Gleichgewicht halten; aber dieses letztere Moment ist so klein, daß man unbedenklich den Wert c_{nH} nehmen kann, der zum Rudermoment Null gehört. Dieser folgt aus Diagrammen von der Art der Abb. 146 und 148; diese sind selbst allerdings noch kaum numerisch zu verwenden.

Der Staudruck am Leitwerk q_H kann auch recht wesentlich von dem Werte q, welcher zur Flugzeuggeschwindigkeit gehört, abweichen, und zwar wegen des Schraubenstrahls, der beim normalen Flugzeugtyp in voller Kraft das Leitwerk trifft. Es liegen noch keine systematischen Messungen über die Größe dieser Einwirkung vor; nach einer privaten Mitteilung von Prof. v. Sanden muß man nach oberflächlichen Messungen unter Umständen mit einer Verdreifachung von q rechnen. Der Schraubenstrahl ist ja ein sehr wesentlicher Bestandteil des ganzen fliegenden Systems; denn gerade die Impulszunahme der Luft hinter der Schraube bringt die Vortriebskraft hervor. Im normalen Gleitflug kann man wohl $q_H = q$ annehmen; im Sturzflug dagegen wirkt die Schraube sicher als Windrad, sie verzehrt Energie, und die Folge muß nach dem Impulssatz eine Art Abschirmwirkung sein; q_H wird kleiner als q. Diese Abschirmwirkung ist noch nicht gemessen, auch kann sie nur roh abgeschätzt werden, da die Kraftmessungen an Luftschrauben sich nicht bis zu den Fortschrittsgraden, welche für die leerlaufende Schraube in Betracht kommen, erstrecken; der Wert der Abschirmung, den eine Abschätzung ergibt, scheint allerdings nicht zu genügen, um die volle Wirkungslosigkeit des Leitwerks bei manchen Todesstürzen zu erklären.

§ 4. Das ganze Flugzeug.

Die statische Stabilität oder die Momentenänderung bei verschiedenen Flugzuständen für das ganze Flugzeug setzt sich ebenso wie das Moment selbst aus den Anteilen der Flügel und des Leitwerks zusammen. Beim normalen Flugzeug fällt mit wachsendem Anstellwinkel das Moment der Flügel, während das Leitwerksmoment wächst. Die Flügel wirken instabilisierend, das Leitwerk stabilisierend. Soll das ganze Flugzeug eine bestimmte Stabilität zeigen, so muß man das Leitwerk in Rücksicht auf die Größe der Flügel und auf die Lage des Schwerpunktes

dimensionieren, und zwar ist außer der für die Größe von $\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}$ maßgebenden Form des Leitwerks das **statische Moment** des Leitwerks um den Schwerpunkt $F_H l$ die ausschlaggebende Größe. Die Verteilung der Fläche F_H auf Flosse und Ruder muß nach der Größe der auszugleichenden Flügelmomente und nach der zugelassenen Winkelgröße des Ausschlags bemessen werden. Erstere hängt sehr wesentlich mit der Stabilität der Flügel zusammen, also in erster Linie mit der Schwerpunktslage. Über die Verteilung des Produktes $F_H l$ auf die beiden Faktoren, also darüber, ob größere Leitwerkfläche oder größere Rumpflänge vorzuziehen ist, geben unsere bisherigen Betrachtungen, in denen keine andere Kombination der beiden Größen vorkommt, keinen Aufschluß. Erst in den Berechnungen über dynamische Stabilität tritt auch das Trägheitsmoment des Leitwerks $F_H l^2$ auf.

Zunächst wird man darauf hinarbeiten, daß die Ausschläge und Kräfte des Ruders nicht zu groß werden, damit einesteils der Führer nicht ständig einen ermüdenden Kraftaufwand zur Erzeugung des Verstellmoments nötig hat, andererseits ein kleiner Ruderausschlag das Gleichgewicht sehr empfindlich stört; dann muß das Flugzeug auf Steuerausschläge fein reagieren. Soll der Flugwinkelbereich groß sein, so führt das auf eine geringe Abhängigkeit des Gesamtmomentes vom Anstellwinkel, also auf **Indifferenz**. Die Stabilität soll klein gehalten werden. Dies hat noch die weitere Folge, daß der Widerstand des Leitwerks stets klein bleibt; dieser ist bei richtigem Bau nur eine kleine Größe, welche so wenig wie der Leitwerksauftrieb im Kräftehaushalt des Flugzeugs eine Rolle spielt. Müssen aber große c_{nH} erreicht werden, so kann nach Abb. 145 der Widerstand auf ein Vielfaches seines Wertes bei kleinem c_{nH} wachsen und somit die Leistungen des Flugzeugs nachhaltig und ungünstig beeinflussen. Dabei ist es interessant, daß diese Widerstandssteigerung fast nur von c_{nH} und kaum vom Ruderausschlag abhängt.

Dieser Gedankengang ist für kleine Flugzeuge einleuchtend; in der Tat sind alle bewährten kleinen Flugzeuge, wenigstens in Deutschland, so gebaut, daß die Instabilität der Flügel durch die Stabilität des Leitwerks gerade ausgeglichen wird. Dies ist natürlich nicht im ganzen Bereich der Flugwinkel möglich; daher sind die im steilen Anstieg bzw. flachen Gleitflug verwendeten Anstellwinkel, mit welchen das Flugzeug am ökonomischsten fliegt, maßgebend. In den Abb. 224a, b, c sind die Flügelmomente bezogen auf den Staudruck 1, also die Größe $c_m F t$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel bei verschiedenen Schwerpunktlagen eingetragen; dazu sind Kurven gezeichnet, welche das Leitwerksmoment bezogen auf den Staudruck 1 darstellen und gerade die Eigenschaft haben, im Winkelbereich 6°—9° Indifferenz zu ergeben. Im Hinblick auf das über q_H Gesagte, ist noch nicht eindeutig klar, wie man nun aus diesen Kurven auf das statische Moment der Leitwerksfläche schließen soll. Die Neigung der Leitwerkskurve ist gegeben durch $\frac{\partial}{\partial \alpha} \cdots _H \cdots q$.
Man hat also bei der Dimensionierung noch die Wahl, ob man Indifferenz für den Motor- oder Gleitflug, ob für festgehaltenes Steuer bei bestimmtem Ruderausschlag oder losgelassenes Steuer erstrebt. Die Bestimmung des Flugzeugs im einzelnen Fall kann für die Entscheidung dieser Fragen maßgebend sein. Im allgemeinen

wird man sich durch folgende Gesichtspunkte leiten lassen: Indifferenz im Motorflug bedeutet Instabilität im Gleitflug. Über die Vorteile und Nachteile einer kleinen Instabilität können wir hier noch nicht sprechen; diese können erst abgewogen werden, wenn wir ein Flugzeug in seiner Reaktion auf einen Steuerausschlag oder eine Störung verfolgen. Einfache Betrachtungen der statischen Stabilität können noch kein Bild von diesen Vorgängen geben, darum auch noch zu keiner Lösung des Problems der Steuerbarkeit führen. Indifferenz macht große Ruderausschläge unnötig, wenn man das Flugzeug in verschiedenen Flugzuständen im Gleichgewicht halten will; daraus folgt gewiß nicht ohne weiteres, daß bei einem solchen Flugzeug mäßige Ruderausschläge, die bei Gleichgewicht großen Wirkungen entsprechen, auch momentan schnelle Wirkungen hervorbringen. Aber es entspricht dem physikalischen Gefühl, diesen Schluß als wahrscheinlich richtig an-

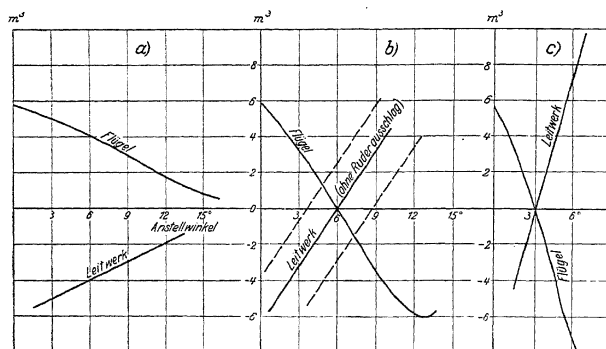



Abb. 224. Ausgleich zwischen Flügel- und Leitwerkmoment.

zusehen und die Vorteile für Gleichgewichtszustände auch für den Übergang zwischen verschiedenen Gleichgewichtszuständen zu erwarten. Man wird jedenfalls nicht wollen, daß das Flugzeug unter Umständen stark instabil wird, auch wenn man eine kleine Instabilität nicht von vornherein abweisen will. Darum wird man die Leitwerkskurve als Kurve für den Gleitflug auffassen und das Leitwerk so dimensionieren, daß das Flugzeug Indifferenz für $q_H = q$ zeigt. Dann hat man im Motorflug mit einiger Stabilität zu rechnen. Dafür sollte im Sturzflug, wenn $q_H < q$ wird, Instabilität erwartet werden; diese könnte ein Nachteil sein, besonders bei leichten Flugzeugen, die sich oft im Sturzflug befinden. Aber diese Gefahr ist gering; denn man sieht an den Flügelmomentkurven, daß ihre negative Neigung gegen die Abszisse bei kleinen (Sturzflug-) Anstellwinkeln immer flacher wird, daß also die instabilisierenden Eigenschaften der Flügel im Sturzflug sehr gemildert sind; dies ist besonders bei tiefliegendem Schwerpunkt der Fall. Daher kann im allgemeinen ein derart für $q_H = q$ ausgeglichenes Flugzeug als sicher angesehen werden. Ob man das Steuer will loslassen können, ohne daß das Flug-

zeug von selbst aus seiner Bahn kommt, also Instabilität zeigt, ist Geschmackssache. Die deutschen Flugzeuge sind im allgemeinen nicht darauf eingerichtet, die Engländer scheinen darauf Wert zu legen. Setzt man für $\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha}$ seinen Wert beim Ruderausschlag Null und $q_H = q$, so wird meist im Motorflug die Stabilität auch zum Loslassen des Steuers ausreichen. Jedenfalls kann man das Steuer zeitweise loslassen, wenn man von der Leitwerksfläche nicht allzuviel dem Ruder, sondern mehr der Flosse zuteilt. Bei richtigem Momentenausgleich halten sich auch bei kleinen Rudern — trotzdem die Ausschläge natürlich größer werden — die Verstellmomente und der Widerstand in denselben mäßigen Grenzen wie bei großen Rudern.

Bei **großen Flugzeugen**, besonders bei Verkehrsflugzeugen, sind die vorgebrachten Gesichtspunkte nicht stichhaltig; bei solchen ist Sicherheit wichtiger als Beweglichkeit und Ökonomie. Auch ist es bei solchen Flugzeugen nicht nötig, viele verschiedene Flugzustände zu erzielen; man kann sich auf einen schmalen Anstellwinkelbereich beschränken; darum ist hohe Stabilität nicht als Nachteil anzusehen. Man muß dann bei der Dimensionierung die Leitwerkskurve in dem betreffenden Winkelbereich nicht, wie in den Abb. 224, spiegelbildlich zur Flügelkurve zeichnen, sondern steiler ansteigend. Da man von vornherein nur einen kleinen Anstellwinkelbereich beherrschen will, bleiben die Ruderausschläge dennoch mäßig.

Mathematisch fassen sich diese Betrachtungen in eine Gleichung zusammen, welche bei gegebener Schwerpunktlage und Leitwerkform das statische Moment des Leitwerks zu bestimmen gestattet: Wenn Stabilität oder Indifferenz erreicht werden soll, muß

$$c_m \; F t \qquad (19)$$

sein.

In Abb. 224b sind mehrere Leitwerkskurven eingezeichnet, welche die verlangte Eigenschaft haben; sie verlaufen einander parallel. Fassen wir sie als Kurven auf, die zum Ruderausschlag Null gehören, so bedeutet das, daß jede dieser Kurven einer möglichen Leitwerkskonstruktion entspricht; nur hat das durch die ausgezogene Linie dargestellte Leitwerk keinen Ruderausschlag nötig, wenn mit 6° Flügelanstellwinkel geflogen werden soll, die andern beiden einen positiven, bzw. negativen Ruderausschlag. Natürlich ist die erste Konstruktion vorzuziehen; bei ihr ist im Normalflug weder Kopf- noch Schwanzlastigkeit zu fühlen. Vielleicht noch besser ist es, im gebräuchlichsten Anstellwinkelbereich einen solchen Ruderausschlag herzustellen, daß das Verstellmoment verschwindet. Das richtige Verhalten in dieser Richtung wird offenbar nicht durch eine Veränderung des statischen Moments erzwungen, sondern durch eine Maßnahme, welche bei gegebenem Leitwerk eine bestimmte Leitwerkkraft mit dem Anstellwinkel der Flügel verknüpft, also durch die **Schränkung des Einstellwinkel zwischen Flügel und Flosse**. Der geeignete Einstellwinkel der Flosse geht aus der richtigen Rechnung des Momentendiagramms hervor.

Die erwähnten Gesichtspunkte genügen aber nun noch nicht, um zu entscheiden, welches der Momentendiagramme Abb. 224a, b oder c vorzuziehen ist, also welcher Schwerpunktlage gewählt werden soll. Unsere Abb. 220 zeigt ja, daß der Stabilitätsanteil der Flügel günstiger wird, wenn der Schwerpunkt weiter nach vorn gelegt wird; man könnte also erwarten, daß man bei weit vorn liegendem Schwerpunkt mit einem kleinerem Leitwerk auskommen könnte. Man müßte allerdings eine sehr große Schränkung zwischen Flügeln und Flosse anwenden; doch könnte man da, wenn man nicht einen ganz extremen Fall wählt, in erreichbaren Grenzen bleiben. Tatsächlich sind Flugzeuge, wie Abb. 224a und c, möglich, aber sie bewähren sich nicht. Der Ausgleich der Momente im Flugzeug kommt als Differenz zweier Größen heraus; und der Rest, welcher in dieser Differenz für den Ausgleich durch das Ruder bleibt, soll klein sein gegen die Größe, welche die einzelnen Summanden annehmen können. Wenn nun im Bereich der gebräuchlichsten Anstellwinkel das Flügelmoment und das Flossenmoment für sich groß sind, wie bei Abb. 224a und c, und es ändert sich eines der beiden Momente prozentual nur um wenig, so macht das für die kleine Differenz bereits einen hohen Prozentsatz aus. Die kleine Differenz zweier großer Zahlen bleibt stets in ihrem Betrage unsicher; das gilt nicht nur für mathematische Rechnungen, sondern auch für technische Konstruktionen; was in der Mathematik die Ungenauigkeiten und Fehler in der Rechnung sind, das sind in der Technik die unkontrollierbaren äußeren Einflüsse und Zufälligkeiten. Dadurch wird der Flug bei einem derartigen Momentenausgleich unsicher. Vielleicht könnte eine sehr solide Konstruktion über all diese Schwierigkeiten sich hinwegsetzen; aber eine Schwierigkeit bleibt für den normalen Flugzeugtyp bestehen und läßt sich nur durch richtige Schwerpunktlage vermeiden, d. i. die bei der Diskussion des Staudrucks am Leitwerk erwähnte Ungleichmäßigkeit zwischen Motorflug und Gleitflug. Wenn im Motorflug die spezifische Leitwerkskraft das Zwei- bis Dreifache der Kraft im Gleitflug sein kann, so macht das bei dem Ausgleich der Abb. 224a und c gerade im Bereich der wichtigen Anstellwinkel ungeheuer viel aus; denn die Leitwerkskurven verlaufen im Motorflug viel steiler und nur der Punkt bleibt unverändert, in welchem die Leitwerkskraft verschwindet, also die Kurve die Abszisse schneidet. Der Ruderausschlag müßte bei Ausgleich im Gleitflug für den Motorflug beim selben Anstellwinkel bereits größer sein als zum Einstellen irgend eines anderen Gleitwinkels. Zum gleichmäßigen dauernden Betrieb wird sich sonach nur ein Flugzeug eignen, bei welchem im wichtigen Anstellwinkelbereich die Leitwerkskurve die Abszisse schneidet wie in Abb. 224b, und wegen der Ausgleichvorschrift muß dann auch die Flügelkurve dort die Abszisse schneiden; das Diagramm Abb. 224b ist daher als das erstrebenswerte Flugzeugdiagramm anzusehen. Seine physikalische Bedeutung ist die: im gebräuchlichen Bereich soll das Leitwerk entlastet sein; die Flügel sollen für sich ausgeglichen sein; der Schwerpunkt soll auf der Luftkraftresultierenden der Flügel allein liegen. Wird der Schwerpunkt weiter nach vorn gelegt, wie in Abb. 224a, so wird man bei richtiger Einstellung der Flosse entweder im Gleitflug Kopflastigkeit oder im Motorflug Schwanzlastigkeit beobachten und sich vergebens mühen, diese Ungleichmäßigkeit durch Verspannen oder Flossenvergrößerung oder durch andere Flosseneinstellung zu beheben. Diese Anschau-

ungen stimmen durchaus mit den Erfahrungen und den Aussagen erfahrener Führer überein.

Bei großen mehrmotorigen Flugzeugen wird das Leitwerk oft nicht vom Schraubenstrahl getroffen; deshalb ist für solche das letzterwähnte Argument nicht ausschlaggebend; doch ist gerade bei großen Flugzeugen der zufälligen Ungenauigkeit ein großer Spielraum gegeben und deshalb auch dort der Momentenausgleich nach Abb. 224b zu empfehlen. Aussagen erfahrener Führer scheinen darauf hinzuweisen, daß bei ungünstiger Schwerpunktlage ein Flug in ruhiger Atmosphäre befriedigend verlaufen, dagegen bei Böigkeit sehr schwierig sein kann. Eine experimentelle Klärung dieser Frage wäre von höchstem Interesse, und zwar praktisch insbesondere im Hinblick auf die Möglichkeit einer vom heutigen Typ abweichenden Konstruktion, z. B. des Tandems und der Ente.

Die Entenkonstruktion wird aus verschiedenen Gründen in letzter Zeit wieder öfters vorgeschlagen; wir wollen sie daher als Beispiel dafür wählen, wie unsere nur für den Normaltyp angestellten Betrachtungen sinngemäß auf einen anderen Fall zu übertragen sind: Bei der Ente liegt das Leitwerk vor den Flügeln und somit weit vor dem Schwerpunkt; der Stabilitätsanteil des Leitwerks ist also in diesem Fall negativ, daher muß der Stabilitätsanteil der Flügel positiv sein und der Schwerpunkt weit vorn liegen. Aber je weiter dieser nach vorn rückt, um so größer muß das statische Moment des Leitwerks sein, wenn das Flugzeug noch einigermaßen indifferent sein soll, also keine allzugroßen Ruderausschläge für die verschiedenen Flugzustände nötig werden sollen. Auf keinen Fall kann die obige Konstruktionsvorschrift eingehalten werden, derzufolge der Momentenausgleich im praktisch wichtigsten Bereich nicht als Differenz großer Zahlen herauskommen sollte. Allerdings fällt bei der Ente vieles weg, was zur Begründung dieser Vorschrift vorgebracht wurde; der Schraubenstrahl trifft ja hierbei nicht das Leitwerk, und das Ansaugen der Schraube übt keine so starke Wirkung aus; die Ungleichmäßigkeit zwischen Motor- und Gleitflug fällt daher weg. Auch ist die Wirksamkeit des Leitwerks eine weit größere, da der Abwind wegfällt; schließlich trägt das Leitwerk der Ente, da es nach Abb. 225 unter allen Umständen schwanzlastig wirkende Momente hervorbringen muß, während das Leitwerk des gewöhnlichen Flugzeugs keine Auftriebskräfte erzeugt; sein Widerstand muß nicht als nur schädlich angesehen werden. Ob man die Störungen infolge zufälliger Unregelmäßigkeiten bei einem Momentenausgleich nach Abb. 225 leicht überwinden kann, kann nur durch die Erfahrung entschieden werden. Soll im ganzen Bereich der Flugwinkel Stabilität oder Indifferenz herrschen, so darf die Leitwerkkurve in Abb. 225 die Abszisse bei einem größeren Anstellwinkel schneiden als die Flügelkurve. Diese

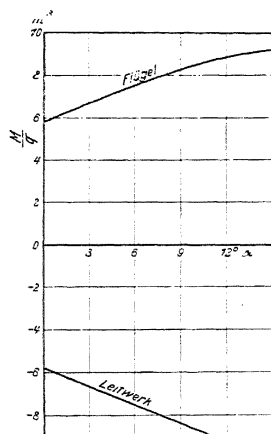



Abb. 225.
Momentendiagramm einer Ente.

schneidet aber erst bei einem Anstellwinkel mit negativem Auftrieb; also muß das Leitwerk erheblich steiler eingestellt werden als die Flügel, gerade entgegengesetzt dem Verhalten beim gewöhnlichen Typ. Immer muß die hinten liegende Fläche flacher eingestellt sein. Dadurch treten bei der Konstruktion der Ente Schwierigkeiten ganz neuer Art gegenüber dem gewöhnlichen Typus auf. Bei letzterem ist durch den Abwind der Anstellwinkelbereich des Leitwerks erheblich kleiner als der des Tragwerks, und es kommen für das Leitwerk nur kleine wirkliche Anstellwinkel α_H in Betracht, so daß der Auftrieb mit dem Anstellwinkel gleichmäßig ansteigt. Bei der Ente jedoch, wo der Anstellwinkel des Leitwerks einen ebenso großen Bereich wie der des Tragwerks durchläuft, aber immer um einige Grad größer ist, muß darauf geachtet werden, daß nicht bei den hohen, günstigen Anstellwinkeln des Tragwerks das Leitwerk bereits in die Nähe seines Auftriebsmaximums kommt, in welchem seine Kraft vom Anstellwinkel und auch vom Ruderausschlag unabhängig wird, also eine Steuerwirkung kaum mehr möglich ist. Da einstweilen der Bau einer Ente nur als Zukunftsproblem ins Auge gefaßt werden muß, mögen diese allgemeinen Bemerkungen genügen.

§ 5. Numerische Durchführung. Beispiele. Faustformeln.

Wir verlassen nun die allgemeinen Betrachtungen, welche der grundsätzlichen Klarstellung der physikalischen Beziehungen dienen sollten, und wenden uns der Aufgabe zu, im Einzelfall die Momente numerisch zu berechnen. Dieses Problem tritt an den Praktiker bei jedem Entwurf und jeder Prüfung eines Flugzeugs heran und führt auf Schwierigkeiten, welche bei grundsätzlichen Erörterungen gar nicht hervortreten. Diese liegen im wesentlichen in der Unsicherheit der numerischen Kenntnisse und der rechnerischen Unsicherheit bei Bildung einer kleinen Differenz großer Zahlen. Man geht wohl am zweckmäßigsten in folgender Weise vor:

Moment der Flügel: Steht eine Modellmessung der ganzen Flügelanordnung zur Verfügung, so kann man ihr die Werte c_{mo}, c_n und c_t unmittelbar entnehmen; ist dies nicht der Fall, so wird man sich wenigstens bei jedem Entwurf auf die Modellmessung eines Flügelprofils stützen. Diese bezieht sich auf einen einzelnen Flügel von bestimmtem Seitenverhältnis und muß auf eine gegebene Flügelkombination und eine gegebene Schwerpunktlage umgerechnet werden. Allgemeine einfache Formeln zur Umrechnung des Eindeckers auf anderes Seitenverhältnis oder auf eine Mehrdeckeranordnung, wie sie nach Prandtl die erste Näherung für die Kräfte liefern, existieren hier nicht; der Einfluß von Staffelung und Schränkung, welcher dort von zweiter Ordnung ist, wird hier sehr bedeutend, wie schon im § 2 dargelegt wurde. Es ergibt sich daher die Notwendigkeit, erst die einzelnen Flügel und dann ihre gegenseitige Beeinflussung nach Betz (I. Teil, IV § 5 u. 6) zu berechnen. Dann muß aber die Selbstinduktion jedes einzelnen Flügels besonders berücksichtigt werden, damit das richtige Seitenverhältnis in der Rechnung steht. Nun ist das Moment um den Schwerpunkt, wie in Abb. 222 schon gezeigt wurde, der kleinen Differenz der beiden relativ großen Werte $c_{mo}t$ und $c_n x$ proportional; bringt man daher an den Größen c_{mo} und c_n einzeln die an sich recht unsicheren Korrektionen der Induktion an, so werden die numerischen Werte des Endresultats außerordentlich unsicher; denn bei der Differenzenbildung heben sich

Größen erster Ordnung weg, und es ergibt sich ein Gesamtbetrag von der Größenordnung der gegenseitigen Beeinflussung. Dies wird vermieden, wenn man zuerst die Momente der einzelnen Flügel um den Schwerpunkt berechnet, und erst zuletzt die Korrektion infolge der induzierenden Wirbel einführt.

Die Genauigkeit der Rechnung könnte erheblich erhöht werden, wenn bei der Modellmessung das kleine Moment um einen Punkt, der etwa in einem Drittel der Flügeltiefe von vorn gelegen ist, direkt mit empfindlicheren Federn gemessen werden könnte; bei den heutigen Anordnungen ist das nicht ohne weiteres zu bewerkstelligen.

Man hat also zunächst nach Formel (7) die Momente der einzelnen Flügel zu

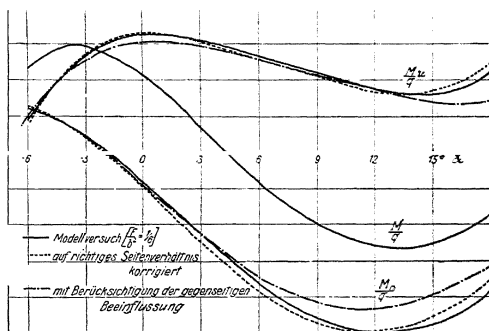



Abb. 226. Berechnung des Flügelmomentes.

berechnen. Als Beispiel diene ein Doppeldecker von folgenden Abmessungen (Index $_o$ Oberflügel, Index $_u$ Unterflügel):

$$F_o = 17{,}5\ \text{m}^2;\ b_o = 12{,}4\ \text{m};\ t_o = 1{,}50\ \text{m};\ x_o = 0{,}818\ \text{m};\ y_o = -0{,}935\ \text{m}$$

$$F_u = 15{,}0\ \text{m}^2;\ b_u = 11{,}0\ \text{m};\ t_u = 1{,}50\ \text{m};\ x_u = 0{,}300\ \text{m};\ y_u = 0{,}700\ \text{m}.$$

Pfeilstellung und Schränkung 0, Staffelungswinkel $\vartheta = 17{,}5^0$.

Die Profileigenschaften seien durch die Messung T. B. I, S. 211 (Profil 159) an einem Eindecker vom Seitenverhältnis 1 : 6 festgestellt. Dann erhält man für $\frac{M_o}{q}$ und $\frac{M_u}{q}$ die in Abb. 226 eingezeichneten Werte. Diese müssen zunächst auf die richtigen Seitenverhältnisse der einzelnen Flügel korrigiert werden. Man kann annehmen, daß das Moment im wesentlichen vom Auftrieb herrührt, daher nur in derselben Weise wie der Auftrieb beeinflußt wird. Man berechnet am einfachsten (I. Teil III § 7) zu jedem α die Größe

$$b \qquad (20)$$

wobei sich der Index $^{(1)}$ auf die Modellmessung bezieht, und ordnet jedes $\frac{M}{q}$, das

bei der Modellmessung zum Winkel α gehörte, nun dem Winkel $\alpha + \Delta\alpha$ zu (gestrichelte Kurve in Abb. 226).

Die gegenseitige Induktion der beiden Flügel wird am besten in zwei Schritten berücksichtigt (vgl. I. Teil IV § 5 (37) und (38) S. 142):

1. Das Moment jedes Flügels ändert sich infolge des von der Zirkulation um den anderen Flügel herrührenden Geschwindigkeitszuwachses, und zwar wird:

$$\Delta \frac{M_o}{\quad} = \quad \mu \quad t_u$$
$$\Delta \frac{M_u}{\quad} = - \quad \frac{t_o}{b_u} c_{ao} \frac{M_u}{q} \tag{21}$$

2. Der Anstellwinkel ändert sich infolge der Zirkulation um den anderen Flügel um den Betrag:

$$\Delta \alpha_o = - \frac{57,3}{4\pi} (\nu - \varkappa) \frac{t_u}{b_o} c_{au}$$
$$57,3 \quad \nu + \varkappa) \frac{t_o}{b} c_{ao} \tag{22}$$

Dabei sind die von der Staffelung und vom Flügelabstand abhängigen Konstanten μ, ν und $\varkappa$ den Abb. 89 bis 91 zu entnehmen. Abb. 226 zeigt das Ergebnis in unserem Beispiel; den ganzen Rechnungsgang illustriert Tabelle 1:

Der Schwerpunkt liegt nach diesem Rechenergebnis nicht ungünstig; doch wäre es sicher eine Verbesserung, ihn noch etwas weiter vorzulegen; soll das Flügelmoment nicht für $\alpha = 4,5^0$, sondern für $\alpha = 6^0$ verschwinden, so muß der Schwerpunkt etwa $\quad M \quad 0,85 \quad = 4,2$ cm weiter nach vorn rücken. Ein so geringer Fehler ist aber auch durch Höherlegen des Schwerpunkts oder Voranstellung des Unterflügels auszugleichen.

Hat ein Flügel Pfeilstellung und Verwindung, so wendet man auf jedes Flügelelement für sich das Ergebnis der Modellmessung an und integriert über den ganzen Flügel. Dies geschieht am besten auch vor Anbringung der Induktionskorrekturen. Ist die Verwindung unwesentlich, so kann man eine mittlere Vorderkante in die Rechnung einführen, welche um $\frac{b}{4}$ tg ι hinter der Spitze des Pfeiles gelegen ist.

Man ist nun nicht immer in der Lage, eine solche ausführliche Rechnung durchzuführen, sei es, daß die Unterlagen numerisch nicht genau genug bekannt sind, um mit so feinen Mitteln zu rechnen, sei es, daß man nur ein überschlägiges Urteil abgeben will. So z. B. benutzt man bei der Dimensionierung des Leitwerks die Formel (19), in welcher von den Flügeln her der Wert $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}$ vorkommt; dieser ist das Ergebnis eines Ausgleichs im Bereich der praktischen Anstellwinkel, also im Grunde auch ein Überschlagswert. Dieser Wert hängt in erster Linie von der Rücklage x ab und nur weit weniger von der Tieflage und vom Profil. Auch von Staffelung und Schränkung ist nur der Absolutwert c_m, nicht seine Änderung mit dem Anstellwinkel, in bedeutender Weise abhängig. Es liegt darum nahe, aus den Erfahrungswerten sich eine Faustformel so zu bilden, daß für alle anderen Einflüsse ein

Tabelle 1.

Zur Berechnung des Flügelmomentes.

Bezeichnung	Formel	$\alpha =$ -6^0	-3^0	0^0	3^0	6^0	9^0	12^0	15^0	18^0	Bemerkungen
$\frac{M_o}{q}$	Aus Modellversuch mit den gegebenen	1,25	0,51	—1,14	—2,29	—3,63	—4,75	—4,71	—4,82	3,92	Ausgeglichen in den ausgezogenen Kurven der Abb. 226.
$\frac{M_u}{q}$	Abmessungen berechnet	0,87	2,69	3,27	3,05	2,50	2,35	2,03	1,57	2,26	
Korrektion auf das richtige Seitenverhältnis:											
$c_{ao} = c_{au}$		—0,176	0,125	0,428	0,650	0,867	1,07	1,24	1,35	1,11	$\frac{\text{Momente}}{\text{Staudruck}}$ in m^3 Winkel in Grad.
$\Delta\alpha_o$	$= 0,69\ c_{ao}$	+0,12	—0,09	—0,30	—0,45	—0,60	—0,74	—0,85	—0,93	—0,77	
$\Delta\alpha_u$	$= 0,57\ c_{au}$	+0,10	—0,07	—0,24	—0,37	—0,50	—0,61	—0,71	—0,77	—0,63	
Korrektion auf gegenseitige Induktion: $\mu = 11,1$; $\nu = 1,74$; $\varkappa = 1,69$.											
$\frac{M_o}{q}$	aus d. gestrichelten Kurve in Abb. 226	1,30	0,40	—0,95	—2,45	—3,83	—4,72	—4,70	—4,52	—3,55	Für c_a wurde näherungsweise der Modellwert mit dem nicht ganz korrekten Seitenverhältnis eingesetzt.
$\frac{1}{q}\Delta M_o$	$= 0,107\ c_{au}\frac{M_o}{q}$	—0,025	0,005	0,043	0,170	0,356	0,540	0,626	0,654	0,425	
$\Delta\alpha_o$	$= 0,0276\ c_{au}$	Sehr klein, zu vernachlässigen.									
$\frac{M_u}{q}$	aus d. gestrichelten Kurve in Abb. 226	0,73	2,80	3,30	3,05	2,60	2,10	1,68	1,73	2,50	
$\frac{1}{q}\Delta M_u$	$= -0,120\ c_{ao}\frac{M_u}{q}$	0,016	—0,042	—0,171	—0,238	—0,272	—0,270	—0,251	—0,281	0,335	
$\Delta\alpha_u$	$= 2,13\ c_{ao}$	—0,375	0,27	0,91	1,38	1,84	2,28	2,64	2,87	2,37	

Mittelwert eingesetzt wird, und nur die Lage des Schwerpunkts als Variable stehen bleibt.

Durch Mittelbildung über viele Modellversuche erhält man auf diese Weise für Eindecker die Faustformel:

$$\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} = 0{,}0172 - 0{,}0126\frac{y}{t} - 0{,}0756\,\frac{x}{t} \quad \text{(23)}$$

Hier ist die Tieflage noch als Variable aufgenommen; denn der Unterschied in der Tieflage bei einem „Hochdecker" und einem Flugzeug in der Art des Junkersschen, bei welchem der Flügel unter dem Rumpf mit Motor, Insassen usw. liegt, ist zu bedeutend, um herausgemittelt zu werden. Beim Doppeldecker kann man einen Schritt weitergehen und auch für die Tieflage einen Mittelwert einführen; es ergab sich aus einem reichen Material als Mittelwert der Abstand y_o vom Oberflügel gleich 0,56 mal der mittleren Flügeltiefe t_m. Diese sei definiert durch die Gleichung

$$t_m = \frac{t_o F_o + t_u F_u}{F_o + F_u} \quad \text{(24)}$$

Definieren wir uns dazu eine mittlere Rücklage hinter der mittleren Vorderkante:

$$x = \frac{x_o F_o + x_u F_u}{F_o + F_u} \quad \text{(25)}$$

so wird für den Doppeldecker die Faustformel gefunden:

$$\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} = \frac{\partial c_{mo}}{\partial \alpha} + \frac{y_o}{t_m}\frac{\partial c_t}{\partial \alpha} - \frac{x}{t_m}\frac{\partial c_n}{\partial \alpha} = 0{,}014 - 0{,}063\,\frac{x}{t_m} \quad \text{(26)}$$

In einem reichen Material fand sich als größte Abweichung der Faustformel von der individuellen Rechnung 22 vH, als mittlere Abweichung 2 vH bei Doppeldeckern. Die Eindeckerformel ist nicht so zuverlässig, da zu ihrer Aufstellung nur ein kleineres Material zur Verfügung stand. Auch das Doppeldeckermaterial ist insofern einseitig, als es sich fast nur auf Landflugzeuge bezieht; bei Seeflugzeugen liegt der Schwerpunkt in der Regel tiefer, daher mag sich der Zahlwert 0,014 in Formel (26) erhöhen. Die Faustformeln können nur zur Übersicht dienen, aber auf keinen Fall die genaue Rechnung ersetzen. Dagegen kann die Faustformel sehr gut dazu dienen, die Momentenkurve der Flügel, die für einen bestimmten Schwerpunkt berechnet ist, auf einen anderen Schwerpunkt umzurechnen.

Nicht ganz so gut wie für die Neigung der Momentenkurve läßt sich ein Mittelwert für den absoluten Wert bei verschiedenen Anstellwinkeln angeben. Liegt der Schwerpunkt etwa 0,36 mal der mittleren Flügeltiefe hinter der mittleren Vorderkante, so kann man in der Regel darauf rechnen, daß die Momentenkurve im Sinne der Vorschriften des vorigen Paragraphen verläuft. Der Spielraum für Profileigenschaften, Staffelung und Schränkung geht aber etwa von 0,32 bis 0,40. Staffelung und Schränkung verschiebt die Momentenkurve $\frac{M}{q}$ ungefähr parallel zur Ordinate näherungsweise um den Betrag $-\frac{F}{2}\frac{d c_a}{d \alpha}(x_o - x_u)(\alpha_o - \alpha_u)$. Die Schwerpunktlage kann, wenn sie beim ersten Versuch nicht befriedigt, am leichtesten durch Änderung der Pfeilstellung verbessert werden; auch eine Versetzung der Flügel und

bei gestaffelter Anordnung Änderung der Schränkung ist oft unschwer zu bewerkstelligen.

Das Moment des Leitwerks ist gegeben, wenn man die Größe c_{nH} in Abhängigkeit vom Anstellwinkel kennt. Durch den Abwind wird der Anstellwinkelbereich des Leitwerks gegenüber dem der Flügel wesentlich verkleinert und klein gehalten. Infolgedessen befolgt die Normalkraft auf das Leitwerk im praktischen Bereich sehr genau ein lineares Gesetz in Abhängigkeit vom Anstellwinkel. Bei symmetrischer Ausgestaltung muß für den Anstellwinkel Null auch die Normalkraft verschwinden; daher ist alles gegeben, wenn man nur den Wert $\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}$ kennt. Für den Ruderausschlag Null hängt dieser vom Umriß und vom Seitenverhältnis ab.

Tabelle 2.

Einige Leitwerksformen der Praxis.[1])

Leitwerkumriß	Alb C VII	Lvg C IV	Ru C I	Rol C II	Ru C III	B. E. 2 E.
$\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}$	0,0418	0,0453	0,0523	0,0558	0,0593	0,0558
Seitenverhältnis . . .	1,16	1,20	1,54	1,78	2,12	3,26

Zur Umrechnung auf verschiedene Seitenverhältnisse kann Abb. 227 dienen. Es sei unter „Seitenverhältnis" stets das Verhältnis: größte Tiefe des Leitwerks zu seiner größten Spannweite verstanden. Die Punkte der Abb. 227 sind Göttinger (unveröffentlichten) Messungen an Leitwerkformen, welche in Rechtecke vom betreffenden Seitenverhältnis nach Art der Abb. 140 $\left(\frac{b}{t} = 2\right)$ eingezeichnet wurden, entnommen. Dazu sind die an Rechtecken selbst gewonnenen Punkte eingetragen. Man wählt am besten denjenigen Leitwerkumriß in Abb. 140 (S. 208) aus, welcher dem gewünschten am meisten ähnelt, und reduziert den Koeffizienten mit Hilfe der Abb. 227 auf das richtige Seitenverhältnis. Zur Interpolation ist vielleicht die gestrichelte Kurve brauchbar. Man sieht, daß der Einfluß des Seitenverhältnisses bedeutender ist wie der des Umrisses, daß ein breites Leitwerk stets wirkungsvoller ist als ein schmales. Die in Deutschland lange üblichen schmalen Formen mit verschiedensten Umrissen sind alle der einfachen breiten Form unterlegen. Man findet für die schmale Form gelegentlich angeführt, daß sie bis zu höheren Anstellwinkeln benutzbar sei, das Maximum des Auftriebs bei ungleich höheren Anstellwinkeln liege wie bei breiten Umrissen, während der Widerstand in diesem Falle nicht in Frage komme. Für den normalen Flugzeugtypus ist dieser Grund jedenfalls nicht stichhaltig, da der Anstellwinkelbereich, in welchem das Leitwerk arbeitet, stets klein ist.

Um nun — wie es für das Momentendiagramm des Flugzeugs notwendig ist — vom Anstellwinkel α_H des Leitwerks zum Anstellwinkel α der Flügel überzugehen,

[1]) Die Modellmessungen beziehen sich nur auf die Umrißformen der Leitwerke ohne Berücksichtigung der unsymmetrischen Anordnung, die z. B. bei den Ru-Leitwerken nicht unbedeutend ist.

muß man zuerst die feste Einstellung der Flosse gegenüber den Flügeln berücksichtigen. In der Regel steht die Flosse um $\sigma = 2-4^0$ flacher gegen die Motorachse geneigt als die Flügel. Dies bedeutet, solange der Abwind nicht berücksichtigt ist, nur eine Umbenennung der Anstellwinkel. Es wird $c_{nH} = \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}(\alpha - \sigma)$. In Abb. 228 stellt die Gerade durch den Nullpunkt den Beiwert c_{nH} für ein Leitwerk von der Form Ru C III ohne Ruderausschlag dar. Ist nun $\sigma = 3^0$, so wird die Gerade im Diagramm mit Abszisse α einfach um 3^0 nach rechts verschoben.

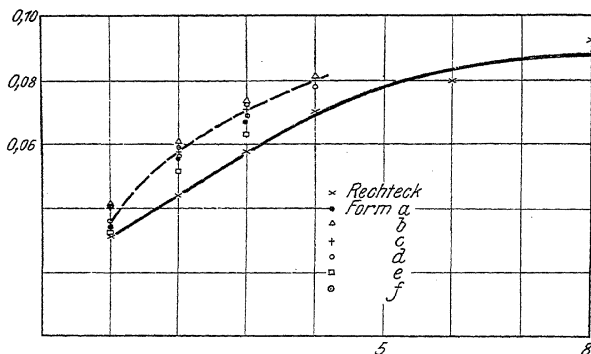



Abb. 227. Umrechnung der Leitwerkskraft auf verschiedene Seitenverhältnisse.

Der Abwind wird nun am besten nach Formel (14) und (15) berücksichtigt; die Neigung der Leitwerksgeraden mit Abwind wird

$$\frac{\partial \overset{\times}{c}_{nH}}{\partial \alpha} = \left(1 + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}.$$

Hierbei setzt man als gute Mittelwerte bei Eindeckern

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 0{,}73 \quad b \quad 2l$$

und bei Doppeldeckern

$$\partial \alpha = 0{,}62 \left\{ t_0 \quad 1 + \left| \ 1 \quad 2l \quad b_u \quad 1 \quad 2l \right\} \right. \quad . \ . \ . \ (28)$$

In Anbetracht der Unsicherheit der ganzen Abwindverhältnisse wird man wohl auch keinen zu großen Fehler machen, wenn man bei Doppeldeckern den Mittelwert

$$\frac{\partial \overset{\times}{c}_{nH}}{\partial \alpha} = 0{,}54 \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H} \qquad (29)$$

setzt. Dieser ist aus einem reichen Material gewonnen, bei welchem als äußerste Werte 0,60 und 0,40 für den Koeffizienten vorkamen. Die Neigung der Leitwerksgeraden ist somit festgelegt; die Gerade wird vollständig dadurch bestimmt, daß beim Auftrieb Null der Flügel der Abwind wegfallen und daher der Wert ohne Abwind richtig sein muß. In der Abb. 228 ist dies für $\alpha = -4{,}5^0$ angenommen und die Neigung nach (29) bestimmt.

Man erkennt an Abb. 228 ohne weiteres, daß man die Abwindkorrektion erst nach Berücksichtigung der Schränkung σ anbringen muß; denn die Parallelverschiebung der Linie mit Abwind ohne Schränkung müßte nicht $= \sigma$, sondern größer sein. Die Wirkung einer Flossenverstellung wird durch den Abwind der Flügel erheblich vergrößert.

Ist ein Ruderausschlag vorhanden, so ändert sich die Neigung der Leitwerks-

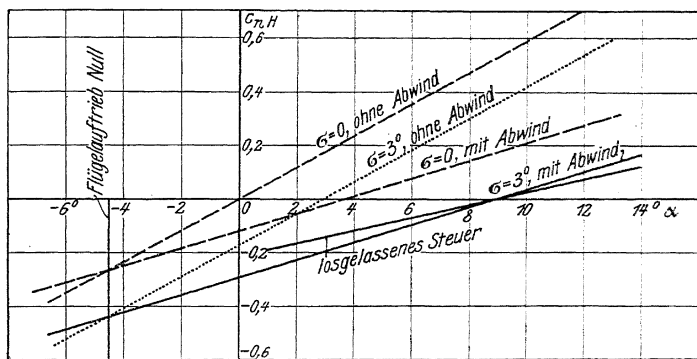



Abb. 228. Berechnung des Leitwerkmomentes.

geraden sehr wenig; im wesentlichen wirkt ein Ruderausschlag wie eine Flossenverstellung oder wie der Ausschlag eines Ruders ohne Flosse; es wird der Anstellwinkel, für welchen das Moment Null wird, verschoben. Die Größe der Verschiebung bei bestimmtem Ruderausschlag hängt natürlich vom Verhältnis der Ruderfläche R zur gesamten Leitwerkfläche F_H ab. Abb. 229 zeigt die Verschiebung bei einem Ruderausschlag von 10° für verschiedene $\frac{R}{F_H}$. Diese Angaben beziehen sich auf unausgeglichene Leitwerke. Die Wirkung von Ausgleichklappen besteht wesentlich in der Herabminderung des Steuermoments, spielt also für das hier behandelte Problem keine Rolle.

Für die Verschiebung der Leitwerksgeraden infolge Ruderausschlags gilt dasselbe wie für die Verschiebung infolge Schränkung; sie muß in der Rechnung vor Anbringung der Abwindkorrektion berücksichtigt werden. Die Wirkung eines Ruderausschlags, wenn sie durch diese Verschiebung und nicht durch das erzeugte Moment gemessen wird, erhöht sich gleichfalls durch den Abwind.

Wichtig kann noch das Moment des Leitwerks bei losgelassenem Steuer sein. Dann wirkt um die Ruderachse kein Steuermoment. Die Gerade des Leitwerksmoments muß in diesem Fall durch den Schnittpunkt der Leitwerksgeraden mit der Abszisse bei Berücksichtigung von Schränkung und Abwind hindurchgehen (Abb. 228); denn wenn das symmetrisch gestaltete Leitwerk ohne Ruderausschlag völlig entlastet ist, muß aus Symmetriegründen das Steuermoment Null sein. Um die Gerade ganz festzulegen, müssen wir also nur noch ihre Neigung kennen. Da der Abwind in gleicher Weise den Anstellwinkel des Leitwerks bei festgehaltenem und losgelassenem Steuer herabsetzt, kann man die Meßergebnisse ohne Abwind einfach übertragen. Aus den Göttinger Messungen an einem rechteckigen Leitwerk vom Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = \frac{1}{3}$ folgt das Verhältnis $\varkappa$ der Werte von $\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha}$ bei festgehaltenem und losgelassenem Ruder in Abhängigkeit von $\frac{R}{F_H}$, wie es Abb. 230 angibt. Mangels anderer Messungen wird man dies Verhältnis auch auf andere Leitwerke übertragen.

Abb. 229.
Wirkung eines Ruderausschlags.

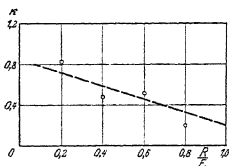



Abb. 230.
Losgelassenes Steuer.

Bei eingehender numerischer Diskussion muß man noch die Momente anderer Teile als der Flügel und Flossen berücksichtigen; doch werden diese nur selten von Einfluß sein. Die schädlichen Widerstände wirken unsystematisch, dagegen übt die Luftschraube eine nicht unbedeutende Kraft in bestimmter, nicht immer durch den Schwerpunkt geführter Richtung aus. Der Schraubenzug geht bei Landflugzeugen meist etwas unter dem Schwerpunkt durch, erzeugt also ein schwanzlastiges Moment. Diesem Umstand wird es oft zugeschrieben, daß Flugzeuge, welche im Motorflug normal fliegen, im Gleitflug Kopflastigkeit aufweisen. Die numerische Berechnung führt aber wohl in den meisten Fällen von dieser Anschauung ab. Bei einem kleinen Flugzeug, wie es unserem numerischen Beispiel in der Abb. 226 entspricht, beträgt der Schraubenschub am Boden etwa 270 kg; im Falle des steilen Anstiegs mag der Staudruck auf etwa 50 kg/m² veranschlagt werden; der Hebelarm des Schraubenzugs um den Schwerpunkt beträgt nicht leicht mehr wie 10 cm. In diesem Fall wird die in dem Diagramm maßgebende Größe

$$\frac{\text{Moment des Schraubenzuges}}{\text{Staudruck}} = -\frac{270 \cdot 0,1}{50} = -0,52\ \text{m}^3$$

Diese Größe kann im Ausgleich der Momente keine entscheidende Rolle spielen. Wenn die Schraube bei einem Anstellwinkel ausfällt, bei welchem nicht gerade das Leitwerk entlastet ist, so ist die Wirkung infolge Aufhörens des Schraubenstrahls

eine weit bedeutendere. In Abb. 231 wird z. B. beim Anstellwinkel 8° der Unterschied des Leitwerkmoments für die Staudruckeinheit mit und ohne Schraubenstrahl auf etwa 1,5 m³ veranschlagt werden können, also viel ausschlaggebender sein als das Moment des Schraubenzugs. Dabei ist die Wirkung des Schraubenstrahls auf das Leitwerk noch sehr niedrig eingeschätzt. Tritt im Gleitflug Kopflastigkeit auf, so ist sie meist dadurch verursacht, daß der Schwerpunkt (entgegengesetzt zu dem Falle der Abb. 226) zu weit vorn liegt, also bei den gewöhnlichen Flugwinkeln das Leitwerk Abtrieb haben muß; ist dieser Abtrieb im Motorflug richtig, so wird er im Gleitflug viel zu klein. Auf die Stabilität hat das Moment des Schraubenzugs, da es vom Anstellwinkel nicht unmittelbar abhängt, keinen Einfluß. Bei Seeflugzeugen ist das Moment des Schraubenzuges meist kopflastig und wesentlich größer als bei Landflugzeugen; ein nennenswerter Einfluß auf die Stabilität ist trotzdem kaum vorhanden.

Auch das Moment von Rumpf und Schwimmern wird man berücksichtigen, wenn man ein Flugzeug gründlich durchrechnet; einen entscheidenden Einfluß werden aber beim normalen Flugzeugtyp auch diese Teile nicht haben. Aus den Kurven des I. Teils, Kap. VI sind mittlere Werte für das Moment von Schwimmern und für das Moment eines Rumpfes in das Diagramm der Momente von Flügeln und Leitwerk eingetragen (Abb. 231). Eine Verschiebung des Schwerpunkts nach hinten um 2 cm, wie sie infolge Brennstoffverbrauchs od. dgl. gar nicht zu vermeiden ist, wirkt schon ebenso stark wie Schwimmer und Rumpf. Der dabei eingesetzte Wert für das Rumpfmoment ist aus Modellversuchen entnommen, bei welchen der Rumpf zwischen Flügeln angebracht und für sich gemessen wurde; der an einem für sich stehenden Rumpf gemessene Wert ist wesentlich anders. Der Schwerpunkt des Rumpfes ist in 0,229facher Rumpflänge von der Vorderkante entfernt angenommen; die Länge ist gleich 6,20 m, die Breite gleich 0,85 m gesetzt. Die Schwimmer sind 2,5 m lang angenommen, der Schwerpunkt in ihrer Mitte; liegt er noch weiter vorn, so kann das Schwimmermoment noch erheblich, bis zur vollen Bedeutungslosigkeit herabgedrückt werden. Die Tieflage ist auch hier fast ohne Einfluß.

Abb. 231. Momentendiagramm eines Flugzeugs.

Nun sollen noch einige Beispiele von Momentendiagrammen hervorgehoben werden: Wir sahen schon, daß Kopflastigkeit im Gleitflug in der Regel nicht dem Moment der Schraube, sondern der Schwerpunktlage zugeschrieben werden muß (Abb. 232a). Bei einem gut ausgeglichenem, stabilen Flugzeug sollte man im Gleitflug, da hierbei kleinere Anstellwinkel als im Motorflug benutzt werden, eher eine gewisse Schwanzlastigkeit bemerken. Wird die Kopflastigkeit im Motorflug

störender als im Gleitflug, so i ... :scheinlich die Flosse zu stark eingestellt;
... ·cht die ... ıer zu starken Rücklage des Schwerpunkts
die Dur

Ausgleich. Durch ...
... ıug vom Momentendiagramm Abb. 232c verbessern. Man verstellt in der Praxis allerdings nicht das Leitwerk, sondern stellt die Flügel mit Hilfe der Verspannung anders ein. Die Diagramme Abb. 232a, b kann man ändern durch Veränderung der Flügelschränkung bei stark gestaffelten Flugzeugen, durch Verschiebung der Flügel gegen den Schwerpunkt oder, was

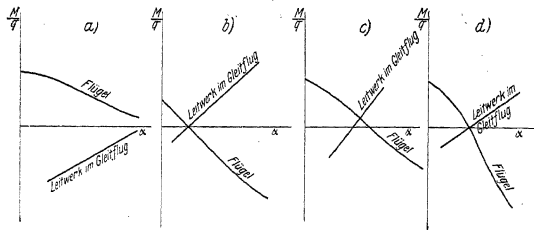



Abb. 232. Schematische Momentendiagramme.

	a)	b)	c)	d)
Fehler:	Schwanzlastigkeit im Motorflug.	Kopflastigkeit im Motorflug.	Kopflastigkeit in Motor- und Gleitflug.	Instabilität.
Abhilfe:	Rücklegung des Schwerpunkts.	Vorlegung des Schwerpunkts.	Flachere Einstellung der Flosse.	Vergrößerung des Leitwerkmomentes.

damit äquivalent ist, durch Änderung der Pfeilstellung. Eine wirksame Änderung der Schwerpunktstieflage ist konstruktiv viel schwerer zu bewerkstelligen. Abb. 232d zeigt ein instabiles Flugzeug; hier hilft nur Vergrößern des Leitwerks oder der Rumpflänge.

Schließlich sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, die Momentengrößen im Fluge zu messen. Heidelberg hat in ein Flugzeug hinten am Leitwerk einen Behälter eingebaut, in welchen man vom Beobachtersitz aus Wasser hineinpumpen konnte. Diese Gewichtsverschiebung erzeugt ein Zusatzmoment von bekannter Größe, welches durch Ruderausschlag ausgeglichen werden muß; dadurch mißt man also unmittelbar die Wirkung eines Ruderausschlags. Auf dieselbe Weise kann man die Momentenwirkung jeder anderen Veränderung im Flugzeug — natürlich immer unter gegebenen äußeren Verhältnissen — messen; Heidelberg hat die Methode selbst angewandt, um die Wirkung der Verspannung quantitativ verfolgen zu können. Schwerer wiegende Eingriffe werden auf diese Weise nur bis zu einem gewissen Grad gemessen werden können, da der Flug mit einem allzu schlecht

ausgeglichenen Flugzeug große Gefahren birgt. Aber eine wichtige Größe ist mit dieser Methode wohl zu fassen, nämlich die statische Stabilität, für welche der Absolutwert des Moments von vornherein keine Rolle spielt, sondern nur seine Veränderung unter gewissen Verhältnissen. Man muß nur noch den Anstellwinkel mit Hilfe einer Windfahne oder einer ähnlichen Vorrichtung messen. Bezeichnen wir mit M_α das Moment der Flügel beim Anstellwinkel α, mit $m_{\alpha\vartheta}$ das Moment des Leitwerks beim Anstellwinkel α und dem Ruderausschlag ϑ und wählen wir den Nullpunkt so, daß etwa $M_3 + m_{33} = 0$, so erhalten wir durch Messung etwa das Zusatzmoment $\mu = M_3 + m_{36}$ und ebenso alle Ruderstellungen ϑ, die zu anderen Anstellwinkeln α und demselben Zusatzmoment μ gehören. Geben wir nun μ verschiedene Werte, und ist etwa

so erkennen wir aus dem Vergleich der beiden Werte μ und μ_1, wie sich bei der festgehaltenen Ruderstellung $\sigma = 6^0$ das Gesamtmoment $M + m$ bei Änderung des Anstellwinkels von 3^0 auf 6^0 verändert hat. Diese Änderung ist aber gerade die statische Stabilität.

Man könnte vielleicht auch dahin gelangen, die Größen $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial m}{\partial \alpha}$ zu trennen, wenn man die Versuche mit einem Flugzeug ohne feste Flosse anstellen könnte, weil dann m nur von einem einzigen Parameter abhängt; allerdings ist dabei eine theoretische Abwindkorrektur nötig; doch könnte schließlich auch der Anstellwinkel des Leitwerks unmittelbar gemessen werden. Ob freilich solche Versuche bei Flugzeugen ohne feste Flosse nicht zu gefährlich sind, wissen wir nicht.

III. Kapitel.

Die gestörte und beschleunigte Längsbewegung des Flugzeugs.

§ 1. Probleme.

Die wissenschaftliche Durchdringung eines technischen Gebietes vollzieht sich in zwei Schritten: erst muß die Theorie die Begriffe klären und herausarbeiten, welche Größen für den geplanten Zweck maßgebend sind; dann muß das Experiment die numerischen Werte dieser Größen mit der nötigen Genauigkeit feststellen. Soweit wir in den vorigen Kapiteln technische Fragen diskutierten, konnten wir den ersten Schritt als getan ansehen; die begriffliche Klärung war in der Regel einfach und befriedigend, die noch vorhandenen Schwierigkeiten lagen in der Ungenauigkeit der numerischen Angaben, welche unseren heutigen Kenntnissen zugrunde liegen; die weitere Aufgabe der Wissenschaft kann nur in einer Erweiterung und präziseren Feststellung der nötigen Zahlwerte liegen. Wenn wir nun die Theorie der stationären Längsbewegung verlassen und uns der Untersuchung allgemeiner Flugzeugbewegung zuwenden, müssen wir in ganz anderer Weise an die Probleme herangehen. Der erste Schritt zur Lösung ist durchaus nicht vollführt, ist auch nicht so einfach wie bei den früheren Fragen. Die Klarstellung der grundsätzlichen Beziehungen, die Hervorhebung der Art, Wichtigkeit und

qualitativen Wirkung der einzelnen Größen wird zur Hauptsache; die feine numerische Durcharbeitung kann heute noch nicht gegeben werden, und es ist auch gar nicht vorherzusagen, ob diese je zu derselben Bedeutung gelangen kann wie bei Behandlung der stationären Bewegung. Die quantitative Durchrechnung und Bemessung von Flugzeugen vollzieht sich heute lediglich nach den Darlegungen der vorigen Kapitel, und in dieser Hinsicht wird auch wohl die nächste Zukunft keine Änderung bringen. Die praktische Aufgabe der tiefergehenden Untersuchungen, in die wir jetzt eintreten, liegt vielmehr darin, für den Entwurf qualitativ festzulegen, welche Grundsätze von verschiedenen Zwecken gefordert werden, welche Folgen einzelne Veränderungen für das Verhalten des Flugzeugs in normalen und abnormen Fällen mit sich bringen, welches Verhalten in den verschiedenen Fällen erstrebenswert ist, wie in gewissen Fällen qualitative Verbesserung zu erreichen ist. Die folgenden Untersuchungen sind daher nicht so beschaffen, daß sie bei der Berechnung jedes einzelnen Flugzeugs herangezogen werden und daher jedem Flugzeugbauer geläufig werden müssen, wohl aber werden sie maßgebend für die allgemeinen Richtlinien des Flugzeugbaues sein. Die Flugwissenschaft steckt in den Anfängen; so wenig heute wirklich eine systematische numerische Durchrechnung des einzelnen Flugzeugs allgemein eingeführt ist, so wenig sind auch die theoretischen Untersuchungen an die Stelle recht unsicherer Erfahrungen getreten. Die Vertiefung und Erweiterung der theoretischen Einsichten in die Bewegung des Flugzeugs ist daher für die nächste Zukunft der Flugtechnik von größter Wichtigkeit.

Viele fundamentale Fragen können durch Berechnungen des stationären Flugs nie geklärt werden; dazu gehören in erster Linie alle Fragen der Stabilität und der Steuerung, der Sicherheit, Geschmeidigkeit, Wendigkeit des Flugzeugs in all seinen Bewegungen; ferner die für jede statische Berechnung wichtige Frage nach der Beanspruchung des Flugzeugs in verschiedenen Zuständen. Die Beanspruchung ist ja im stationären Fall klein; im wesentlichen hat dabei das Flugzeug gerade sein Gewicht zu tragen; aber bei beschleunigter Bewegung treten Trägheitskräfte, insonderheit Fliehkräfte auf, deren Größe das Flugzeuggewicht weit überwiegen kann und deren Kenntnis für die Festigkeitsanforderungen maßgebend sein muß. Man hat alle diese Fragen bisher gelöst, indem man gesicherte wissenschaftliche Ergebnisse, die sich auf den stationären Flug beziehen, an der Hand der Erfahrung und unter Einführung von Koeffizienten möglichst sachgemäß übertragen oder sich im Einzelfall auf das Urteil des Flugzeugführers verlassen hat. Zum wissenschaftlichen Kulturgebiet kann dieser ganze Komplex von Problemen nur werden, wenn die gestörte und beschleunigte Bewegung eingehend theoretisch studiert wird. Im allgemeinen dürften die heute bekannten Erfahrungswerte über die Luftkräfte ausreichen, um bis zur theoretischen Klärung der Begriffe durchdringen zu können. Diese wird ihrerseits den Weg für die weitere experimentelle Erforschung weisen; nur die Entwicklung der Technik kann festsetzen, welche Genauigkeit der Messungen nötig ist.

Unsere bisherigen Betrachtungen haben schon einmal über den Rahmen der stationären Bewegung im eigentlichen Sinne hinausgewiesen, nämlich bei Anschneidung der Stabilitätsfrage; wir gelangten zu einem Begriff der „statischen

Stabilität". Bei der großen Bedeutung der Sicherheitsfrage in der Flugtechnik ist die numerische Berechnung dieser Größe und die Beachtung derselben beim Flugzeugentwurf praktisch von größtem Wert; aber weder das praktische noch das theoretische Bedürfnis ist durch diese Behandlung der Stabilitätsfrage befriedigt; die Frage muß mit den Mitteln der Mechanik nichtstationärer Systeme in Angriff genommen werden. In der Tat ist die Stabilitätsuntersuchung bis vor kurzer Zeit das hauptsächlichste, wenn nicht einzige Anwendungsgebiet der Theorie nichtstationärer Flugzeugbewegung gewesen. Ehe wir zur Darlegung dieser Stabilitätstheorie schreiten, wollen wir noch die begriffliche Unsicherheit der statischen Stabilitätsbetrachtung hervorheben.

Der Gedankengang war folgender: Ein Flugzeug wird aus seiner Lage zu seiner Bahn herausgedreht, seine Lage im Raum also geändert, während die Flugbahn erhalten bleibt; dann muß, wenn Stabilität vorhanden sein soll, ein Moment auftreten, welches das Flugzeug in seine ursprüngliche Lage im Raum zurückdreht. Diese Betrachtung knüpft also nur an eine der drei Gleichgewichtsbedingungen, nämlich an die Momentengleichung, an und hebt nur eine der drei Variablen, nämlich die Lage des Flugzeugs im Raum, hervor, während die Richtung der Flugbahn und die Geschwindigkeit gar nicht beachtet werden; man muß sich vielmehr vorstellen, daß diese von selbst solche Werte annehmen, welche die beiden ebenfalls nicht beachteten Kraftgleichungen befriedigen. Dies ist offenbar eine sehr willkürliche Beschränkung im Gedankengang; es ist durchaus nicht einzusehen, warum gerade das Gleichgewicht der Momente bei der Stabilitätsbetrachtung ausgezeichnet werden muß.

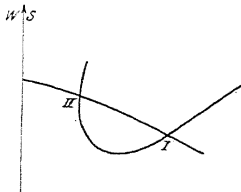



Abb. 233. Stabilitätsbetrachtung nach Painlevé.

In der Tat steht der Stabilitätsbetrachtung des Momentengleichgewichts eine andere, von Painlevé herrührende an der Seite, welche ganz analog an die Gleichgewichtsbedingung der Bahnkräfte anknüpft, und zwar in der Darstellung der Abb. 195. Bei Konstruktion der Abb. 233 ist angenommen, daß das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte im Horizontalflug von selbst hergestellt sei; das Flugzeug fliege immer mit einem solchen Anstellwinkel, daß Gewicht und Auftrieb einander gleich seien. Dann gibt es zwei Gleichgewichtszustände I und II. Nun befinde sich das Flugzeug in stationärem Fluge im Gleichgewichtszustand I und werde durch eine Störung ein wenig daraus entfernt, z. B. werde die Geschwindigkeit erhöht; dann wird, wie man aus der Abbildung ersieht, der Widerstand W des Flugzeugs erhöht, der Schraubenschub S verkleinert; infolgedessen entsteht eine verzögernde Kraft in der Bahnrichtung, durch welche die Geschwindigkeit wieder auf ihren ursprünglichen Gleichgewichtswert herabgedrückt wird. Der Gleichgewichtszustand ist also stabil. Wird dagegen bei einem Flugzeug im Flugzustand II die Geschwindigkeit vermehrt, so wird der Schraubenschub größer als der Widerstand; es entsteht eine beschleunigende Kraft in der Bahn-

richtung, das Flugzeug verläßt den Zustand II, um sich dem Zustand I zu nähern; der Zustand II ist also instabil. Dies scheint der Erfahrung zu entsprechen; der Flug mit kleiner Geschwindigkeit, der „überzogene“ Flug ist als unsicher bekannt; von den beiden Möglichkeiten horizontal zu fliegen, ist nur der schnelle Flug praktisch verwendbar. Dieser Gedankengang ist völlig analog demjenigen, welcher unserer Betrachtung der statischen Stabilität zugrunde lag. Hier ist an Stelle der Momentengleichung die Gleichung der Bahnkräfte ausgezeichnet, an Stelle der Lage des Flugzeugs im Raum die Geschwindigkeit. Von der Lage im Raum und der Flugbahnrichtung ist angenommen, daß sie durch Erfülltsein der zwei nicht beachteten Gleichungen bestimmt sind.

Eine ähnliche Betrachtung könnte man schließlich auch an die Gleichung der bahnsenkrechten Kräfte und die Variable der Flugbahnrichtung anknüpfen; ein derartiger Gedankengang existiert aber in der Literatur nicht; er führt zu Schlüssen, die sich zum Teil mit den obigen decken, zum Teil aber auch von der Erfahrung keineswegs gestützt sind. Aus unseren Betrachtungen der stationären Bewegung ist aber nicht einzusehen, warum der erste Gedankengang besser als der Painlevésche oder der letzterwähnte sein sollte. Um darüber zur Klarheit zu gelangen, muß eine allgemeinere Überlegung einsetzen, bei welcher alle drei Variablen als veränderlich angesehen und alle drei Gleichungen mit ihren Beschleunigungsgliedern berücksichtigt werden. Diese Überlegung, welche allein stichhaltig ist, wird zeigen, daß der gewöhnlichen statischen Stabilitätsbetrachtung ein Sinn innewohnt, daß dagegen der Painlevésche Gedankengang und verwandte Betrachtungen von unhaltbaren Voraussetzungen ausgehen und daher zu unhaltbaren Folgerungen führen.

§ 2. Die allgemeinen Gleichungen der Längsbewegung.

Kraftgleichungen: Wir müssen an die Gleichungen (1) bis (4) des I. Kapitels anknüpfen und dieselben durch die Beschleunigungsglieder erweitern. In der Flugrichtung wirkt eine Komponente der Schraubenkraft, entgegen der Flugrichtung beim Anstieg eine Schwerkraftkomponente und der Widerstand. Halten diese Kräfte sich nicht das Gleichgewicht, so entsteht eine Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$, welche, da $\frac{G}{g}$ die Masse des Flugzeugs ausdrückt, durch die Gleichung gegeben ist:

$$\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} = S\cos\beta - G\sin\varphi - c_w \frac{\gamma}{2g} v^2 \qquad \text{(1)}$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie früher und auch aus Abb. 234a und b ersichtlich. Der Schraubenschub hängt von der Geschwindigkeit ab; man muß wieder irgend ein empirisches Gesetz für diese Abhängigkeit einführen, und zwar empfiehlt es sich am meisten, hier wie in Gleichung (14) S. 262 einfach eine lineare Funktion von v^2 zu wählen und den Gültigkeitsbereich von vornherein zu beschränken. Durch die Vereinigung der Größe σ mit c_w bleibt nur S_0 (das wieder nicht etwa dem Schraubenschub im Stand gleichgesetzt werden darf) als Konstante in der Gleichung stehen und die Gleichung bleibt analytisch einfach. Daß

die Zahlenwerte von S_0 und σ nur sehr ungenau bekannt sind, kann uns hier aus den Gesichtspunkten des § 1 heraus wenig stören; zudem tritt, wie sich zeigen wird, die Bedeutung dieser Gleichung, welche die unsichersten Größen enthält, in den meisten Betrachtungen des nicht stationären Flugs entschieden hinter der Bedeutung der anderen Gleichungen zurück.

Senkrecht zur Flugrichtung („bahnsenkrecht") gibt es keine Geschwindigkeitsänderung; die Trägheitswirkung kommt als Fliehkraft zur Geltung mit der Größe $\frac{G}{g}\frac{v^2}{r}$, wenn r den Krümmungsradius der Bahn bedeutet. Die Größe r will man natürlich nicht in der Gleichung stehen haben; Abb. 234b zeigt die Beziehung $\frac{v\,d\,t}{r} = d\,\varphi$, so daß die wichtige Variable φ an dieser Stelle hereinkommt. In der positiven Richtung wirken senkrecht zur Bahn der Auftrieb und eine Komponente der Schraubenkraft, in der negativen Richtung die Gewichtskomponente. Ist $\frac{d\varphi}{d\,t}$ positiv, steigt also die Bahn an, so wirkt die Fliehkraft in der negativen Richtung; sie tritt also in die Gleichung mit der Größe $-\frac{G}{g}\,v\,\frac{d\varphi}{d\,t}$ ein, und die Gleichung lautet:

Abb. 234. Bezeichnungen.

$$O = -\frac{G}{g}\,v\,\frac{d\varphi}{d\,t} + S\sin\beta - G\cos\varphi + c_a\,F\,\frac{\gamma\,v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Die Momentengleichung schließlich ist zu vervollständigen durch das Trägheitsglied der Drehbewegung. Die Winkelbeschleunigung im Raum ist $\frac{d^2\vartheta}{d\,t^2}$, das Trägheitsmoment $J = k^2\,\frac{G}{g}$, wenn k den Trägheitsradius des Flugzeugs bedeutet. Wegen des Vorzeichens müssen wir bedenken, daß wir ϑ entgegen dem Uhrzeigersinn in der Abbildung wachsen lassen, aber kopflastige Momente, welche in der Abbildung im Uhrzeigersinn wirken, als positiv gerechnet haben. Die Momentengleichung muß daher lauten:

$$J\,\frac{d^2\vartheta}{d\,t^2} = \frac{G}{g}\,k^2\,\frac{d^2\vartheta}{d\,t^2} = -M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

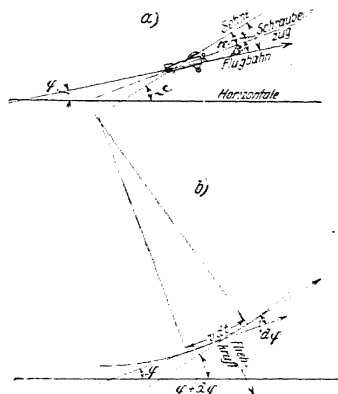
Das Moment M hängt wie früher vom Anstellwinkel, von der Geschwindigkeit und vom Ruderausschlag ab; aber es kommt hier noch eine Einwirkung in Betracht, die bei der stationären Bewegung nicht vorhanden ist, nämlich ein dämpfendes Moment infolge der Drehung des Flugzeugs im Raum. Im gleichmäßigen Geradeausflug sind für die Luftkräfte nur Anstellwinkel und Größe der Geschwindigkeit

oder — eine Darstellung, die von Bryan und seinen Schülern bevorzugt wird — die zwei Geschwindigkeitskomponenten der Schwerpunktbewegung in einem flugzeugfesten Koordinatensystem maßgebend. Dabei ist Voraussetzung, daß alle Flugzeugteile parallele gleich große Bewegungen ausführen, daß also Anstellwinkel und Geschwindigkeit, wenn für einen Teil des Flugzeugs gegeben, ohne weiteres für alle Teile zu berechnen sind, da sie in eindeutigem Zusammenhang stehen; daß sie nicht notwendig dieselbe Größe für alle Teile haben müssen, zeigt das Beispiel des Abwinds. Bei der nichtstationären Bewegung ist aber der Zusammenhang kein zwangläufiger mehr. Wenn das Flugzeug sich nicht nur wie ein materieller Punkt bewegt, sondern sich auch noch um seinen Schwerpunkt dreht, so ist klar, daß durch diese Drehung die Luftkräfte auf die einzelnen Flugzeugteile beeinflußt werden müssen. Die Zusatzbewegung irgendeines Flugzeugteiles verläuft im allgemeinen unter einem beliebigen Winkel gegen die Richtung der Schwerpunktbewegung; die Komponente der Zusatzbewegung, welche in diese Richtung fällt, verändert die Geschwindigkeit, die Komponente senkrecht dazu den Anstellwinkel. Nun ist diese Zusatzbewegung offenbar um so größer, je größer der Dreharm, also je größer der Abstand des betr. Flugzeugteils vom Schwerpunkt ist; daher kann als wesentlich nur eine Wirkung auf das Leitwerk in Betracht kommen. Da ferner die Verbindungslinie des Leitwerks mit dem Schwerpunkt ungefähr in die Richtung der Schwerpunktbewegung fällt, erhält das Leitwerk durch seine Drehung um den Schwerpunkt eine Zusatzgeschwindigkeit fast nur in Richtung senkrecht zur Schwerpunktbewegung. Dies bedeutet also — wie aus Abb. 235 zu ersehen — eine Änderung des Leitwerksanstellwinkels α_H infolge der Drehung. Die Zusatzbewegung ist gleich Dreharm $l \times$ Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$; sie setzt sich mit der Geschwindigkeit v des Schwerpunkts vektoriell zusammen zur resultierenden Geschwindigkeit V des Leitwerks, welche, da $l\frac{d\vartheta}{dt}$ stets klein gegen v bleibt, der Größe nach sich von v nicht wesentlich unterscheidet, aber einen Winkel

Abb. 235. Dämpfungsmoment.

$$\Delta\alpha_H = \frac{l\frac{d\vartheta}{dt}}{v}$$

mit der Richtung der Schwerpunktbewegung einschließt; der Leitwerksanstellwinkel wird um diesen Betrag erhöht, wenn $\frac{d\vartheta}{dt}$ positiv ist, wenn also die Flugzeugspitze sich nach oben dreht.

Entwickeln wir das Flugzeugmoment nach der kleinen Größe dt so wird

$$M = M_1 + \frac{\partial M_H}{\partial \alpha_H}\frac{l\frac{d\vartheta}{dt}}{v}.$$

Nun können wir die Abhängigkeit von v herausheben; denn sowohl der Momentenwert bei stationärem Flug M_1, wie auch M_H sind v^2 proportional; setzen wir

$$M_1 = m v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

so hängt m noch vom Anstellwinkel α und von der Ruderlage ab, welche durch einen später noch genauer zu definierenden Parameter s beschrieben werde. Der Faktor $\frac{d M_H}{\,}$ wird

$$\partial M_H \qquad c_{nH} \frac{\gamma}{2g} v^2 F_H l.$$

Hierbei tritt der Differentialquotient $\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H}$ auf, nicht $\frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha}$, wie bei unseren Berechnungen der statischen Stabilität. Es kommt auf die Abhängigkeit des Momentes vom wirklichen Leitwerkanstellwinkel, nicht vom Flügelanstellwinkel an. Der Abwind bleibt hierbei vollkommen außerhalb der Überlegung. Führen wir die Abkürzung ein

$$n = \frac{\partial c_{nH}}{\partial \alpha_H} \frac{\gamma}{2g} F_H l^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so erhält (3) die Gestalt, in welcher wir die Gleichung stets verwenden wollen:

Die Größe n ist stets positiv und vom Anstellwinkel im gewöhnlichen Flugbereich so gut wie unabhängig.

Die physikalische Grundtatsache, welche der ganzen Längsbewegung ihr Gepräge gibt, drückt sich darin aus, daß in Gleichung (2) der Winkel ϑ, in Gleichung (6) der Winkel φ nicht vorkommt. Die Richtung der Flugbahn wird nur durch den Ausgleich der Kräfte festgelegt und geändert, die Lage des Flugzeugs im Raum nur durch die Momente. Unter dem Einfluß der bahnsenkrechten Kräfte dreht sich die Flugbahn, unter dem Einfluß der Momente das Flugzeug. Die Verbindung der beiden Einwirkungen wird dadurch hergestellt, daß die Luftkräfte weder von ϑ noch von φ, sondern nur vom Anstellwinkel

$$\alpha = \vartheta - \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

abhängen. Diese Gleichung (7) tritt noch zu den Gleichung (1), (2) und (6) für die vier Unbekannten v, ϑ, φ, α hinzu. Der Einfluß der willkürlichen Steuerung, den der Parameter s beschreibt, macht sich nur in der Momentengleichung geltend. Durch das Steuer dreht man nur das Flugzeug herum; erst mittelbar wird durch diese Drehung der Anstellwinkel verändert, das Kräftegleichgewicht gestört und so eine Drehung der Flugbahn herbeigeführt.

Streng genommen machen sich die Wirkungen sowohl des Steuerausschlags (s) als auch der Flugzeugdrehung $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ nicht nur in der Momentengleichung, sondern auch in den Kraftgleichungen geltend, so daß eigentlich auch in den Gleichungen (1) und (2) die Größen c_a und c_w als von s und $\frac{d\vartheta}{dt}$ abhängig angesehen werden müßten.

Aber diese Abhängigkeit zeigt sich nur in den Teilkräften, welche vom Leitwerk herrühren, und da diese ohnehin — im Gegensatz zu den Momenten — sehr klein gegen die Tragwerkskräfte sind, ist die Vernachlässigung ganz belanglos.

§ 3. Aufstellung der Stabilitätsgleichung.

Die Gleichungen der allgemeinen Längsbewegung sind mathematisch recht schwierig; sie enthalten die Unbekannten in komplizierter, zum Teil nur empirisch gegebener Form, sind daher im allgemeinen nicht einfach lösbar; die Unbekannten lassen sich nicht explizit durch einfache bekannte Funktionen ausdrücken. Diese Schwierigkeit läßt sich überwinden, wenn man nur nach der Stabilität des Fluges fragt; in diesem Falle führt die konsequente Durchführung des Gedankengangs, den wir oben für spezielle Fälle kennen gelernt hatten, zur Methode der kleinen Schwingungen, welche von Bryan zuerst auf dieses Problem angewandt worden ist. Wieder wird wie früher das Flugzeug in einem Zustand betrachtet, der nur unendlich wenig von einem Gleichgewichtszustand, d. i. von einem Zustand stationären Geradeausflugs abweicht. Nur nehmen wir jetzt nicht willkürlich nur eine der Variablen als veränderlich an, wie früher den Winkel α, sondern lassen eine kleine Veränderung aller Variablen zu. Dann können wir aber auch nicht mehr die Stabilität nach der Richtung einer auftretenden Kraft oder eines auftretenden Momentes allein beurteilen, uns also nicht mehr mit Schlüssen helfen, zu denen Betrachtungen der stationären Bewegung führen, sondern müssen die gestörte Bewegung in ihrem zeitlichen Verlaufe verfolgen. Am Anfang der Bewegung haben die Variablen Werte, welche nicht die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen; die Folge muß also eine beschleunigte Bewegung sein, in deren Verlauf die Variablen ihre Werte ändern. Geht die Änderung so vor sich, daß man sich im Laufe der Zeit den Werten der stationären Bewegung immer mehr nähert, so können wir diese als stabil bezeichnen; entfernen sich aber die Werte der Variablen immer mehr von den Werten der stationären Bewegung, von denen sie am Anfang nur unendlich wenig abweichen, so ist der Flugzustand der stationären Bewegung instabil. Dieser Gedankengang beruht ersichtlich auf demselben Grundgedanken wie derjenige, der zum Begriffe der statischen Stabilität hinführte; nur die willkürliche Spezialisierung auf eine bestimmte Veränderung des stationären Zustandes ist weggefallen.

Eine Erweiterung der Möglichkeiten liegt auch darin, daß nur der zeitliche Verlauf, nicht die Richtung der entstehenden Kraft für die Stabilität maßgebend ist. Dies können wir uns am einfachen Beispiel eines Pendels verdeutlichen: Nach dem Gesichtspunkt der statischen Stabilität ist ein Pendel, dessen Schwerpunkt über dem Aufhängepunkt liegt, im instabilen, ein Pendel, dessen Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkt liegt, immer im stabilen Gleichgewicht; denn das bei unendlich kleiner Drehung entstehende Moment hat stets die Richtung nach der letzteren Lage hin. Die Größe des Moments kann ein Maß für die Größe der Stabilität abgeben. Nach dem neuen Gedankengang wird die Lage des Pendelschwerpunkts über dem Aufhängepunkt wieder als instabil beurteilt werden; denn die Störung verläuft so, daß diese Lage im Laufe der Zeit immer mehr verlassen wird; aber auch die andere Lage wird nicht ohne weiteres als stabil gelten können; denn

im Laufe der Zeit schwingt das Pendel um diese Lage, und zwar ungedämpft, wenn wir von der Luftreibung absehen. Das Pendel nähert sich seiner Ruhelage um so mehr, je größer die von der Luft herrührende Dämpfung ist; diese wird also als Maß der Stabilität dienen; der numerische Wert dessen, was „Stabilität" genannt wird, hat gar nichts mit dem zu tun, der im alten Gedankengang als Maß der Stabilität herauskam. Wir können uns ferner den Mechanismus etwas komplizierter vorstellen, so etwa, daß auf das Pendel außer der Reibung und der Schwerkraft noch andere Kraftwirkungen ausgeübt werden, die unter Umständen — z. B. bei Resonanz — die Pendelschwingungen verstärken können; dann kommen auch Fälle vor, in welchen das Pendel wohl um seine ursprüngliche Lage schwingt, aber diese Schwingungen mit der Zeit mehr und mehr anwachsen. Die ursprüngliche Lage wird daher mehr und mehr verlassen, das Pendel entfernt sich von der Ruhelage, und diese kann daher im Sinne unseres neuen Gedankengangs nicht mehr als stabil gelten. Wir haben einen Fall vor uns, in welchem das betrachtete System „statisch stabil", aber „dynamisch instabil" ist.

Die beiden Stabilitätsbegriffe gehen also vom gleichen Grundgedanken aus, haben aber recht verschiedene Bedeutung; man wird geneigt sein, den Begriff der dynamischen Stabilität als den eigentlichen physikalisch sinnvollen, und den Begriff der statischen Stabilität als einen beschränkt gültigen Näherungsbegriff anzusehen. Aber andererseits ist die Instabilität einer statisch instabilen Lage physikalisch doch etwas ganz anderes, als das Anwachsen von Schwingungen um eine statisch stabile Lage. Es ist also nicht ohne weiteres zu sagen, ob die statische oder die dynamische Stabilität für das Verhalten eines Systems maßgebend ist. Zu dieser Frage werden unsere späteren, noch tiefergehenden Untersuchungen Gesichtspunkte bringen.

Mathematisch reduzieren sich die Gleichungen eines mechanischen Systems, welches mit der Methode der kleinen Schwingungen auf Stabilität untersucht werden soll, auf lineare Differentialgleichungen; denn alle Variablen sollen nur unendlich wenig von den bekannten Werten im Gleichgewichtszustand abweichen; jede Funktion der Variablen, welche in den Gleichungen vorkommt, kann daher in eine Taylorsche Reihe entwickelt werden und erscheint genau genug als lineare Funktion. Eine solche Gleichung oder ein solches Gleichungssystem wird durch Exponentialfunktionen gelöst, so daß jede Variable als eine Summe von Funktionen $e^{\lambda t}$ erscheint. Dabei ist λ durch die Differentialgleichungen unabhängig von den Anfangsbedingungen bestimmt, und zwar treten soviele, im allgemeinen verschiedene Werte von λ auf, als Anfangsbedingungen zu erfüllen sind. Alle Werte von λ können komplex sein; der imaginäre Teil von λ gibt die zeitliche Frequenz einer Schwingung an, der reelle Teil die Amplitudenänderung dieser Schwingung mit der Zeit; die Schwingung wächst im Laufe der Zeit an oder klingt ab, je nachdem der reelle Teil von λ positiv oder negativ ist. Ist λ rein reell, so klingt die Störung ab oder wächst an, je nachdem λ negativ oder positiv ist; aber eine Schwingung ist nicht vorhanden, der Vorgang verläuft aperiodisch. Soviele Werte λ haben kann, soviele partikuläre Integrale hat die Differentialgleichung; ist nur ein solcher Wert positiv, so wächst die Störung im Laufe der Zeit an. Mathematisch lautet also die Bedingung der Stabilität, daß unter

allen auftretenden Werten von λ keiner einen positiv reellen Wert haben darf.

Wir haben nun diesen Gedankengang auf unsere Gleichungen (1), (2) und (6) anzuwenden; wir setzen

$$[illegible] \quad \beta = [illegible] + \delta\varphi \quad \vartheta = \vartheta_0 + \delta [illegible] \tag{8}$$

und entwickeln die einzelnen Summanden in unseren Gleichungen nach den kleinen Größen $\delta v, \delta\alpha, \ldots$ Da die Größen $v_0, \alpha_0, \ldots$ für sich die Gleichungen der stationären Bewegung erfüllen, also $\frac{d v_0}{dt} = 0$, $\frac{d \alpha_0}{dt} = 0, \ldots$, bleiben in den Gleichungen nach der Entwicklung keine Glieder stehen, die nicht eine der kleinen Größen enthalten. Es wird, wenn noch $c_w{}' = \frac{d c_w}{d\alpha}$, $c_a{}' = \frac{d c_a}{d\alpha}$, $c_m{}' = \frac{d c_m}{d\alpha}$ geschrieben wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{G}{g}\frac{d\,\delta v}{dt} &= -S \sin\beta_0\,\delta\beta - G\cos\varphi_0\,\delta\varphi - c_w{}'\,F\frac{\gamma}{2g}\,v^2{}_0\,\delta\alpha - c_w\,F\frac{\gamma}{g}\,v_0\,\delta v \\ 0 &= -\frac{G}{g}\,v_0\,\frac{d\,\delta\varphi}{dt} + S\cos\beta_0\,\delta\beta + G\sin\varphi_0\,\delta\varphi + c_a{}'\,F\frac{\gamma}{2g}\,v_0{}^2\,\delta\alpha + c_a F\frac{\gamma}{g}\,v_0\,\delta v \\ \frac{G}{g}\,k^2\,\frac{d^2\,\delta\vartheta}{dt^2} &= -\frac{dm}{d\alpha}\,v_0{}^2\,\delta\alpha - 2m\,v_0\,\delta v - n v_0\,\frac{d\,\delta\vartheta}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hierbei ist S als Konstante, also als unabhängig von v angesehen; die tatsächliche Abhängigkeit kann in der ersten Gleichung, wie oben auseinandergesetzt, durch Vergrößerung des c_w berücksichtigt werden; in der zweiten Gleichung ist sie ganz belanglos wegen der relativen Kleinheit des Gliedes $S \sin\beta$.

Diese Gleichungen werden durch richtige Zusammenordnung und durch Berücksichtigung der Beziehungen

$$\delta\beta = \delta\alpha \text{ und } \delta\varphi = \delta\vartheta - \delta\alpha$$

in die übersichtliche Form gebracht:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{G}{g}\frac{d}{dt} + c_w F\frac{\gamma}{g}\,v_0\right)\delta v + \left(S\sin\beta_0 + c_w{}'\,F\frac{\gamma}{2g}\,v^2{}_0 - G\cos\varphi_0\right)\delta\alpha \\ &\qquad + G\cos\varphi_0\,\delta\vartheta \\ 0 &= c_a F\frac{\gamma}{g}\,v_0\,\delta v + \left(S\cos\beta_0 + c_a{}' F\frac{\gamma}{2g}\,v_0{}^2 - G\sin\varphi_0 + \frac{G}{g}\,v_0\frac{d}{dt}\right)\delta\alpha \\ &\qquad + \left(G\sin\varphi_0 - \frac{G}{g}\,v_0\frac{d}{dt}\right)\delta\vartheta \\ 0 &= 2\,m\,v_0\,\delta v + \frac{dm}{d\alpha}\,v_0{}^2\,\delta\alpha + \left(\frac{G}{g}\,k^2\frac{d^2}{dt^2} + n\,v_0\frac{d}{dt}\right)\delta\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dies sind drei homogene lineare Differentialgleichungen für die drei Variablen δv, $\delta\alpha$, $\delta\vartheta$, welche wir nun alle drei proportional $e^{\lambda t}$ setzen. Durch diesen Ansatz werden die Differentialgleichungen befriedigt; in den Gleichungen (10) ändert sich nichts, als daß das Zeichen λ für das Symbol $\frac{d}{dt}$ eintritt. Wir gelangen also

zu drei homogenen linearen, algebraischen Gleichungen mit drei Unbekannten δv, $\delta \alpha$, $\delta \vartheta$ bzw. deren mit $e^{\lambda t}$ multiplizierten Faktoren. Diese haben bekanntlich nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Hauptdeterminante verschwindet; diese Bedingung wird durch eine Gleichung ausgedrückt, welche außer bekannten Größen noch λ enthält und zur Bestimmung von λ dient. Sie lautet:

$\frac{G}{g}\lambda$ $\quad$ $2g$ $\quad 0^2 - G\cos\varphi_0$ $\quad G\cos\varphi_0$

$F\frac{\gamma}{g}$ $\quad S\cos$ $\quad a' F\frac{\gamma}{2}$ $\quad {}^2 - G\sin\varphi_0 + \frac{G}{g}$ $\quad \frac{G}{g}$ $\quad G\sin\varphi_0 = 0$ (11)

v_0^2 $\quad G$ $\quad \lambda^2 +$

Vor der Ausrechnung können wir diese Determinante durch verschiedene Umformungen noch bedeutend übersichtlicher gestalten. Zunächst erfüllen die Größen mit dem Index $_0$ mit den Größen c_a, c_w . . ., welche sich gleichfalls auf den stationären Flug beziehen, die Gleichungen des stationären Geradeausflugs

$$S\sin\beta_0 - G\cos\varphi_0 = -c_a F\frac{\gamma}{2g}v_0$$

und

$$\cos\beta_0 - G\sin\varphi_0 = c_w F$$

mit deren Hilfe die mittlere Kolonne (senkrechte Reihe) der Determinante vereinfacht werden kann. Ferner gehen wir nach dem Vorgang von Quittner und Kármán-Trefftz zu dimensionslosen Größen über, wodurch das Allgemeingültige besser hervortritt. In der zweiten Kolonne erscheinen dimensionslose Größen, wie c_a, c'_a . . ., wenn wir dieselbe nur mit $Fq = F\frac{\gamma}{2g}v_0^2$ dividieren; auch die andern Kolonnen dividieren wir durch qF; in der ersten Kolonne müssen wir außerdem mit v_0 multiplizieren, um auf dimensionslose Werte zu kommen. Durch diese Umformung wird erreicht, daß in den ersten beiden Zeilen (wagrechten Reihen) die Unbekannte nur in der Form

auftritt. Um auch in der dritten Zeile nur diese Form zu erhalten, müssen wir sie noch mit $\frac{G v_0^2}{gF qk^2}$ multiplizieren; durch alle diese Maßnahmen wird bekanntlich der Wert einer Determinante nur um konstante Faktoren geändert.

Wir führen für m einen Momentenbeiwert ein, indem wir es auf die Flügelfläche und auf den Abstand des Leitwerks vom Schwerpunkt beziehen; letzteres ist, wenn es sich um das ganze Flugzeug handelt, die natürlichere Bezugsgröße als die Flügeltiefe:

$$m = c_m F\frac{\gamma}{2g}$$

Da die Momente im stationären Flug ausgeglichen sind, ist $m = 0$, wodurch das erste Glied der letzten Zeile verschwindet. Nun haben wir:

$$+ \qquad ' - c_a$$

$$+ c_a' + \qquad = 0 \quad . \ (14)$$

$$\mathfrak{z}^2 + \frac{\ \ \ 0}{F\ \ k^2}$$

In dieser Gestalt wird der stationäre Flug (Gleichgewichtszustand) nur durch Größen von sehr allgemeiner Bedeutung charakterisiert; neben den Luftkraftbeiwerten und ihren Ableitungen tritt noch der Quotient $\frac{G}{q\,F}$ auf, und das ist, wenn man die belanglose Komponente des Schraubenzugs $S \sin \beta_0$ vernachlässigt,

$$\frac{G}{q\,F} = \frac{c_a}{\cos\,\varphi_0}, \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

so daß in den ersten beiden Zeilen außer den Luftkraftbeiwerten nur der Anstiegwinkel φ_0 stehen bleibt. Dazu kommen in der letzten Zeile die Größe

$$2\,l\,G \quad c_m' . \ \ldots \ldots$$

welche die statische Stabilität des Flugzeugs enthält, und die Größe

$$\nu = \frac{}{F\,q\,k^2} \qquad (17)$$

nach Gleichung (5), welche das Dämpfungsmoment infolge der Flugzeugdrehung enthält.

Die Ausrechnung der Determinante führt zu einer Gleichung 4. Grades in $\mathfrak{z}$. Es gibt also vier Werte von λ, welche die Gleichung befriedigen, und es treten vier unabhängige Integrationskonstanten auf, welche zur Erfüllung der Anfangsbedingungen zur Verfügung stehen. Dies muß mathematisch so sein; denn von den drei Bewegungsgleichungen sind zwei erster, eine zweiter Ordnung. Physikalisch ist der Anfangszustand nur durch vier, anstatt durch sechs Bedingungen bestimmt, weil die beiden Anfangskoordinaten des Schwerpunkts, also die Lage des Schwerpunkts gegen irgend ein Koordinatensystem belanglos sind.

Die Gleichung 4. Grades lautet nun:

$$(\mathfrak{z}^2 + \qquad + c_a' \qquad c_a\,(c_a - c_w')] + \mu\,[(\mathfrak{z} - c_a\,\mathrm{tg} \qquad _w) \qquad (18a)$$

oder ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} a &= (c_a' + 3\,c_w) + \nu = A + \nu, \\ b &= 2\,(c_a^2 + c_w^2 + c_a' c_w - c_a c_w') + (c_a' + 3\,c_w)\,\nu + \mu = B + A\,\nu + \mu, \qquad (18b) \\ c &= 2\,(c_a^2 + c_w^2 + c_a' c_w - c_a c_w')\,\nu + (2\,c_w - c_a\,\mathrm{tg}\,\varphi_0)\,\mu = B\,\nu + C\mu, \\ d &= 2\,c_a\,(c_a - c_w\,\mathrm{tg}\,\varphi_0)\,\mu = \end{aligned}$$

Für die Rechnung empfiehlt es sich unter Umständen

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{S}{G \cos \varphi_0} \cdot \frac{c_w}{c_a}$$

einzusetzen.

Die Algebra lehrt nun, daß dann und nur dann alle 3 einen negativ reellen Teil haben, also die Stabilitätsbedingung erfüllen, wenn

$$a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0 \quad d > 0 \text{ und } (ab - c)\,c - a^2 d > 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Die Diskussion der Gleichungen (18) oder der Bedingungen (19) wird erst sinnvoll, wenn man sich über die Größenordnung der einzelnen darin vorkommenden Ausdrücke klar geworden ist. Unsere Abb. 236a und b geben ein Bild aller in Frage

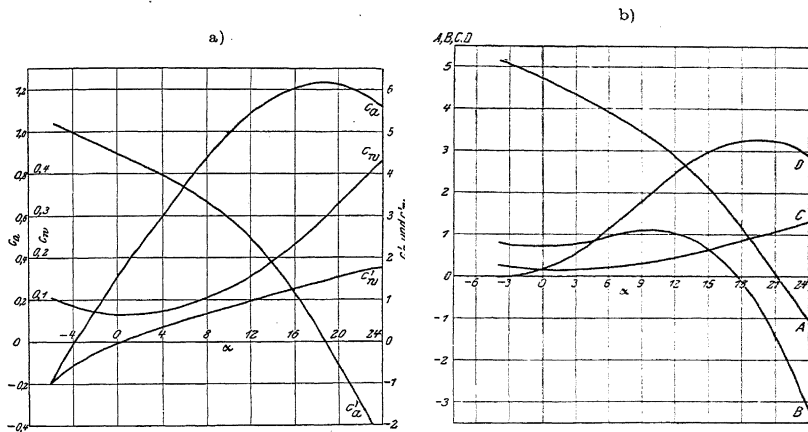



Abb. 236. Numerische Werte der einzelnen Luftkraftbeiwerte, welche in der Gleichung der Längsstabilität auftreten.

kommenden Funktionen von c_a, c_w und φ_0 in Abhängigkeit von α. Dabei ist der Fall des Gleitflugs angenommen, wobei alle Größen nur vom Polardiagramm des Flugzeugs abhängen. Im Motorflug findet man qualitativ denselben Verlauf; man kann als vernünftigen Wert für numerische Rechnung etwa $\frac{S}{G} = 0{,}3$ annehmen und c_w für alle α um etwa 0,05 erhöhen. Hier glauben wir von der numerischen Durchführung dieses Falles absehen zu dürfen. Die Größenordnungen sind von individuellen Verhältnissen nicht sehr abhängig, weder von aerodynamischen noch von konstruktiven.

Auch die Größe ν ist bei den meisten Flugzeugen normaler Bauart nicht sehr verschieden; sie hängt nur von den Leitwerksabmessungen ab; ihre konstruktive Bedeutung kann nur darin liegen, daß sie durch den Ausdruck $F_H l^2$ bestimmt wird,

während in den früheren Betrachtungen (Kapitel II) nur das Produkt $F_H l$ auftrat. Wenn also das letztere durch den statischen Momentenausgleich festgelegt ist, kann man, je nachdem man größeres oder kleineres Dämpfungsmoment haben will, F_H auf Kosten von l, oder l auf Kosten von F_H tunlichst klein halten. Die einzelnen Faktoren von ν in Gleichung (17) haben bei normalen Flugzeugen etwa die Größen:

bis

also

$$\nu \sim 5 \text{ bis } 6,$$

von welcher Größenordnung wohl nur schwanzlose Flugzeuge, für welche anders gerechnet werden muß, wesentlich abweichen. Für ν finden wir also einen größeren Wert, als ihn im Mittel einer der Ausdrücke der Abb. 236b erreicht; es fällt stärker ins Gewicht als die aerodynamischen Größen der Kraftgleichungen.

Noch wichtiger und auch konstruktiv in weit höherem Maßstabe veränderlich ist der Einfluß der statischen Stabilität μ. Wir überblicken die Größenordnung am besten, wenn wir im Anschluß an (13) ansetzen:

$$\frac{2g}{\gamma}\frac{\partial m}{\partial \alpha} = c_m' F l = \varkappa c_{nH}^{\times'} F_H l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Hierbei ist $c_{nH}^{\times'} F_H l$ der Stabilitätsanteil des Leitwerks, also eine wesentlich positive Größe, und $\varkappa$ ein Faktor, welcher die Verminderung dieser Größe durch instabilisierende Wirkung der Flügel ausdrückt im Sinne der Darlegungen des II. Kapitels. Dieser Faktor beträgt bei gut ausgeglichenen Flugzeugen vielleicht $^1/_{10}$ $^1/_5$; bei instabilen mag er höchstens bis etwa $-\,^1/_5$ sinken. Außerhalb der gewöhnlichen Flugzustände wird $\varkappa$ größer; bei ganz kleinen Auftriebsbeiwerten nähert er sich mitunter fast 1, in der Nähe des Auftriebsmaximums wird er immer 1, bei größeren Anstellwinkeln sogar größer; dort verschwindet die instabilisierende Wirkung der Flügel, der Stabilitätsanteil der Flügel wird schließlich positiv, ein Verhalten, auf dessen aerodynamische Wichtigkeit später noch hingewiesen wird. Nun wird

$$c_m' = \quad \frac{F_H}{F} \sim \quad 1{,}7 \cdot \frac{1}{\circ},$$

also $c_m' \sim -0{,}04$ bis $+0{,}04$ im gewöhnlichen Flugbereich und c_m' bis zu 0,2 bei ganz kleinen und ganz großen Anstellwinkeln. c_m' erscheint nun multipliziert mit $\frac{2lG}{l^2 F}$. Dieser Faktor hat einen sehr hohen Betrag; selbst bei sehr großen Flugzeugen mit kleiner Flächenbelastung in niedriger Höhe beträgt er etwa 80 bis 100, bei kleinen, hoch belasteten Flugzeugen in großer Höhe steigt er bis 1000; im Mittel muß man etwa 250 annehmen. Infolgedessen kann der Beiwert μ eine Größe erhalten, welche alle anderen in der Gleichung (18) vorkommenden weit übertrifft; selbst bei sehr gut ausgeglichenen indifferenten Flugzeugen muß man für μ mindestens dieselbe Größenordnung wie für ν oder irgendeinen anderen Ausdruck in (18) erwarten, bei großen und kleinen Anstellwinkeln ganz erheblich mehr. Von der Konstruktion hängt μ sehr empfindlich ab; es ist daher vielfach und leicht zu beeinflussen. Für die Wurzeln von (18), also für die Stabilität des Flugzeugs, ist es darum in allererster Linie maßgebend.

§ 4. Diskussion der Stabilitätsgleichung.

Zunächst können wir nun aus den Beziehungen (19) einige Schlüsse ziehen:

Das Vorzeichen von d wird nur durch das Vorzeichen von μ bestimmt; denn $c_a - c_w \operatorname{tg} \varphi_0$ ist immer positiv; Anstiegwinkel, die diesen Ausdruck negativ machen, liegen ganz außer dem Bereich des flugtechnisch Möglichen. Daraus folgt aber, daß dynamische Stabilität nur möglich ist, wenn μ positiv ist, wenn also statische Stabilität vorhanden ist. Damit haben wir die Berechtigung unserer früheren Stabilitätsüberlegungen nachträglich erwiesen. Von der anderen statischen Stabilitätsbetrachtung in § 1 dieses Kapitels ist hier nichts zu bemerken; sie läßt sich aus den allgemeinen Stabilitätsbetrachtungen nicht erweisen; die ihr zugrunde liegenden Voraussetzungen treffen nicht zu.

Weiterhin sehen wir aber, daß statische Stabilität allein noch nicht zur dynamischen Stabilität genügt; denn auch wenn μ positiv ist, können die Bedingungen (19) teilweise verletzt sein:

1. Der Koeffizient B wird bei großen Anstellwinkeln negativ; ist also μ klein, so könnte der Ausdruck c negativ werden, besonders wenn ν groß ist. Von praktischer Bedeutung ist aber diese Instabilitätsmöglichkeit nicht, da gerade bei großen Anstellwinkeln μ stets sehr große Werte annimmt, $\varkappa$ in Gleichung (20) wird dort $= 1$.

2. Der Ausdruck C kann bei sehr kleiner Leistungsbelastung negativ werden; doch liegt ein solcher Fall wohl außer dem praktischen Bereich; es müßte dazu $\frac{S}{G} = \frac{3 c_w}{c_a}$ sein, also gleich dem 3fachen des Wertes, welcher zum Horizontalflug mit dem betr. Anstellwinkel erforderlich wäre.

3. Die Diskriminante $(ab - c)\, c - a^2 d$ kann negative Werte annehmen, wenn μ nicht zu groß ist. Dies sieht man daraus, daß sie ein in μ quadratischer Ausdruck ist, welcher für kleine Dämpfungsmomente ν zwei positive Nullstellen hat. Für $\nu = 0$ wird nämlich

$$(ab - c)\, c - a^2 d = (AB + A\mu - C\mu)\, C\mu - A^2 D\mu$$

und dieser Ausdruck verschwindet für $\mu = 0$ und

$$\mu = \frac{A}{A - C} \cdot \frac{AD - BC}{C} \tag{21}$$

Alle Faktoren in diesem Ausdruck sind im praktischen Bereich fast durchweg positiv; nur $AD - BC$ wird für ganz kleine Auftriebsbeiwerte negativ, und $A - C$ in der Nähe des Auftriebsmaximums; der Ausdruck selbst ist in Abb. 237 aufgezeichnet. Ist μ größer als (21), so wird die Diskriminante positiv. Bei verschwindendem Dämpfungsmoment ist also trotz statischer Stabilität keine dynamische Stabilität vorhanden, wenn μ nicht den in Abb. 237 angegebenen Wert überschreitet. Für Anstellwinkel $\leq -2{,}5^0$, also im Sturzflug, wenn $AD - BC \leq 0$, genügt für $\nu = 0$ jedes noch so kleine μ zur dynamischen Stabilisierung. Andererseits reicht keine statische Stabilität dazu aus, wenn in der Nähe des Auftriebsmaximums beim Anstellwinkel $18{,}7^0$ $A - C = 0$ wird.

Wieweit dies Verhalten sich auch bei endlichem Dämpfungsmoment zeigt, könnte man auch aus der Diskriminante erkennen; man kommt aber dabei zu wenig übersichtlichen Rechnungen; wir wollen daher diese Frage an der Gleichung (18) unmittelbar diskutieren und zugleich die Frage nach dem numerischen Wert der Wurzeln und nach dem damit zusammenhängenden Charakter der Schwingungen aufrollen. Insbesondere muß uns wichtig sein, ob die Wurzeln reell oder komplex sind, ob also die Störungen aperiodisch anwachsen bzw. abklingen oder ob sie wie gedämpfte bzw. anwachsende Schwingungen verlaufen.

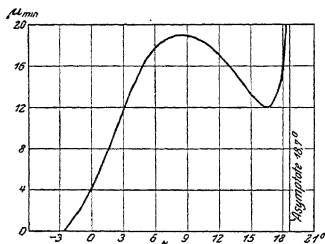



Abb. 237. Mindestwerte von μ, welche bei $\nu = 0$ zur dynamischen Stabilität erforderlich sind.

Zuerst heben wir die leicht zu durchschauenden Fälle extremer Werte von μ hervor: Ist μ außerordentlich groß, wie fast immer für sehr kleine und sehr große Anstellwinkel, so sind zwei Paare von Wurzeln vorhanden; das eine Paar ist von mäßiger Größe, hierfür kommen nur die mit μ multiplizierten Glieder der Gleichung (18a) in Betracht; das andere Paar ist von der Größenordnung $\sqrt{\mu}$, dabei bleiben als von erster Ordnung nur die Glieder $\mathfrak{z}^4$ und $\mu\mathfrak{z}^2$ stehen. Das erste Wurzelpaar folgt mit den Bezeichnungen (18b) aus der Gleichung

$$\mathfrak{z}^2 + C\mathfrak{z} + D = 0$$

zu

$$\mathfrak{z} = -\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - D} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Im normalen Flug ist $D > \frac{C^2}{4}$, daher sind diese Wurzeln komplex; C ist bis auf den erwähnten Fall extrem niedriger Leistungsbelastung stets positiv. Diese partikuläre Lösung stellt also eine abklingende Schwingung dar, und zwar eine Schwingung von kleiner Frequenz und kleiner Dämpfung; denn der imaginäre und der reelle Teil sind klein; z. B. für $\alpha = 6^0$ entnehmen wir Abb. 236b

$$\mathfrak{z} = -0{,}12 \pm 1{,}07\,i$$

daraus folgt nach (12)

$$\lambda = -0{,}075 \pm 0{,}67\,i$$

wenn wir eine Flächenbelastung von 40 kg/m², eine Geschwindigkeit $v_0 = 40$ m/s und Luftdichte am Boden, also $q = 100$ kg/m², annehmen. Die dadurch dargestellte Schwingung hat also eine Dauer von $\frac{2\pi}{0{,}67} = 9{,}3$ s, und ihre Amplitude ist auf den halben Wert gesunken nach 9,25 s, was ungefähr einer Schwingung entspricht. Für ganz kleine Auftriebsbeiwerte wird $\frac{C^2}{4} > D$; in der Grenze $c_a = 0$ wird nämlich im Gleitflug $\frac{C^2}{4} = \frac{9}{4} c_w^2$ und $D = 2 c_w^2$; im steilsten Sturzflug verlaufen diese Störungen also aperiodisch, aber unter allen Umständen gedämpft.

Tiefer in den Charakter der Schwingungen können wir eindringen, wenn wir die Gleichung in der Determinantenform (14) und die Grundgleichungen (10) betrachten. Wir würden zu der Gleichung (22) gelangen, wenn wir von vornherein $\delta\alpha = 0$ setzen und nur die Kraftgleichungen betrachten würden. Die Schwingungen sind also reine Schwerpunktschwingungen mit konstantem Anstellwinkel, für welche das Flugzeug nur ein materieller Punkt ist; das Flugzeug behält seine Lage zur Bahn unverändert bei; da infolgedessen $\delta\vartheta = \delta\varphi$, sind die Variablen der Bewegung nur die Geschwindigkeit und die Richtung der Bahn. Wir werden später ausführlicher und allgemeiner auf diese sog. „Phygoid"-Bewegung einzugehen haben.

Das zweite Wurzelpaar ergibt sich in erster Näherung aus der Gleichung

$$\mathfrak{z}^2 + \mu = 0$$

zu

$$\mathfrak{z} = \qquad \text{. . . . . (23)}$$

Wieder finden wir einen periodischen Ablauf der Störung, diesmal aber von sehr hoher Frequenz. Daß in erster Näherung kein reeller Teil auftritt, liegt nur daran, daß der imaginäre Teil so groß ist; in zweiter Näherung tritt offenbar eine Dämpfung von der Größenordnung ν auf, die gegenüber der Dämpfung des ersten Wurzelpaares immer noch groß ist, aber erst in einer Zeit vieler Schwingungen zur Wirkung kommt. Der Charakter dieser Schwingungen folgt daraus, daß die in (23) auftretenden Glieder nur aus der Momentengleichung folgen. Diese Schwingungen haben mit dem Kräfteausgleich, also mit der Flugbahn, nichts zu tun. Vergleichen wir (23) mit der letzten Gleichung (10):

$$\mathfrak{z}^2\delta\vartheta + \mu\delta\alpha = 0,$$

so kommen wir unmittelbar zu der Beziehung

$$\delta\vartheta = \delta\alpha \text{ oder } \delta\varphi = 0.$$

Dieses Wurzelpaar stellt also eine reine Drehschwingung um die unveränderte und unbeschleunigte Flugbahn dar.

Durch diese Trennung in zwei Schwingungstypen haben wir die Haupteigenschaften möglicher Bewegungsformen herausschälen können; die wirkliche Flugzeugbewegung vereinigt natürlich beide so, daß sie einander bis zu einem gewissen Grad stören. Allerdings wird dadurch, daß die erstbehandelten so viel langsamer verlaufen und abklingen wie die anderen, nach kurzer Zeit der erste Typus allein in Erscheinung treten.

Die Überlegungen gelten unverändert für sehr große statische Instabilität ($\mu < 0$ und sehr groß); nur sind dann die Wurzeln (23) reell entsprechend einem aperiodischen Abklingen und Anwachsen; das Anwachsen des Anstellwinkels bei unveränderter Flugbahnrichtung ist das Hauptmerkmal dieser instabilen Bewegung.

Beim statisch indifferenten Flugzeug ($\mu = 0$) zerspaltet sich die Gleichung (18a) ebenfalls in zwei quadratische:

$$\mathfrak{z}^2 + \nu\mathfrak{z} = 0 \tag{24}$$

und

(25)

Die Wurzeln der ersten $\mathfrak{z}_1 = 0$ und $\mathfrak{z}_2 = -\nu$ folgen aus der Momentengleichung allein, wenn $\delta\alpha = 0$ und $\delta v = 0$ gesetzt wird; sie zeigen an, daß das Flugzeug indifferent gegen seine Lage ϑ im Raum ist, daß aber eine Drehbewegung $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right.$ stark gedämpft ist. Die Wurzeln der zweiten Gleichung

---

sind ebenfalls rein reell, da $\frac{A^2}{4}$ stets größer als B oder B negativ ist (s. Abb. 236b); die eine dieser Wurzeln ist im normalen Bereich stets groß gegen die andere (Abb. 238); beide sind für normale Flugzustände negativ, gehören also zu abklingenden Störungen. Die Stabilität ist nur für negative B gestört; dann wird die kleinere Wurzel positiv, eine kleinen Instabilität entsprechend. Der Charakter dieser beiden Schwingungen folgt aus den Kraftgleichungen mit $\delta\vartheta = 0$. Geschwindigkeit und Anstellwinkel nehmen aperiodisch ihre Gleichgewichtswerte an, während — der statischen Indifferenz entsprechend — die Lage des Flugzeugs im Raum unverändert bleibt. Auch diesen Bewegungstypus werden wir noch genauer kennen lernen.

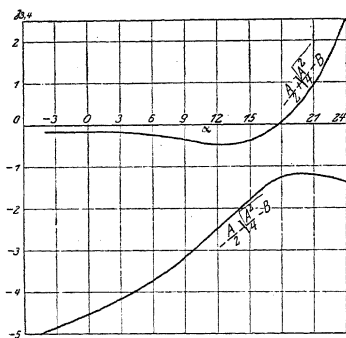



Abb. 238. $\mathfrak{z}_3$ und $\mathfrak{z}_4$ beim indifferenten Flugzeug.

Um nun weiter zu untersuchen, für welche Werte von μ der aperiodische Verlauf der Schwingungen, wie bei $\mu = 0$, erhalten bleibt, sehen wir in Gleichung (18a) μ als die Unbekannte an und lassen $\mathfrak{z}$ alle reellen, aperiodischem Verlauf entsprechenden Werte durchlaufen. Es ist

$$\frac{\mathfrak{z}^4 + (A + \nu)\,\mathfrak{z}^3 + (B + A\,\nu)\,\mathfrak{z}^2 + B\,\nu\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^2} \quad . \; . \; . \; . \; .$$

Ist $\mathfrak{z}$ reell positiv, so werden Zähler und Nenner dieses Bruches in allen normalen Fällen positiv; das bedeutet, daß ein aperiodisches Anwachsen der Störung nur bei negativem μ, also bei statischer Instabilität möglich ist; jede Instabilität bei statischer Stabilität kann daher nur einen Verlauf in der Art anwachsender Schwingungen bedeuten. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $B < 0$, welcher bei kleinem positivem $\mathfrak{z}$ zu kleinem, positivem μ führt. Doch ist dieser Fall ohne praktische Bedeutung, da bei so hohen Anstellwinkeln die statische Stabilität immer sehr groß ist.

Die Kurve „μ als Funktion von $\mathfrak{z}$“ nach Gleichung (26) in Abb. 239 a und b läßt erkennen, für welche statische Stabilität aperiodischer Verlauf der Störung eintritt. Die Kurve schneidet nach Gleichung (24) und (25) die $\mathfrak{z}$-Achse im Null-

punkt und in drei anderen Punkten, die (vom Fall $B < 0$ abgesehen) auf der negativen Achse liegen. Solange der Nenner in (26) keine reellen Wurzeln hat, kann die Kurve keine Unendlichkeitsstellen haben; sie weist vielmehr zwei Maxima und ein Minimum auf. Nur in einem schmalen Bereich kleiner positiver und negativer μ

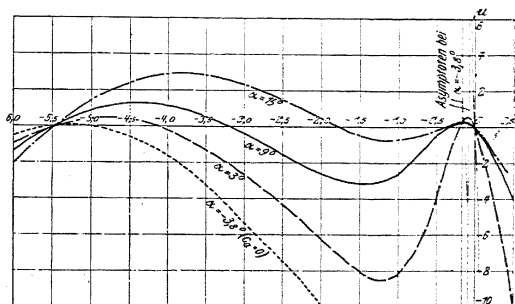
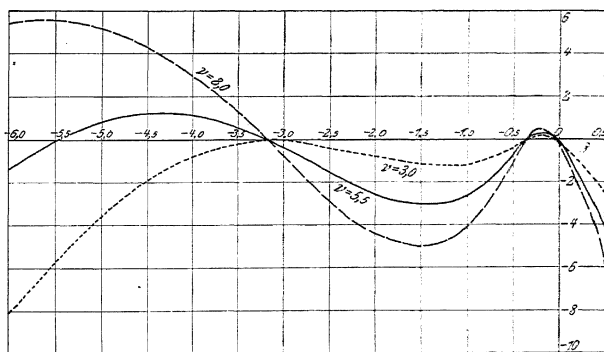



Abb. 239. Übersicht über die aperiodischen Lösungen der Stabilitätsgleichung.

verlaufen alle Störungen aperiodisch; für größere negative μ treten zwei periodisch verlaufende Teilstörungen zu den zweien, die für jedes negative μ aperiodisch bleiben, und deren eine — die anwachsende — in ihrer Bedeutung alle anderen weit überwiegt.

Im normalen Flug verliert schon für sehr kleine positive Werte von μ der Störungsverlauf seinen aperiodischen Charakter und wird zur gedämpften periodischen Schwingung. Die zwei Schnittpunkte mit der $\mathfrak{z}$-Achse, welche von den Wurzeln der Gleichung (25) herrühren, hängen nur vom Anstellwinkel, der dritte Schnitt-

punkt nur vom Dämpfungsmoment ab; die entsprechenden Abhängigkeiten der Maxima zeigen die Abb. 239a und b. Erhöhung des Dämpfungsmomentes ν hält die Störungen für größere μ aperiodisch; in Anbetracht des großen Bereichs der μ-Werte spielt das aber praktisch wohl keine Rolle. Man sieht, daß bereits *für sehr kleine statische Stabilität alle Störungen nach der Art gedämpfter oder anwachsender Schwingungen verlaufen müssen.*

Eine Ausnahme bildet wieder der steilste *Sturzflug*; für diesen bleibt nur das Maximum bei absolut großen $\mathfrak{z}$ bestehen, das Minimum und das andere Maximum entfallen, und die Kurve läuft ins Unendliche. *Bei statischer Instabilität verlaufen in diesem Falle alle vier Teilstörungen aperiodisch, bei statischer Stabilität zwei Teilstörungen.*

Im allgemeinen liegen zwei Schnittpunkte der μ-Kurve mit der $\mathfrak{z}$-Achse bei Werten, die, absolut genommen, groß gegen die Werte der zwei anderen Schnittpunkte sind. Schon bei kleinen μ-Werten zeigt sich die Tendenz, daß *sich zwei scharf geschiedene Typen des Störungsverlaufs ausbilden, einer mit großer, einer mit kleiner Dämpfung*; dies gemahnt an die beiden Schwingungstypen von hoher und niederer Frequenz, die wir oben im Fall $\mu = \infty$ vorfanden. Der Anschluß an diese läßt sich gewinnen, wenn wir nun die *periodisch verlaufenden Störungen* diskutieren.

Zu diesem Zweck benutzen wir die eben hervorgehobene Tatsache, daß immer zwei der vier Wurzeln von (18) groß gegen die beiden anderen sind, und gelangen zu einem von v. Kármán und Trefftz angegebenen Näherungsverfahren. Wir bezeichnen die beiden großen Wurzeln mit $\Xi \pm iH$, die beiden kleinen Wurzeln mit $\xi \pm i\eta$ und setzen zur Abkürzung

$$\Sigma = (\Xi + iH) + (\Xi - iH) = 2\,\Xi$$

$$- iH) = \Xi^2 \qquad (27)$$

$$\pi = (\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = \xi^2 + \eta^2$$

Dann bestehen nach den Grundlehren der Algebra zwischen diesen Größen und den Koeffizienten der Gleichung (18b) folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Sigma + \sigma &= -(A + \nu) \\ \Pi + \Sigma\sigma + \pi &= B + A\nu + \\ \Sigma\pi + \Pi\sigma &= -(B\nu + C\mu) \end{aligned} \qquad (28)$$

Sind nun σ und π klein gegen Σ und Π, so erhalten wir eine erste Näherung für Σ und Π aus den ersten beiden Gleichungen (28)

. . . . (29)

Einsetzen dieser Werte in die beiden letzten Gleichungen (28) liefert die 1. Näherung für π und σ:

$$\pi_1 = \frac{D\mu}{\pi_1} = \frac{D\mu}{B + A\nu + \mu}$$

$$\sigma_1 = \frac{-(B\nu + C\mu) - \Sigma_1\pi_1}{\text{[illegible]}} = \frac{-(B\nu + C\mu)(B + A\nu + \mu) + (A + \nu)D}{\text{[illegible]}} \qquad (30)$$

Die so erhaltenen Werte sind schon recht gut; man kann aber auch leicht in jedem einzelnen Fall den Fehler abschätzen und die Genauigkeit beliebig verbessern. Man braucht dazu nur mit den Werten σ_1 und π_1 wieder in die ersten beiden Gleichungen (28) einzugehen und dadurch verbesserte Werte Σ_2 und Π_2 aus diesen zu berechnen; mit diesen verbesserten Werten liefern die letzten beiden Gleichungen verbesserte Werte σ_2 und π_2; und dies Verfahren läßt sich beliebig oft wiederholen. Für alle praktischen Bedürfnisse reicht die erste Näherung aus; diese wird auch in der englisch-amerikanischen Literatur durchgehends in der von Bairstow angegebenen Form benutzt, daß sich die Gleichung (18) näherungsweise in zwei Gleichungen zweiten Grades zerlegen läßt:

$$[\mathfrak{d}^2 \qquad \mathfrak{d}^2 \quad \frac{bc - ad}{} \quad , \quad d]$$

Wir können aus unserer ersten Näherung folgende Schlüsse ziehen: Die Dämpfung des einen Schwingungspaares

ist bedeutend; denn sowohl A wie ν sind meist große Werte; die Dämpfung ist unabhängig von der statischen Stabilität und wächst linear mit dem Dämpfungsmoment.

Das Quadrat der Frequenz dieser stark gedämpften Schwingungen berechnet sich zu

$$H^2 = \Pi - \Xi^2 = B + A\nu + \mu - \left(\frac{A+\nu}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Es wächst linear mit der statischen Stabilität und erreicht sehr hohe Werte, da die Größenordnung von μ sehr hoch werden kann.

Die Beziehungen (31) und (32) stellen wir in einem von Quittner und v. Kármán-Trefftz eingeführten Diagramm (Abb. 240) dar, welches in Abhängigkeit von μ und ν bei bestimmtem Anstellwinkel (in der Abbildung 9°) die Linien gleicher Dämpfung $\Xi = \text{Const}$ und die Linien gleicher Frequenz $H^2 = \text{Const}$ enthält. Der Übergang zu dem früher diskutierten Grenzfall $\mu = \infty$ wird aus Gleichung (32) deutlich. H wird gleich $\sqrt{\mu}$ und groß gegen Ξ. Für große μ können wir die durch Ξ und H gegebene Störung als eine Drehschwingung auffassen; für kleine μ und kleinere Frequenzen ist diese Auffassung nicht mehr zulässig; in diesem Fall bleibt die Bahn nicht mehr unverändert; denn für verschwindende μ rührt nur die eine der beiden absolut großen Wurzeln von der Momentengleichung, die andere von den Kraftgleichungen her.

Abb. 240. Die großen Wurzeln der Stabilitätsgleichung.

Das andere Schwingungspaar ist — im

Sinne unseres Näherungsverfahrens — durch kleine Werte von ξ und η charakterisiert; es handelt sich also um Schwingungen kleiner Frequenz und kleiner Dämpfung. Insbesondere ist hervorzuheben, daß sowohl σ wie π und damit auch Dämpfung und Frequenz dieser Schwingungen nicht mit μ ins Unendliche wachsen, sondern mäßig bleiben, entsprechend dem früher für $\mu = \infty$ gefundenen Verhalten. Auch für wachsende ν wachsen Dämpfung und Frequenz nicht beliebig.

Da σ positive und negative Werte annehmen kann, gibt es auch unter Umständen anwachsende Schwingungen und somit Instabilität. Die Linien

$$\xi = \frac{\sigma_1}{2} = \text{Const}$$

sind Kegelschnitte in der μ-ν-Ebene. Der Kegelschnitt $\xi = 0$ grenzt das Instabilitäts- vom Stabilitätsgebiet ab; er schneidet die μ-Achse ($\nu = 0$) stets im Punkte $\mu = 0$ und im Punkte

$$\mu = \frac{AD - BC}{C}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem oben unter (21) verzeichneten nur durch den dort noch auftretenden Faktor

$$\frac{A}{A - C} - \frac{c_a' \quad}{c_a' + c_w \quad} \quad \operatorname{tg}$$

der nur in der Nähe des Auftriebsmaximums von 1 wesentlich verschieden sein kann; in diesem Bereich ist unsere Näherung also nicht ganz zureichend. Doch ist dieser Fall nicht von praktischer Bedeutung. Abb. 241 zeigt die Kurven gleicher Dämpfung und gleicher Frequenz für die langsamen, schwach gedämpften Schwingungen, wieder beim Anstellwinkel 9°. Um diese Abbildung zu zeichnen, bringt man die Gleichungen (30) am besten auf die Form

$$B\nu \qquad\qquad + \eta^2) = 0$$

und $\qquad\qquad$ . . (33)

und löst diese nach ν und μ auf. Die Kurven $\eta^2 = \text{Const}$ werden Gerade, sobald $\xi^2 \ll \eta^2$, was im wichtigsten Bereich der Fall ist.

Kármán und Trefftz haben zur Gewinnung der Abb. 240 und 241 einen etwas allgemeineren Weg eingeschlagen, der rechnerisch etwas umständlicher ist, aber die Nachteile der Näherung vermeidet. Sie schreiben Gleichung (18) in der Form

$$(\mathfrak{z}) + \mu g(\mathfrak{z}) + h(\mathfrak{z}) = 0 \qquad (34)$$

wobei die Funktionen f, g, h außer von $\mathfrak{z}$ nur noch vom Anstellwinkel abhängen. Es ist

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{z}) &= \mathfrak{z}^2 + C\mathfrak{z} + D \\ h(\mathfrak{z}) &= \mathfrak{z}^4 + A\mathfrak{z}^3 + B \end{aligned} \qquad (35)$$

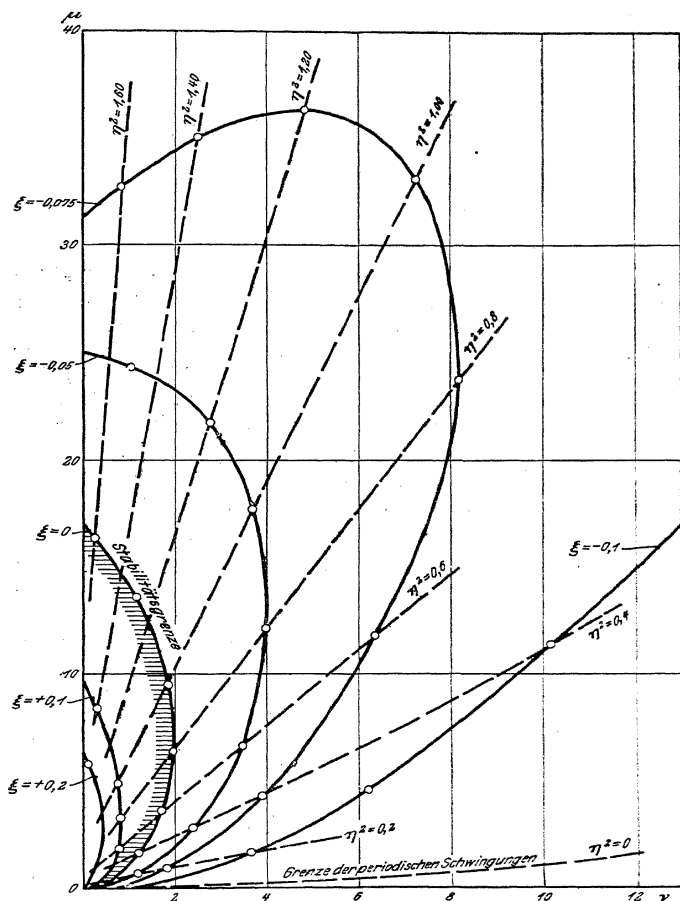



Abb. 241. Die kleinen Wurzeln der Stabilitätsgleichung.

Diese Funktionen werden für $\mathfrak{z} = \xi + i\eta$ in reellen und imaginären Teil dadurch zerlegt, daß man sie in Taylorsche Reihen nach der Größe $i\eta$ entwickelt. Diese Reihen brechen, da die Funktionen ganz rational von niedrigem Grade sind, nach wenigen Gliedern ab.

Reeller und imaginärer Teil von (34) müssen für sich Null sein; dies ergibt für μ und ν die beiden linearen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\nu\left[f(\xi)-\frac{\eta^2}{2}f''(\xi)\right]+\mu\left[g(\xi)-\frac{\eta^2}{2}g''(\xi)\right]\\ &\quad+\left[h(\xi)-\frac{\eta^2}{2}h''(\xi)+\frac{\eta^4}{24}h^{IV}(\xi)\right]=0\\ &\eta\left\{\nu\left[f'(\xi)-\frac{\eta^2}{6}f'''(\xi)\right]+\mu\, g'(\xi)\right.\\ &\quad\left.+\left[h'(\xi)-\frac{\eta^2}{6}h'''(\xi)\right]\right\}=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

Will man eine Kurve konstanter Dämpfung zeichnen, so hat man $\xi = \text{Const}$ zu setzen und μ und ν als Funktionen des alle positiven Werte durchlaufenden Parameters η^2 darzustellen; will man Kurven gleicher Frequenz haben, so ist $\eta^2 = \text{Const}$ zu setzen und analog zu verfahren. Daß immer eine Lösung $\eta = 0$ existiert, zeigt nur das Vorhandensein aperiodischer Lösungen an; die erste Gleichung (36) geht in diesem Fall in Gleichung (26) für reelle $\mathfrak{z}$ über.

Für den einfachsten Fall der Stabilitätsgrenze ($\xi = 0$) wird z. B.

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{(A\eta^2)^2+\eta^2(B-\eta^2)^2}{(B-\eta^2)(D-\eta^2)+AC\eta^2}\\ \nu &= \frac{A\eta^2(D-\eta^2)-C\eta^2(B-\eta^2)}{(B-\eta^2)(D-\eta^2)+AC\eta^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (37)$$

Diese Formeln sind zur Zeichnung der Abb. 242 benutzt, in welcher für verschiedene Anstellwinkel die Linien $\xi = 0$ eingetragen und dadurch die Instabilitätsbereiche (schraffiert) abgegrenzt sind. Für diese Kurven sind die Näherungsformeln (33) schlecht zu brauchen, da bei großen Anstellwinkeln und besonders für kleine ν die Größen η^2 von derselben Größenordnung wie H^2 werden, so daß nicht mehr $\pi \ll \Pi$.

Abb. 242. Instabilitätsbereich bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Der Instabilitätsbereich in der μ-ν-Ebene wird mit wachsendem Anstellwinkel immer ausgedehnter. Für $B = 0$ artet der Kegelschnitt in zwei Gerade aus, deren eine mit der ν-Achse zusammenfällt. Bei normalen Flugwinkeln gibt es bei jedem Dämpfungsmoment einen Bereich kleiner und großer statischer Stabilität, welcher dynamische Stabilität verbürgt; im steilen Sturzflug genügt bei jeder Dämpfung jede statische Stabilität dazu; bei $B \leqq 0$ gibt es keinen solchen Bereich kleiner

statischer Stabilität mehr; es muß zur dynamischen Stabilisierung unbedingt ein Mindestwert der statischen Stabilität überschritten sein, der mit wachsendem Dämpfungsmoment wächst. Letztere Gesetzmäßigkeit steht im Gegensatz zu dem Verhalten bei normalen Flugwinkeln, wo bei wachsendem Dämpfungsmoment immer kleinere statische Stabilität erforderlich wird.

Schließlich ein numerisches Beispiel:

Es sei $\mu = 20{,}0$; $\nu = 6{,}00$; $\alpha = 9^0$; A, B, C, D aus Abb. 236. Dann werden nach (29) und (30)

$$\Sigma_1 = -(3{,}50 + 6{,}00) = -9{,}50$$

$$\Pi_1 = 1{,}10 + 3{,}50 \cdot 6{,}00 + 20{,}0 = 42{,}1$$

$$\frac{1{,}78 \cdot 20{,}0}{42{,}1} = 0{,}845$$

$$\sigma_1 = \frac{-1{,}10 \cdot 6{,}00 - 0{,}35 \cdot 20{,}0 + 9{,}50 \cdot 0{,}845}{42{,}1} = -$$

Wir verbessern nun:

$$\Sigma_2 = -9{,}50 + 0{,}13 = -9{,}37$$

$$\Pi_2 = 42{,}1 + 9{,}37 \cdot 0{,}133 - 0{,}845 = 42{,}5$$

$$\pi_2 = \frac{1{,}78 \cdot 20{,}0}{42{,}5} = 0{,}838$$

$$\sigma_2 = \frac{-13{,}6 + 9{,}37 \cdot 0{,}838}{42{,}5} = -0{,}136.$$

Man sieht, wie gut das Verfahren konvergiert und wie einfach es zu handhaben ist. Es folgen nun

$$\Xi = -4{,}68, \quad H = 4{,}54 \quad \xi = -0{,}068, \quad \eta = 0{,}913.$$

Um zu den physikalischen Größen überzugehen, müssen wir auf Gleichung (12) zurückgreifen; mit der Annahme einer Geschwindigkeit $v_0 = 35$ m/s ist alles bestimmt; denn $\frac{G}{qF} = \frac{c_a}{\cos} = 0{,}940$ nach den Annahmen der Abb. 236a, da $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{c_w}{c}$ setzen ist.

Somit folgt der imaginäre Teil von $= 1{,}38$ bzw. $0{,}278\ \frac{1}{s}$; das bedeutet Schwingungen von der Dauer 4,54 bzw. 22,6 Sekunden. Die Dämpfung dieser Schwingungen wird angegeben durch den reellen Teil von $\lambda = -1{,}42$ bzw. $-0{,}0206\ \frac{1}{s}$. Die rascheren Schwingungen werden also auf ein Zehntel ihrer Amplitude in 1,62 s gedämpft, d. i. im Verlauf von 0,357 Schwingungen, die langsamen Schwingungen in 112 s, also nach 4,96 Schwingungen.

Die Stabilitätstheorie läßt sich experimentell nicht leicht nachprüfen; im Fluge ist man viel einfacheren Versuchen noch nicht gewachsen, kann also nicht entscheiden, ob ein Flugzeug eine gedämpfte Schwingung ausführt. Eine ver-

einzelte Beobachtung von Bader ist auch nur sehr vorsichtig mitgeteilt.[1]) Im Modellversuch gibt es kein Kriterium für Stabilität und Instabilität.

In England und Amerika sind nun Modellversuche angestellt worden, welche die Stabilitätstheorie nicht prüfen, aber ergänzen können. Man nimmt die ganze Theorie an und bestimmt experimentell nur die einzelnen Beiwerte, welche in der Gleichung (18) vorkommen. Dies geschieht für die Beiwerte c_a, c_w und c_m in der gewöhnlichen Weise mit Hilfe der aerodynamischen Wage. Die Differentialquotienten c_a', c_w', c_m' müssen durch graphische Differentiation gewonnen werden, sind daher recht unsicher; besonders der Wert c_m' ist sehr empfindlich. Eine ganz andere Methode erfordert die Bestimmung des Dämpfungsmoments, für welches man natürlich beim Modellversuch nicht gleich den Näherungsausdruck (17) verwendet. Man bestimmt das dämpfende Moment am Flugzeugmodell, indem man dasselbe im Schwerpunkt festhält und mittels einer Feder von bekannten Eigenschaften Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführen läßt. Diese Schwingungen verlaufen unter Einfluß der Luftkräfte gedämpft; das Dekrement gibt ein Maß für das Dämpfungsmoment. Ob allerdings dieses Dämpfungsmoment bei Schwingungen dasselbe ist, welches einer langsamen Drehung des Flugzeugs entgegenwirkt, ist fraglich; die verwendeten Schwingungen sind recht rasche; es muß bei der Auswertung auf unendlich langsame Schwingungen extrapoliert werden. Die Luftkräfte, welche bei Beschleunigungen auftreten, müssen sich bei solchen Schwingungen ungleich stärker äußern, als bei der nichtstationären Flugzeugbewegung. Die Übereinstimmung mit unserem Ausdruck (17) ist bei den Bairstowschen Messungen ganz gut, besonders wenn man die einwandfreie Extrapolation auf langsame Schwingungen nach Betz anwendet; der gemessene Wert ist um etwa 20 vH größer als der nach (17) geschätzte. Dagegen stimmen die Hunsakerschen Messungen sehr schlecht; vor allem zeigen sie eine Abhängigkeit des ν vom Anstellwinkel, für welche die Theorie keinen Grund sieht; zieht man neben der Wirkung auf das Leitwerk, welche zu den Ausdrücken (5) und (17) führte, noch alle anderen möglichen Wirkungen der Drehung auf Leitwerk und Flügel in Betracht, so wird man auf Abweichungen von nicht mehr als 5 vH gegenüber dem Ausdruck (5) geführt. Hunsaker findet bei kleinen Anstellwinkeln den doppelten, bei großen immer noch einen um 30 vH größeren Wert.

Im ganzen gewinnt man den Eindruck, daß die Genauigkeit der Messungen nicht der Empfindlichkeit der Beiwerte in der Stabilitätsgleichung entspricht, und daß die Ergebnisse daher nicht sehr zuverlässig sind. Zum Studium dieser englischen Arbeiten sei übrigens bemerkt, daß sie natürlich auf derselben Stabilitätsgleichung beruhen, wie unsere Überlegungen, daß die Ableitung sich aber dadurch von der unseren unterscheidet, daß man nicht ein flugbahnfestes, sondern ein flugzeugfestes Koordinatensystem benutzt.

Wieweit in England diese Stabilitätsrechnungen und -messungen praktisch verwertet worden sind, entzieht sich unserer Kenntnis; in Deutschland sind sie praktisch kaum verwendet worden. Der Weg zu einer solchen Verwendung

[1]) In England hat man eine Versuchseinrichtung für diesen Zweck gebaut und Erfolge erzielt. Aber systematisches Material liegt zur Zeit noch nicht vor.

ist auch nicht klar; denn alle diese Überlegungen bleiben formal, solange man nicht darüber hinaus Bewegungen des Flugzeugs in ihrem ganzen Verlaufe verfolgen und das Berechnete mit dem Beobachteten und dem Gewünschten in Beziehung setzen kann.

§ 5. Bewegung bei sehr großer statischer Stabilität (Phygoiden).

Die Bewegung eines Flugzeugs im Grenzfall $\mu = \infty$ ist die erste und lange Zeit die einzige bekannte allgemeine Bewegung eines Flugzeugs gewesen. Wir sahen oben, daß sich in diesem Falle die Gleichung 4. Grades in zwei Gleichungen 2. Grades spaltet, deren eine zu einer schnell verlaufenden reinen Drehung bei unveränderter Flugbahn gehört, während die andere eine langsam verlaufende Schwerpunktsbewegung mit konstantem Anstellwinkel darstellt. Das Bild der ganzen Bewegung wird im wesentlichen durch die Schwerpunktsbewegung bestimmt; die Drehungsschwingungen klingen rasch ab oder überlagern sich, ohne wesentlich die Schwerpunktsbewegung zu stören; an Stelle des wirklich konstanten Anstellwinkels kann höchstens ein um einen konstanten Mittelwert schnell oszillierender treten. Die Konstanz des Anstellwinkels macht diesen Fall mathematisch besonders einfach; alle rein empirischen Funktionen verschwinden damit aus den mechanischen Gleichungen. Dennoch käme man noch nicht auf einen einfachen analytischen Ausdruck, wenn man nicht noch mehr vereinfachte. Lanchester, dem man die Untersuchung dieser sog. „Phygoidbewegung" dankt, hat noch alle dissipativen Energie verbrauchenden Kräfte (Widerstand) vernachlässigt, welche jedenfalls als klein gegen Gewicht und Auftrieb angesehen werden können; er nimmt an, daß Widerstand und Schraubenschub sich ständig von selbst das Gleichgewicht halten, daß also ihre Differenz (die übrigens unter Umständen, wenn die Geschwindigkeit klein wird, so groß wie die einzelne Größe werden kann) stets weggelassen werden kann.

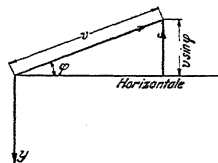



Abb. 243.

Unter diesen Annahmen nehmen die beiden Gleichungen (1) und (2) die Form an:

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \tag{38}$$

$$\Upsilon \tag{39}$$

Die Vernachlässigung der dissipativen Kräfte hat zur Folge, daß die erste Gleichung sich mittels des Energieprinzips in einfacher Weise integrieren läßt; durch Multiplikation mit v kommt sie unmittelbar in die Form, daß links die Zunahme der lebendigen Kraft, rechts die Arbeit der Schwere steht; deshalb empfiehlt es sich, die Höhe y über einem Nullniveau, welche ja die Arbeit der Schwere mißt, als neue Unbekannte einzuführen. Nach Abb. 243 wird

$$v \frac{dv}{dt} = -g v \sin \varphi = g \frac{dy}{dt},$$

wenn y nach unten positiv gerechnet wird.

Integriert:

$$\frac{v^2}{2} = g y + \text{Const.} \qquad (40)$$

Setzen wir diese Konstante $= 0$, so bedeutet das, daß y von einer Höhe aus gerechnet wird, in welcher das Flugzeug die Geschwindigkeit Null besitzt; diese Höhe kann also entweder gar nicht oder nur ohne Geschwindigkeit, also in einer Spitze erreicht werden. Aus dieser Höhe ohne Anfangsgeschwindigkeit abgeworfen, erreicht das Flugzeug — oder ein Modell — in der Höhe y die Geschwindigkeit v.

In Gleichung (39) setzen wir zur Abkürzung

$$k = c_a \frac{\gamma}{2} \frac{F}{G};$$

ferner eliminieren wir die Zeit, indem wir die unabhängige Veränderliche y einführen:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = -v \sin \frac{d\varphi}{dy} = v \frac{d \cos \varphi}{dy}$$

Wir eliminieren auch v mittels Gleichung (40) und erhalten:

$$\frac{d \cos \varphi}{d} = -g \cos \varphi$$

Durch Division mit $\sqrt{y}$ können wir die Variablen trennen:

$$d \quad (\sqrt{y} \cos \varphi) =$$

$$\sqrt{y} \cos \varphi = \frac{2}{3} k y^{\frac{3}{2}} + C$$

oder

$$\cos \varphi = \frac{2}{3} k y + \frac{C}{\sqrt{y}} \qquad (41)$$

Die drei Bestimmungsstücke eines momentanen Flugzustands sind mit den in (41) auftretenden Größen folgendermaßen verknüpft: Der Anstellwinkel ist durch k gegeben, die Geschwindigkeit ist bestimmt durch die absolute Größe von y nach Festlegung des Nullniveaus; die Bahnneigung steckt bei bestimmter Geschwindigkeit in der Konstanten C. Ist in irgendeinem Augenblick der Flugzustand gegeben, so daß die drei Konstanten in (41) festgelegt sind, so enthält (41) den ganzen weiteren Verlauf der Flugbahn, die Bahnneigung in Abhängigkeit von der Höhe. Der Anstellwinkel bleibt konstant, die Geschwindigkeit in jedem Augenblick ist durch (40) gegeben. Es bleibt noch Gleichung (41) zu diskutieren:

Von den Kurven „$\cos \varphi$ als Funktion von y“ in Abb. 244 geht nur die eine, welche zu $C = 0$ gehört, durch den Nullpunkt; die anderen verlaufen hyperbelartig mit der Geraden $C = 0$ und der Ordinate als Asymptoten, und zwar mit der positiven oder negativen Ordinatenachse, je nachdem $C \lesseqgtr 0$. Die Neigung der Geraden $C = 0$ ist durch k, also durch den Anstellwinkel, bestimmt. In der Abbildung ist $c_a =$ und $\frac{G}{F} = 38{,}0 \text{ kg/m}^2$ angenommen, also $k = 0{,}0164 \frac{1}{m}$.

Da cos φ nur zwischen den Werten -1 und $+1$ reell ist, kommt diesen Kurven ein physikalischer Sinn nur zwischen diesen Werten zu. Dadurch wird auch für jeden Fall ein gewisser Bereich von y-Werten abgegrenzt, innerhalb dessen die ganze Bewegung verläuft. Die Bahnkurven hat Lanchester „Phygoiden" genannt.

Die Bewegungskurven und die Geschwindigkeit in jedem Bahnpunkt zeigt Abb. 245. Nur für $C = 0$ wird die Höhe $y = 0$ und somit die Geschwindigkeit Null erreicht; das Flugzeug erreicht diese Höhe in senkrecht nach oben gerichtetem Fluge ($\varphi = +90^0$) und verläßt sie senkrecht nach unten fallend ($\varphi = -90^0$). Eine solche Spitze ist natürlich für das wirkliche Flugzeug nicht möglich.

Ist $C > 0$, so nimmt cos φ nur positive Werte in einem mehr oder minder engen Bereich um $+1$ an; die Flugbahnneigungen gegen die Horizontale schwanken also in gewissen Grenzen um den Wert Null; das Flugzeug führt eine Art Wellenbewegung aus. Wird C so groß, daß die Kurve in Abb. 244 die Gerade $\cos \varphi = +1$ nur berührt, so bleibt das Flugzeug im ganzen Verlauf der Bewegung in einer bestimmten Höhe und behält seine Geschwindigkeit unverändert bei. Dies ist der Spezialfall stationärer Bewegung; daß diese nur horizontal verlaufen kann, liegt an der Vernachlässigung des Widerstandes. Geschwindigkeit und Anstellwinkel, und somit y und k, hängen natürlich zwangsläufig zusammen.

Abb. 244. Zur Phygoidentheorie.

Ist $C < 0$, so verläuft die Bewegung ebenfalls zwischen zwei Höhen y, aber φ kann alle Werte von 0^0 bis 360^0 durchlaufen; die Bahn biegt sich also zeitweise nach rückwärts. Da letztere Richtung ($\cos \varphi < 0$) nach Abb. 244 nur bei den kleinen y-Werten, also mit kleinerer Bahngeschwindigkeit eingehalten wird, rückt das Flugzeug trotzdem nach der x-Richtung vorwärts, und es ergibt sich das in Abb. 245 eingezeichnete Bild. Diese Bewegung ist nun in der Erfahrung sehr bekannt als Schleifenflug oder looping the loop, im Luftkampf unentbehrlich, zuerst 1913 von Pégoud vorgeführt. Um aus dem stationären Flug in den Schleifenflug zu kommen, muß man in Abb. 244 entweder auf der Geraden $\cos \varphi = +1$ bleibend, also im Horizontalflug die Geschwindigkeit erhöhen, oder bei konstanter Geschwindigkeit cos φ stark verkleinern, also die Flugbahn stark drücken oder heben, oder schließlich die Neigung der Geraden $C = 0$ erhöhen durch Vergrößerung des Anstellwinkels. Die letztere Maßnahme wird unter allen Umständen nötig sein; denn nur bei sehr großen Anstellwinkeln wird die statische Stabilität groß genug, so daß nur dort die Extrapolation $\mu = \infty$ mit Sicherheit anwendbar ist. Großen Anstellwinkel mit großer Geschwindigkeit zu kombinieren, verbietet die Rücksicht auf die Festigkeit des Flugzeugs; darum wird man nicht leicht aus dem Sturzflug — wie manchmal angenommen wurde — in den Schleifenflug kommen. Die Diskussion der einzelnen Maßnahmen, der resultierenden Beanspruchungen des Flugzeugs und

der Wirkungen auf die Flugbahn, sowie die Berücksichtigung der wirklichen endlichen Stabilität und der dämpfenden Wirkung der Widerstandskräfte ist ein noch nicht behandeltes, interessantes Problem, das mit den unten auseinandergesetzten Methoden leicht zu erledigen sein muß, und dessen theoretische Lösungen auch bequem mit der Erfahrung verglichen werden können.

In der jetzigen Gestalt ist die Theorie der Phygoidbewegung in einer Hinsicht ganz unbefriedigend; sie gibt nämlich gar keine Gesichtspunkte über die Wirkung einer Steuerbetätigung. In der Theorie der allgemeinen nichtstationären Bewegung haben wir in erster Linie zwei Fragen zu stellen:

1. Wie verläuft eine Störung? Wenn durch einen Zufall, eine Bö od. dgl. die

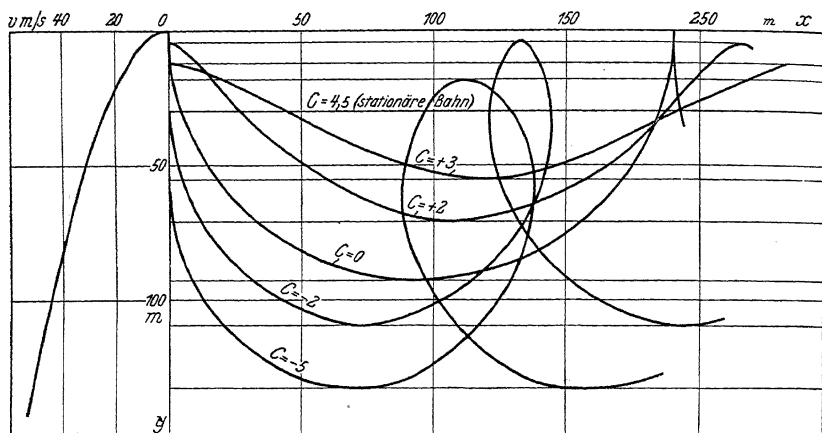



Abb. 245. Phygoiden.

Bestimmungsstücke (v, α, φ, ϑ) der stationären Bewegung in einem Zeitpunkt andere Werte angenommen haben, als sie der stationären Bewegung entsprechen, wie wird der Flug verlaufen? In welcher Weise werden die einzelnen Größen ihre stationären Werte annehmen oder sich davon entfernen?

2. Wie wirkt eine Steuermaßnahme? Wenn der Gleichgewichtszustand durch einen willkürlichen Eingriff — Ruderausschlag, Motordrosselung, Ballastabgabe — gestört wird, in welcher Weise setzt sich das Flugzeug mit seinem neuen Gleichgewichtszustand auseinander?

Die erste Fragestellung ist durch obige Theorie bei unendlicher statischer Stabilität in erster Näherung erledigt; auf die zweite Fragestellung gibt es in diesem Falle keine Antwort; denn, wenn keine Anstellwinkeländerung möglich ist, kann man auch nicht steuern; erst bei Annahme sehr großer, aber endlicher Stabilität lassen sich Gesichtspunkte zu diesem Problem gewinnen.

§ 6. Bewegung bei statischer Indifferenz.

Wir wenden uns nun zum entgegengesetzten Grenzfall des statisch indifferenten Flugzeugs ($\mu = 0$), der nach den Darlegungen des § 4 im II. Kapitel die Bewegungen des praktisch brauchbaren Flugzeugs im normalen Flug viel besser annähern muß, als der vorige Grenzfall.

Diesmal ist durch Vernachlässigung der dissipativen Kräfte keine wesentliche Vereinfachung zu erzielen; man gelangt dadurch nicht zu einem durchsichtigen analytischen Ausdruck, wie bei der Phygoide; denn die empirische Funktion c_a der Variablen α bleibt in der Gleichung stehen. Wir betrachten daher die unverkürzten Gleichungen unter der Voraussetzung, daß m in Gleichung (6) von α unabhängig ist. Wir nehmen wieder eine Störung an; das Flugzeug befinde sich am Anfang in einem solchen Zustand, daß kein Gleichgewicht vorhanden sei; dieser Zustand sei aber ungewollt, d. h. das Steuer sei in der richtigen, Gleichgewicht erzwingenden Lage. Letzteres ist beim indifferenten Flugzeug nur bei einer ganz bestimmten Ruderlage, die für jeden Anstellwinkel dieselbe ist, möglich; diese Ruderlage ist durch die Gleichung

$$m\,(s) = 0$$

gegeben. In diesem Fall führt Gleichung (6)

$$dt^2 \qquad \frac{n}{J}\, v\, \frac{d\vartheta}{dt}$$

zur Lösung

$$\frac{d\vartheta}{dt}$$

Ist also am Anfang der Bewegung keine Drehung des Flugzeugs vorhanden $\left(\frac{d\vartheta}{dt} = 0\right)$, so bleibt sie während der ganzen Bewegung Null. Die Lage ϑ des Flugzeugs zur Horizontalen, die am Anfang vorhanden ist, bleibt unverändert und bestimmt die Neigung und Geschwindigkeit des möglichen stationären Flugs. Darin liegt die Indifferenz eines solchen Flugzeugs; wenn die Ruderlage überhaupt so ist, daß das Flugzeug im Gleichgewicht sein kann, behält es eine zufällig eingenommene Winkellage im Raum unverändert bei. Dasselbe Verhalten zeigten wir oben § 4 schon bei kleinen Schwingungen. Der Gegensatz zur Phygoidbewegung, bei welcher nicht ϑ, sondern α konstant bleibt, ist charakteristisch.

Die anderen Fluggrößen folgen nun aus den Gleichungen (1) und (2), welchen wir unter Berücksichtigung der Beziehung $\vartheta = \vartheta_0 = \text{Const}$, unter Vernachlässigung von $S \sin \beta$ und mit $\cos \beta = 1$ die Form geben:

$$d\,v \;=\; \frac{S\,g}{G} \tag{42}$$

$$v\,\frac{d\alpha}{dt} = \qquad (\vartheta_0 - \alpha) - \quad 2 \quad G$$

Der Charakter der Lösungen wird entscheidend dadurch bestimmt, daß die einzelnen Summanden auf der rechten Seite von (43) wesentlich größer sind als die auf der rechten Seite von (42); die bahnsenkrechten Kräfte sind von höherer Ordnung als die in der Bahn wirkenden, eine für den normalen Flug fundamentale Tatsache. Bei einer Abweichung der Werte α und v von ihren Gleichgewichtswerten tritt in (43) eine größere Differenz der äußeren und der Luftkräfte auf als in (42), die Zentrifugalbeschleunigung am Flugzeug wird größer als die Bahnbeschleunigung; der Anstellwinkel ändert sich relativ schneller als die Fluggeschwindigkeit. Nur in dem Fall, daß die rechte Seite von (43) klein wird, daß also das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte nur wenig gestört ist, werden die beiden Beschleunigungen von der gleichen Größenordnung. Jede Störung muß also zeitlich in zwei getrennten Akten verlaufen: erst stellt sich bei fast gleichbleibender Geschwindigkeit der Anstellwinkel auf den Wert ein, welcher bei dieser Geschwindigkeit dem Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte entspricht; dann nimmt die Geschwindigkeit langsam ihren Gleichgewichtswert an, während ständig das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte näherungsweise gewahrt bleibt.

Im einzelnen kann man die Verhältnisse klarstellen, indem man für bestimmte Anfangswerte die Gleichungen (42) und (43) numerisch integriert; man setzt die Anfangswerte in die rechten Seiten ein, erhält unmittelbar die Zahlenwerte für die Differentialquotienten, läßt diese Differentialquotienten für ein kleines Zeitintervall (etwa $^1/_{10}$ s) gelten und rechnet mit dem so erhaltenen Endwerten von v und α als neuen Anfangswerten oder als Mittelwerten des neuen Zeitintervalls. Dieses Verfahren ist sehr einfach durchführbar. Man trägt die Ergebnisse am besten in ein v-α-Koordinatensystem ein, für welches die Zeit nur die Rolle eines Parameters spielt; da ϑ einen bestimmten konstanten Wert hat, ist der ganze momentane Flugzustand durch einen Punkt in diesem Koordinatensystem dargestellt. Die Integralkurve in diesem Koordinatensystem enthält alle Flugzustände, die das Flugzeug bei einer beschleunigten Bewegung durchläuft. In Abb. 246 sind die beiden Kurven teilweisen Gleichgewichts eingetragen, welche man durch Nullsetzen der rechten Seiten von (42) und (43) erhält. Für Kurve I ist $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, für Kurve II $\frac{dv}{dt} = 0$. Befindet sich also das Flugzeug z. B. in einem Flugzustand, der durch einen Punkt der Kurve I dargestellt wird, so ändert sich in diesem Augenblick sein Anstellwinkel nicht, wohl aber seine Geschwindigkeit. Nur in den Schnittpunkten der beiden Kurven herrscht vollständiges Gleichgewicht. Die Kurven grenzen Gebiete in der v-α-Ebene ab, in welchen Anstellwinkel bzw. Geschwindigkeit sich mit verschiedenem Vorzeichen ändern, und zwar lehren (42) und (43), daß α und v wachsen, wenn sie auf den durch die Schraffierung angedeuteten Seiten der Kurven liegen, andernfalls sich vermindern. Der die Flugbewegung darstellende Punkt wird sich daher normalerweise auf die Gleichgewichtskurven zu bewegen; die Geschwindigkeit nimmt zu, wenn sie kleiner ist als die zu dem betreffenden Anstellwinkel gehörige Geschwindigkeit, bei welcher die Kräfte in der Bahnrichtung im Gleichgewicht sind usw. Nur die für den praktischen Flug belanglosen Winkel

über dem Auftriebsmaximum zeigen eine Ausnahme, welche die Kurve mit dem Anfangspunkt C illustriert; befindet sich das Flugzeug einmal in einem solchen Anfangszustand, so wächst der Anstellwinkel weiter. Bei allen diesen hohen Anstellwinkeln ist der stationäre Flug instabil, ein Verhalten, welches schon aus der Lösung von Gleichung (25) gefolgert werden konnte.

Die in Abb. 246 eingezeichneten v-α-Kurven, welche die Bewegung eines gestörten Flugzeugs darstellen, sind Ergebnisse numerischer Integration; sie zeigen die Möglichkeit, wie ein durch eine Bö oder irgendeine sonstige Störung hervorgerufener Anfangszustand verlassen wird, und wie sich das Gleichgewicht einstellt. An allen Kurven zeigt sich der oben als typisch bezeichnete Ablauf in zwei Akten; die Kurve verläuft erst einigermaßen parallel zur v-Achse, bis sie in die Nähe der Gleichgewichtskurve für die bahnsenkrechten Kräfte kommt; dann verläuft sie in deren unmittelbarer Nähe, und zwar auf der schraffierten Seite $\left(\frac{d\alpha}{dt} > 0\right)$, wenn die Geschwindigkeit sinken, auf der nichtschraffierten Seite $\left(\frac{d\alpha}{dt} < 0\right)$, wenn sie wachsen muß. Auf diese Weise gelangt das Flugzeug in seinen vollkommenen Gleichgewichtszustand.

Abb. 246.
Indifferentes Flugzeug. v-α-Diagramm.

Interessant ist im Hinblick auf die Überlegungen der dynamischen Stabilität, wie das Flugzeug aus dem Anfangszustand B in seinen Gleichgewichtszustand übergeht; obwohl dieser sich durchaus stabil verhält, entfernt sich α anfangs weiter von seinem Gleichgewichtswert, während v unverändert bleibt. Ferner ist noch auf die Bewegung D hinzuweisen; bei dieser gelangt die darstellende Kurve überhaupt nicht in die unmittelbare Nähe der Kurve I; das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte stellt sich überhaupt nicht her; der Anstellwinkel wächst unbegrenzt weiter und das Flugzeug verläßt ganz den Bereich vernünftiger Flugzustände. Diese Bewegung ist ganz unabhängig von der Größe von ϑ_0 und nur dadurch verursacht, daß die Geschwindigkeit unter den kleinsten Wert herabgesunken ist, bei welchem noch ein Gleichgewicht bahnsenkrechter Kräfte überhaupt möglich ist, also unter den Wert (mit $\cos\varphi = 1$)

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\frac{G}{F}}$$

Dieser Bewegungstypus, der offenbar eine Gefahr für den Flug bedeutet, der früheren Stabilitätsuntersuchung verborgen bleiben; wir werden uns mit

diesem „überzogenen Flugzustand" noch allgemeiner und ausführlicher zu befassen haben.

Abb. 247 zeigt den zeitlichen Verlauf der beiden Größen α und v im Fall einer Störung von der Art A in Abb. 246. Dabei sind als Gleichgewichtswerte (durch ϑ_0 und die Konstruktion des Flugzeugs gegeben) $\alpha = 3^0$, $v = 36{,}2$ m/s angenommen. Da α und v nicht unmittelbar vergleichbare Größen sind, zeigt die Abbildung auch die beiden Beschleunigungen $\frac{dv}{dt}$ und $v\frac{d\alpha}{dt}$. Trotzdem die Störung des Anstellwinkels recht gering, die Geschwindigkeitserhöhung sehr groß gewählt sind, sieht man schön, wie anfangs die Zentrifugalbeschleunigung das 5—6fache der Bahnbeschleunigung ist, und wie das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte, wenn es einmal erreicht ist, nahezu festgehalten wird. Ausführlichere Rechnung zeigt, daß bis zur Herstellung des Gleichgewichts etwa $^1/_2$ Minute vergeht.

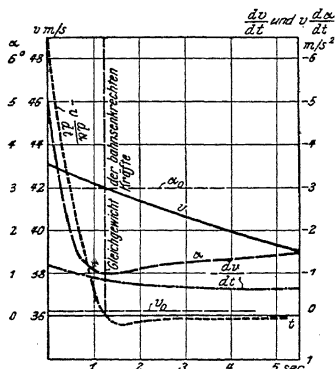



Abb. 247. Verlauf einer Störung beim indifferenten Flugzeug.

Die Kurven I und II liegen verschieden für verschiedene ϑ_0; die Unterschiede zwischen den für die ganze Bewegung wichtigeren Kurven I sind aber sehr gering, solange ϑ_0 nicht stark negativ wird, solange man also nicht steile Sturzflüge betrachtet; daß für verschiedene ϑ_0 der Punkt vollkommenen Gleichgewichts verschieden liegt, rührt fast ausschließlich von der starken Abhängigkeit der Kurve II von ϑ_0 her.

Man kann die Bewegung des indifferenten Flugzeugs auch analytisch fassen: man hat für den ersten Akt $v = \text{Const}$ zu setzen und c_a — was bekanntlich in sehr weiten Grenzen möglich ist — als linear abhängig von α anzusehen; für den zweiten Akt muß man um irgendeinen auf der Kurve I gelegenen Punkt alle Funktionen linear entwickeln in der gleichen Weise, wie es bei unseren Stabilitätsbetrachtungen vom Gleichgewichtszustand aus geschah. Man gelangt auf diese Weise zu lauter linearen, also in geschlossener Form lösbaren Gleichungen. Diese Lösungen sind vielfach einfacher zu diskutieren als die Differentialgleichungen selbst mit Hilfe der numerischen Integration. Wir werden die analytische Lösung im allgemeinen Fall ausführlich bringen und unterdrücken sie an dieser Stelle, da alles über den Grenzfall Wissenswerte in den Abb. 246 und 247 enthalten ist.

Über die Steuerung läßt sich in diesem Grenzfall einiges aussagen. Das indifferente Flugzeug wird dadurch gesteuert, daß man von einem Wert ϑ_0 auf einen anderen übergeht. Denkt man sich dies erreicht, so verläuft die weitere Bewegung ganz in der Weise des zweiten Aktes längs der Gleichgewichtskurve für die bahnsenkrechten Kräfte. Die Umstellung des Flugzeugs von einem ϑ_0-Wert auf den anderen kann nur dadurch erreicht werden, daß ein momentaner Ruderausschlag den Summanden m in Gleichung (6) auf einen endlichen Wert bringt, nach einer

sehr kurzen Zeit der Ruderausschlag zurückgenommen und dadurch m wieder zu Null gemacht wird. Die Folge ist, daß erst eine Drehgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ entsteht, welche sich dann abdämpft. Die ganze Bewegung vollzieht sich rasch so daß die Geschwindigkeit konstant bleibt. Im ersten Teil der Bewegung gilt die Gleichung:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{m}{n} v \left(1 - e^{-\frac{nv}{J}t}\right)$$

woraus

$$\vartheta = -\frac{m}{n} vt - \frac{mJ}{n^2}\left(e^{-\frac{nv}{J}t} - 1\right) + \vartheta_0, \qquad (44)$$

wenn ϑ_0 den Anfangswert bedeutet. Im zweiten Teil seien die Anfangswerte ϑ bzw. $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_1$; es gilt die Gleichung:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_1 e^{-\frac{nv}{J}t}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 - \frac{J}{nv}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_1 \left(e^{-\frac{nv}{J}t} - 1\right). \qquad (45)$$

Der Endwert ϑ_2, dem das Flugzeug zustrebt, wird

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{J}{nv}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_1 \qquad (46)$$

Abb. 248 gibt ein Beispiel für die Änderung von ϑ mit der Zeit; der Ruderausschlag ist dabei so groß, daß $m = 0{,}1\ \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}}$ wird, und nach $^1/_2$ s wieder zurückgenommen. Dies bedeutet eine Änderung von $\frac{M}{q}$ um etwa 1,6 m³; die dadurch bewirkte Störung des Momentengleichgewichts kann man nach irgendeinem Diagramm des vorigen Kapitels beurteilen. Die anderen Zahlwerte der Rechnung sind: $n = 15{,}0$ kg s², $J = 300$ kg m s², $v = 27{,}0$ m/s.

Die Steuerwirkung beruht primär auf einer Änderung von ϑ; diese Änderung erzwingt infolge Gleichung (2), welche man nunmehr nicht auf die einfache Form (43) bringen kann, eine Änderung von φ und α. Am Anfang der Bewegung nämlich, wenn das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte nicht gestört ist, bleibt $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, so daß zunächst α sich wie ϑ ändert. Dadurch aber wird das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte gestört und sekundär φ geändert, also die Flugbahn gekrümmt. Die ganze Bewegung hat aber den einfachen Grenzfallcharakter nicht mehr, soll daher an dieser Stelle nicht weiter erörtert werden.

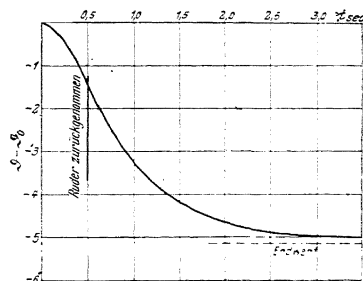



Abb. 248.
Steuerung beim indifferenten Flugzeug.

Dagegen lohnt sich wohl der Hinweis auf die in weiten Grenzen mögliche **Steuerung mit dem Motor.** Wird der Motor mehr oder weniger gedrosselt, so wird weder am Momentengleichgewicht noch am Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte etwas geändert; es bleiben daher $\vartheta = \vartheta_0$ und die Kurve I in Abb. 246 unbeeinflußt; nur die Kurve II kann alle möglichen in Abb. 249 angedeuteten Lagen einnehmen. Die Bewegung verläuft dann entlang Kurve I wie der zweite Akt der allgemeinen Störungsbewegung, also sehr ruhig und fliegerisch angenehm, aber langsam. Natürlich ist eine solche Steuerung nur so lange möglich, als bei dem betreffenden ϑ die Kurven I und II noch einen Schnittpunkt haben; der Übergang zum flachen Gleitflug $\left(\frac{S}{G} = 0\right)$ wird also nur bei ganz kleinen ϑ_0 möglich sein. (In der Abbildung ist $\vartheta_0 = 10^0$ angenommen.) Sinkt die Motorkraft stärker $\left(\text{Kurve } \frac{S}{G} = 0{,}1 \text{ in Abb. 249}\right)$, so verläuft die Bewegung längs der Kurve I bis zu deren Minimum, von da an, infolge der oben diskutierten Instabilität, mit rasch wachsendem Anstellwinkel. **Das Flugzeug bleibt im Raum liegen** ($\vartheta = \vartheta_0$); **aber die Flugbahn krümmt sich stärker und stärker nach unten** $\left(\frac{d\gamma}{dt} < 0\right)$. Diese Bewegung kommt in der Wirklichkeit indes nicht zur Beobachtung, da für große Anstellwinkel niemals statische Indifferenz vorhanden ist.

Abb. 249. Steuerung mit dem Motor beim indifferenten Flugzeug.

§ 7. Störung und Steuerung.

In den Grenzfällen war die Diskussion deshalb einfach, weil sich die drei Bewegungsgleichungen durch physikalische Gesichtspunkte trennen ließen. Die Festsetzung der statischen Stabilität gab unmittelbar die Lösung der Momentengleichung; die Gleichung der Bahnrichtungskräfte wurde in einem Fall durch das Energieintegral, im anderen Fall durch die Erkenntnis der langsamen Veränderlichkeit der Geschwindigkeit befriedigt; die dritte Gleichung ergab die charakteristische Lösung.

Wenden wir uns nunmehr zum allgemeinen Fall beliebiger statischer Stabilität, so müssen wir die drei Bewegungsgleichungen nebeneinander betrachten. Wir

können aber unsere allgemeineren Überlegungen sinngemäß an die Rechnungen über das indifferente Flugzeug anschließen. Zunächst bleiben bei einer Störung im allgemeinen die entstehenden Bahnrichtungskräfte klein gegen die bahnsenkrechten Kräfte; es tritt also auch im allgemeinen Fall die Geschwindigkeitsänderung im Anfang einer Bewegung zurück gegenüber den Drehbewegungen; nur bestimmt nicht bloß — wie in den Grenzfällen — eine einzige Drehung das Verhalten des Flugzeugs, sondern die Drehung des Flugzeugs $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ und die Drehung der Flugbahn $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ werden durch verschiedene Einflüsse geregelt. Das Flugzeug dreht sich unter dem Einfluß entstehender Momente, also insbesondere, wenn mit Willen des Führers durch einen Steuerausschlag das Momentengleichgewicht gestört wird; die Flugbahn krümmt sich, wenn das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte gestört wird. Die eine Drehung hat die andere immer zur sekundären Folge, und zwar nur durch Vermittlung der Luftkräfte, die weder von ϑ noch von φ, sondern nur von ihrer Differenz, dem Anstellwinkel α abhängen. Nur durch Vermittlung des Anstellwinkels wirkt die Kraft auf die Lage des Flugzeugs im Raum und das Moment auf die Flugbahn. Diese Zusammenhänge geben der gestörten und gesteuerten Bewegung des Flugzeugs ihren besonderen Charakter.

Um die Verhältnisse schön zu überblicken, benutzt man am besten wieder ein Diagramm in der Art unserer Abb. 246. Nur haben wir jetzt drei Veränderliche, da ϑ nicht festliegt. Wir stellen den Flugzustand durch einen Punkt in einem (v, α, ϑ)-Raum dar und verfolgen den Verlauf einer beschleunigten Flugzeugbewegung, indem wir die Bahn dieses Punktes im (v, α, ϑ)-Raum aufsuchen. In diesem Raum liegen alle Punkte, welche Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte darstellen, auf einer Fläche; die Schnittkurven dieser Fläche mit den Ebenen $\vartheta = \text{Const}$, welche wir in Abb. 246 schon betrachteten, liegen im Bereich der normalen Flugzustände, nämlich für jeden Motorflug und flachen Gleitflug sehr nahe beieinander (Abb. 250); da diese Fläche für die ganze Bewegung entscheidende Bedeutung besitzt, gibt diese Unabhängigkeit von ϑ die Möglichkeit eines guten Überblicks über die ganzen Verhältnisse in einem ebenen (v, α)-Diagramm; das ist der große Vorteil dieser Darstellung.

Die Fläche des Gleichgewichts bahnsenkrechter Kräfte teilt wieder den Raum in zwei Teile, welche sich aber im allgemeinen Fall nicht wie beim indifferenten Flugzeug durch das Vorzeichen von $\frac{d\alpha}{dt}$, sondern durch das Vorzeichen von $\frac{d\varphi}{dt}$ unterscheiden. Liegt der Punkt, welcher den augenblicklichen Flugzustand darstellt, auf der schraffierten Seite der Kurve I von Abb. 246, so ist nach Gleichung (2) $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, die Flugbahn krümmt sich nach unten; liegt er auf der anderen Seite, so krümmt sie sich nach oben.

Auch für die Drehung des Flugzeugs gibt es eine derartige charakteristische Kurve III in unserem Diagramm Abb. 251, nämlich die Ebene $\alpha = \text{Const}$, auf welcher in Gleichung (6) für gegebene Ruderlage, also festes s, die Größe m verschwindet; dies ist die Ebene, in welcher die Momente im Gleichgewicht sein

können. Auch diese Ebene ist von ϑ unabhängig, erscheint deshalb übersichtlich als Gerade im (v, α)-Diagramm. Auf den beiden Seiten dieser Ebene haben die Momente verschiedenen Drehsinn; die Drehbewegung des Flugzeugs wird in verschiedener Weise erzeugt oder geändert. Und zwar hängt die Art und Weise dieses Einflusses von der statischen Stabilität des Flugzeugs ab. Auf der schraffierten Seite der Geraden III wirkt auf das stabile Flugzeug ein kopflastiges Moment, auf das instabile ein schwanzlastiges. Die Auswirkung dieser Momente auf die Drehung des Flugzeugs ist nicht so einfach wie die Auswirkung der bahn-

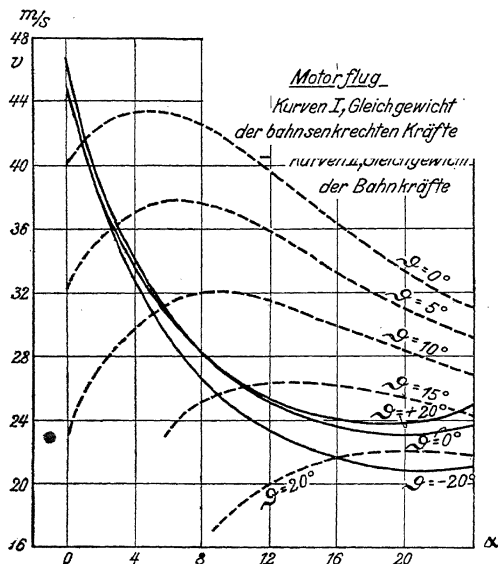



Abb. 250. Kurven teilweison Gleichgewichts im allgemeinen Fall.

senkrechten Kräfte auf die Krümmung der Flugbahn; denn sie ergeben nicht die Drehgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ selbst, sondern nach (6) die Drehbeschleunigung, und diese wird noch beeinflußt durch die Dämpfung. Trotzdem kann das besonders interessante Einsetzen der Drehbewegung bei Störung und Steuerung dem Diagramm qualitativ leicht entnommen werden.

Die dritte Kurve (II) unseres Diagramms, welche das Gleichgewicht der Bahnrichtungskräfte darstellt, ist von geringerer Bedeutung, da der Ausgleich dieser Kräfte viel langsamer vor sich geht und die Geschwindigkeitsänderung zurücktritt gegenüber den beiden Drehbewegungen. Auch ist die Übersicht über die Geschwindigkeitsänderung nicht so klar im ebenen Diagramm zu geben. Kurve II

in Abb. 251 gibt den Durchschnitt der Gleichgewichtsfläche mit derjenigen ϑ-Ebene, für welche bei der bestimmten Ruderstellung volles Gleichgewicht herrscht; aber die Durchschnittskurven mit den übrigen ϑ-Ebenen sind von dieser Kurve ganz verschieden (siehe Abb. 250).

Wir betrachten nun zunächst eine Störung, welche durch den Punkt A in Abb. 251 dargestellt wird; der Anfangswert von $\frac{d\vartheta}{dt}$ sei Null, d. h. eine Drehung des Flugzeugs soll erst infolge der Störung zustande kommen; die Anfangswerte

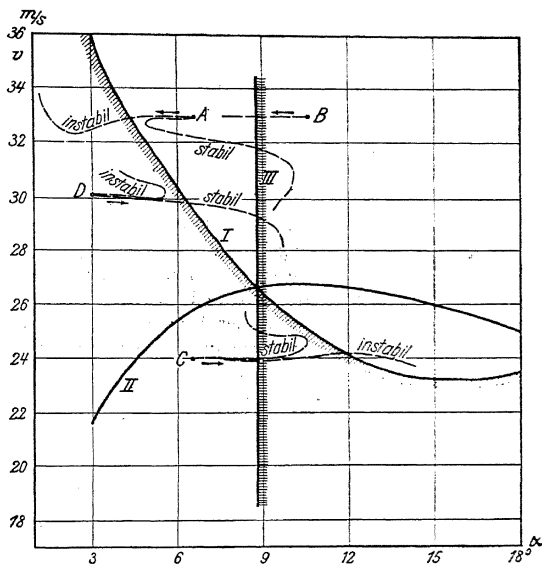



Abb. 251. Allgemeines v-α-Diagramm.

von ϑ und φ sind nebensächlich. Im ersten Augenblick setzt eine Krümmung der Flugbahn ein, welche durch die Lage des Punktes A numerisch bestimmt ist, und zwar eine Krümmung nach oben. Das Flugzeug dreht sich im ersten Augenblick noch nicht, infolgedessen ist für den zeitlichen Verlauf des Anstellwinkels allein das Vorzeichen von $\frac{d\varphi}{dt}$ maßgebend, der Anstellwinkel nimmt zunächst ab; die Bewegung wird also im ersten Augenblick durch eine Kurve dargestellt, welche — wie oben beim indifferenten Flugzeug — auf die Kurve I zu verläuft. Das Moment erzeugt inzwischen nach und nach eine Drehung des Flugzeugs $\frac{d\vartheta}{dt}$, und zwar bei statischer Stabilität eine Drehung im positiven Sinn, also der

Flugbahn nach. Flugzeug und Flugbahn drehen sich nach oben. Mit der Zeit wird $\frac{d\vartheta}{dt}$ immer größer, $\frac{d\varphi}{dt}$ immer kleiner, je mehr sich die Kurve, welche der darstellende Punkt von A aus beschreibt, der Kurve I annähert. Infolgedessen wird die Differenz der beiden Drehungen, die Anstellwinkeländerung $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}$ immer kleiner und muß schließlich ihr Vorzeichen wechseln. Dies muß vor Erreichen der Kurve I der Fall sein; denn an dieser wird ja $\frac{d\varphi}{dt}$ jedenfalls Null, während $\frac{d\vartheta}{dt}$ einen positiven Wert erreicht hat. Die „Bewegungskurve" von A aus[1]) wird also die Kurve I (besser gesagt die Fläche I) nicht überschreiten, die Flugbahn wird anhaltend in die Höhe steigen, und zwar immer steiler; die Drehung des Flugzeugs wird hingegen gehemmt, je mehr sich die Bewegungskurve wieder der Geraden III nähert; $\frac{d\vartheta}{dt}$ nimmt ab und wird nach Überschreiten von III schließlich negativ; da $\frac{d\varphi}{dt}$ gleichzeitig stark wächst, fällt der Anstellwinkel bald wieder. Die ganze Drehung verläuft periodisch, so daß der Anstellwinkel innerhalb bestimmter Grenzen bleibt, die um so enger sind, je größer die statische Stabilität des Flugzeugs ist. Die Flugbahn hebt sich ständig, und zwar in periodischer Folge mehr oder weniger schnell, das Flugzeug pendelt in mäßigen Grenzen um die Flugbahn, der Winkel ϑ zeigt zwar periodisches Steigen und Fallen, wächst aber im Mittel doch an. Die Kurve II sinkt mit wachsendem ϑ zu tieferen Werten von v, entfernt sich also im Laufe der Bewegung vom Punkte A. Die Geschwindigkeit wird daher immer rascher sinken, was ja physikalisch bei einer immer steiler ansteigenden Bewegung selbstverständlich ist. So nähert sich unsere Bewegungskurve schließlich mit abnehmender Geschwindigkeit — also im Verlauf des langsamen Ausgleichs der Bahnrichtungskräfte der Kurve I in der Nähe ihres Schnittpunktes mit der Kurve III; dort kann sie dieselbe überschreiten; dann wird $\frac{d\varphi}{dt}$ negativ, die Bahn sinkt wieder, und nach und nach wird sich in der Art gedämpfter Schwingungen der stationäre Flug wieder einstellen. Dieser weitere Verlauf der Bewegung wird wohl von der Stabilitätstheorie richtig dargestellt, er hat aber kaum ein großes praktisches Interesse; denn der Führer wird nie das Flugzeug so lange sich selbst überlassen.

Bei statischer Instabilität zeigt die Flugbahn im ersten Augenblick dasselbe Verhalten wie bei Stabilität; aber das entstehende Drehmoment beschleunigt das Flugzeug im entgegengesetzten Drehsinn; das Flugzeug wird nicht der Flugbahn nach, sondern von ihr weggedreht. Während φ steigt, sinkt ϑ; der Anstellwinkel vermindert sich schnell; die Bewegungskurve überschreitet die Kurve I, und dann senkt sich die Flugbahn immer rascher; in diesem Fall folgt die Flugbahn dem Flugzeug nach. Die Geschwindigkeit kann bei dieser Bewegung im ersten Augenblick nicht nennenswert sinken, sie steigt

[1]) Diese Kurven sind nicht gerechnet; sie sollen nur den allgemeinen Verlauf andeuten.

im Laufe der Bewegung sogar an; denn die Kurve II rückt mit fallendem ϑ zu größeren Geschwindigkeitswerten, und die Bewegungskurve wird daher bald in das Gebiet von positivem $\frac{dv}{dt}$ einrücken. Die momentane Geschwindigkeitserhöhung und Anstellwinkelerniedrigung, welche unser Anfangswert A bezeichnet, hat ein Abwärtsstürzen des Flugzeugs zur Folge. Eine automatische Rückkehr zum stationären Flugzustand gibt es dabei nicht.

Betrachten wir den Punkt B als Ausgangspunkt der gestörten Bewegung, so ändert sich das ganze Bild kaum. Dadurch, daß im ersten Augenblick $\frac{d\varphi}{dt}$ einen großen, $\frac{d\vartheta}{dt}$ aber den Wert Null hat, wird die Bewegungskurve an die Kurve I herangezogen und die Bewegung der beschriebenen vom Punkte A aus nach wenigen Augenblicken sehr ähnlich. Auch in diesem Fall wird bei Instabilität das Flugzeug beschleunigt abwärts stürzen, nicht etwa steiler und verzögert ansteigen, wie man vielleicht erwarten möchte. Die letztere Bewegung des instabilen Flugzeugs wird bei einer Störung eintreten, bei welcher, wie im Falle C, die Geschwindigkeit unter den Gleichgewichtswert gesunken ist, während eine Störung D zum Sturz nach unten wie bei A führen muß, im Sinne der eingezeichneten Bewegungskurven. In erster Linie entscheidend für den Ablauf dieser Bewegungen ist es, auf welcher Seite von III die Bewegungskurve auf die Kurve I auftrifft. Da sich bis zu diesem Zeitpunkt die Geschwindigkeit kaum verändert hat, ist dies in Abb. 251 ohne weiteres zu erkennen. Die von der Störung C hervorgerufene Bewegung eines statisch stabilen Flugzeugs verläuft ganz analog denen von A und B aus; nur haben wir hier ein ständiges Sinken der Flugbahn mit Geschwindigkeitvermehrung. Von D aus wird die Bewegung der früher beschriebenen ähneln; nur im ersten Augenblick senkt sich die Flugbahn, später steigt sie ständig, bis die Umgebung des Schnittpunkts der Kurven I, II und III erreicht ist.

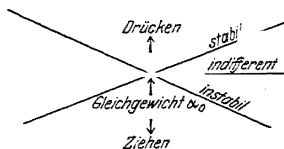



Abb. 252.

Ebenso können wir den Steuerungsvorgang qualitativ überblicken. Der Anfangszustand ist in diesem Fall ein Gleichgewichtszustand; das Gleichgewicht der Kräfte wird auch durch den Ruderausschlag zunächst nicht gestört; aber es entsteht ein zusätzliches Moment. Die Größe m verläuft bei bestimmtem Parameter s für das stabile und das instabile Flugzeug so, wie es Abb. 252 andeutet. Durch Steuerbetätigung ändert sich der Parameter s, und zwar wird durch „Ziehen" ein Schwanzlastmoment auf das Flugzeug ausgeübt, durch „Drücken" ein Kopflastmoment. Da wir Kopflastmomente stets positiv gerechnet haben, werden die Kurven „m als Funktion von α" durch Steuerbetätigung im Sinne der Pfeile in Abb. 252 verschoben. Messungen an Modellen zeigen, daß sie in erster Näherung parallel zu ihrem ursprünglichen Verlauf verschoben werden. Hier zeigt sich ein

wichtiger Unterschied zwischen stabilem und instabilem Verhalten. Wird das Flugzeug z. B. gedrückt, so rückt der Punkt $m = 0$, welcher das Momentengleichgewicht darstellt, beim stabilen Flugzeug zu kleineren Anstellwinkeln, welchen im Gleichgewichtsfall größere Geschwindigkeit und ein mehr abwärts gerichteter Flug entspricht, beim instabilen Flugzeug aber zu höheren Anstellwinkeln, welchen im Gleichgewichtsfall nicht der durch Drücken erstrebte Flugzustand entspricht. Das instabile Flugzeug führt dennoch die Bewegung aus, welche durch die Steuermaßnahme erzwungen wird; denn es hat nicht die Neigung, sich seinem Gleichgewichtszustand zu nähern, sondern sich daraus zu entfernen.

In Abb. 253 ist die Bewegung dargestellt, welche durch „Ziehen“ hervorgerufen wird. Der Ausgangspunkt der Bewegung liegt jedenfalls auf der Kurve des Gleichgewichts der bahnsenkrechten Kräfte; deshalb ist $\frac{d\varphi}{dt}$ im ersten Augenblick gleich Null; aber $\frac{d\vartheta}{dt}$ ist positiv, und zwar verhalten sich das stabile und das instabile Flugzeug in dieser Beziehung gleich. Der Anstellwinkel wächst, und mit ihm nach den Eigenschaften unseres Diagramms $\frac{d\varphi}{dt}$. Also nicht nur das Flugzeug, sondern auch die Flugbahn drehen sich sowohl bei Stabilität wie bei Instabilität im gewünschten Sinn. Im weiteren Verlauf der Bewegung nimmt das drehende Moment beim stabilen Flugzeug ab, beim instabilen wächst es; infolgedessen wird die Drehung des Flugzeugs im ersteren Fall langsamer wachsen als im letzteren, und dasselbe Verhalten müssen auch der Anstellwinkel und die Drehung der Flugbahn — das eigentliche Ziel der Steuermaßnahme — zeigen. Beim stabilen Flugzeug ist dieser Bewegung eine Grenze gesetzt; nach Überschreiten der Ebene III wird $\frac{d\vartheta}{dt}$ wieder kleiner, schließlich negativ, und es setzt eine periodische Bewegung ein, wie sie oben bei Besprechung der Störung beschrieben wurde; beim instabilen Flugzeug steigen Flugzeug und Flugbahn immer steiler an. Das instabile Flugzeug ist also empfindlicher gegen einen Ruderausschlag als das stabile; seine Flugbahn krümmt sich beim gleichen Ruderausschlag schneller, oder es ist zur Erzielung der gleichen Wirkung auf die Flugbahn ein kleinerer Ausschlag nötig. Dafür nähert es sich nicht von selbst einem Gleichgewichtszustand und würde z. B. beim Ziehen beliebig weiter steigen und zu gefährlichen Flugzuständen gelangen, wenn nicht ein neuer entgegengesetzter Ruderausschlag es in die Nähe des erstrebten Gleichgewichts zurückführte. Auch die Geschwindig-

Abb. 253. Wirkung einer Steuermaßnahme.

keit ändert sich beim instabilen Flugzeug schneller als beim stabilen; in unserem Beispiel wächst ϑ bei Instabilität schneller, die Bewegungskurve entfernt sich daher schneller von der Fläche des Gleichgewichts der Bahnrichtungskräfte, welche ja mit wachsendem ϑ zu kleineren Geschwindigkeitswerten verschoben wird; und mit wachsender Entfernung von dieser Fläche wächst auch der absolute Betrag von $\frac{dv}{dt}$.

Um nun im Einzelfall eine gestörte oder gesteuerte Bewegung unter beliebigen Verhältnissen quantitativ berechnen zu können, macht man sich die relative Bedeutungslosigkeit der Geschwindigkeitsänderung zunutze und läßt die

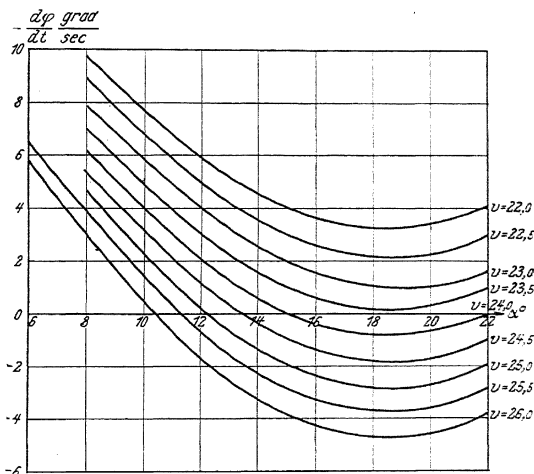



Abb. 254. Drehgeschwindigkeit der Flugbahn in Abhängigkeit vom Anstellwinkel und von der Fluggeschwindigkeit.

Gleichung (1) in erster Näherung zurücktreten, während man v als Parameter in den anderen Gleichungen einen guten Mittelwert gibt. Man zeichnet sich dann am besten für verschiedene Werte des Parameters v (etwa in Schritten von $^1/_2$ m/s) nach Gleichung (2) unter Zugrundelegung der Flugzeugkonstanten und der angenommenen Auftriebsbeiwerte ein Diagramm, welches $\frac{d\varphi}{dt}$ in Abhängigkeit von α und v veranschaulicht (Abb. 254). Ferner entnimmt man aus Modellversuchen ein Diagramm in der Art von Abb. 252, welches die in Gleichung (6) stehende Funktion m in Abhängigkeit von α und s darstellt. Die in unseren Abbildungen benutzten Zahlenwerte sind

$$G = 1530 \text{ kg} \quad F = 41{,}3 \text{ m}^2 \quad \frac{\gamma}{g} = 0{,}106 \text{ kg s}^2/\text{m}^4.$$

Für c_a sind die Werte der Abb. 236a benutzt. Man geht nun von dem gegebenen Anfangswert aus und entnimmt den Abbildungen für ein bestimmtes kleines Intervall des Anstellwinkels Mittelwerte der dort dargestellten Größen. Dann hat man die Krümmung der Flugbahn vom Anfangszustand aus unmittelbar und erhält die Drehung des Flugzeugs durch Integration der — nunmehr linearen — Differentialgleichung (6):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{m}{n}v - \left\{\frac{m}{n}v - \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0\right\} e^{-\frac{\cdot}{J}t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

Hierbei bedeutet $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0$ den Anfangswert in dem betrachteten Zeitintervall. Aus $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ folgt aber $\frac{d\alpha}{dt}$; man erhält die Endwerte für das Intervall, die als Anfangswerte für ein weiteres Intervall dienen müssen; in diesem kann unter Umständen bereits ein anderes Intervall des Anstellwinkels und können somit andere Werte von $\frac{d\varphi}{dt}$ und m maßgebend sein. Es kann aber auch, wenn das physikalische Problem dies verlangt, der Parameter der willkürlichen Ruderausschläge geändert und somit auch eine zeitlich veränderliche Ruderwirkung verfolgt werden. In größeren Intervallen berechnet man dann nach Gleichung (1) $\frac{dv}{dt}$ und gelangt dadurch zu einem neuen Mittelwert des Parameters v in den anderen Gleichungen.

§ 8. Analytische Behandlung.

Auch in analytischer Form läßt sich die Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichungen geben; zwar handelt es sich auch bei dieser um eine Integration in Intervallen, aber die Intervalle können erheblich größer angenommen werden, in der Regel so groß, daß ein bis zwei Intervalle für alle praktischen Bedürfnisse genügen. In einem solchen Intervall muß nur die Geschwindigkeit sich nicht stark ändern und die Funktionen des Anstellwinkels c_a, c_w und m müssen sich durch lineare Ausdrücke gut annähern lassen. Wir setzen wieder in erster Näherung $v = v_0$; ferner führen wir für ein Intervall von α die Ausdrücke ein:

$$= -s \qquad (48)$$

Durch letztere Bezeichnungen soll angedeutet werden, daß der Absolutwert des Momentes, aber in erster Näherung nicht die statische Stabilität, vom Ruderausschlag abhängen. In einem einzelnen Intervall der Rechnung muß man den Ruderausschlag, also auch s, als konstant ansehen; von Intervall zu Intervall kann der Wert wechseln. Die Größe von s hängt einfach zusammen mit dem Anstellwinkel α_1, für welchen der betreffende Ruderausschlag Gleichgewicht erzwingt; denn es ist

$$m = m'(\alpha - \alpha_1).$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (48) in (2) und (6) unter Benutzung von (7) erhalten wir zwei lineare Differentialgleichungen für ϑ und α; wir können aber in den meisten Fällen die numerische Rechnung noch ganz erheblich ver-

einfachen, wenn wir uns auf kleine Steig- oder Gleitwinkel beschränken, so daß $\cos\varphi = 1$ gesetzt werden kann. Dann kommt ϑ in den Gleichungen nicht mehr vor, sondern nur noch die Ableitung

$$\frac{\quad}{dt} \tag{49}$$

und wir erhalten schließlich nur die beiden Differen[illegible]:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{g}{v_0} - \frac{\gamma}{2} \quad c_{a0} v_0 - \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' v_0 \cdot \alpha + \eta \quad \ldots\ldots\ldots \tag{50}$$

$$\frac{\quad}{dt} = \frac{\quad}{J} v_0^2 - \frac{m' v_0^2}{J} \cdot \alpha - \frac{n v_0}{J} \eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{51}$$

Diese werden gelöst durch den Ansatz

$$\alpha = A + p_1 e^{r_1 t} + p_2 e^{r_2 t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{52}$$

$$\eta = B + q_1 e^{r_1 t} + q_2 e^{r_2 t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{53}$$

Dabei sind die einzelnen Konstanten in folgender Weise bestimmt: r_1 und r_2 sind die beiden Nullstellen der Determinante, welche aus den Gleichungen (50) und (51) unter Weglassung der konstanten Glieder folgt:

$$\begin{vmatrix} r + \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' v_0 & -1 \\ \frac{m' v_0^2}{J} & r + \frac{n v_0}{J} \end{vmatrix} = 0,$$

also

$$r_{1,2} = \frac{v_0}{2}\left\{ -\frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' - \frac{n}{J} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' - \frac{n}{J}\right)^2 - \frac{4m'}{J}} \right\} \quad \ldots\ldots \tag{54}$$

A und B erhält man aus (50) und (51) durch Nullsetzen der linken Seiten:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\left(\frac{g}{v_0^2} - \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_{a0}\right) n + s}{\frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' n + m'} \\ B &= v_0 \frac{-\left(\frac{g}{v_0^2} - \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_{a0}\right) m' + \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' s}{\frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' n + m'}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{55}$$

Die Größen $p_{1,2}$ und $q_{1,2}$ schließlich sind durch A, B, $r_{1,2}$ sowie durch Anfangswerte α_0 und η_0 zur Zeit $t = 0$ in folgender Weise zu berechnen:

Nach (52) und (53) ist

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \alpha_0 - A \\ q_1 + q_2 &= \eta_0 - B. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus Gleichung (50) ohne die konstanten Glieder

$$\frac{\gamma}{\quad}\frac{F}{\quad} c_a' \tag{56}$$

Aus diesen Gleichungen folgen:

$$r_2 + \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' v_0\Big) - (\eta_0 - B)$$

$$- r_1 \qquad \qquad \ldots \ldots (57)$$

$$-(\alpha_0 - A)\Big(r_1 + \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' v_0\Big) + (\eta_0 -$$

Rechnet man die einzelnen Größen numerisch aus und setzt sie in (52) und (53) ein, so hat man geschlossene, leicht auswertbare Ausdrücke für die gesuchten Größen; allerdings sind die einzelnen Ausdrücke physikalisch nicht anschaulich. r_1 und r_2 sind konjugiert komplex, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in (54) negativ wird, also wenn

$$\frac{4m'}{\tau} > \Big(\frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} c_a' - \frac{\quad}{J}$$

In diesem Fall müssen natürlich auch p_1 und p_2, sowie q_1 und q_2 konjugiert komplex werden, und die Exponentialfunktionen in (52) und (53) werden in bekannter Weise in harmonische Funktionen, welche mit einer reellen Exponentialfunktion multipliziert sind, zusammengefaßt.

Der Winkel ϑ folgt aus (53) durch Integration:

$$\qquad (58)$$

der Winkel

$$\varphi = \vartheta - \alpha. \qquad (59)$$

Die Geschwindigkeitsänderung während des betrachteten Zeitintervalls erhält man durch Einsetzen der Ergebnisse für α und φ mit dem ersten Näherungswert v_0 in Gleichung (1), wobei wieder $\cos\beta = 1$ und $\sin\varphi = \varphi$ gesetzt werden kann:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Sg}{G} - g\varphi - \qquad '\alpha)\,\frac{\gamma}{2}\frac{F}{G} v_0^2$$

oder

$$= v_0 + \int \qquad \frac{\quad}{2}\frac{F}{G} \qquad \frac{\quad}{2}\frac{F}{G} \qquad \cdot\alpha \qquad \ldots (60)$$

ein Integral, das nur wieder auf Expontialfunktionen führt.

Die Durchführung der analytischen Rechnung in den Fällen, in welchen man nicht alle hier verwendeten Vernachlässigungen anbringen kann, geht in derselben Weise; bei steilen Gleitflügen, bei welchen $\cos\vartheta$ nicht mehr $= 1$ gesetzt werden darf, kann man η nicht eliminieren und muß mit den drei Unbekannten α, ϑ und η rechnen; man erhält dann drei r-Werte. Es ist hier nicht der Platz, diese elementaren Rechnungen durchzuführen; wesentlich ist nur, daß die Methode, erst $v = v_0$ zu setzen, und dann mit den so errechneten Größen der Winkel in die Gleichung für $\frac{dv}{dt}$ einzugehen, immer zum Ziele führt. Ob man im Einzelfall die analytische oder die numerische Integrationsmethode anwenden will, ist wohl Geschmackssache.

§ 9. Beispiele beim normalen Flug.

1. Zunächst verfolgen wir den Verlauf einer Störung unter den folgenden Bedingungen: Das Flugzeuggewicht sei $G = 1530$ kg, die Flügelfläche $F = 41{,}3$ m², die Luftdichte $\frac{\gamma}{g} = 0{,}107$ kg s²/m⁴, c_a und c_w seien durch Abb. 236a gegeben; der Schraubenschub sei dargestellt durch die Gleichung $S = S_0 - 0{,}05\ qF$, so daß der Wert von c_w um den Beiwert des „Schraubenwiderstandes" 0,05 erhöht erscheint; die statische Stabilität sei konstant und positiv, so daß

$$m = \mathrm{Const} + 0{,}00191\,\alpha \qquad (\alpha \text{ in Grad}).$$

Die Konstante in diesem Ansatz sei dadurch bestimmt, daß durch den Ruderausschlag Gleichgewicht bei $\alpha = 3^0$ erzwungen sei, also

$$m = 0{,}00191\,(\alpha - 3).$$

Unter diesen Bedingungen entsprechen dem stationären Geradeausflug die Werte

$$= 3^0 \qquad = 4^0 \quad \vartheta_g = \qquad v_g = 36{,}2 \text{ m/s}.$$

Dieser Zustand sei so gestört, daß am Anfang zwar die Lage des Flugzeugs gegen den Erdboden unverändert bleibe, aber die Geschwindigkeit und Bahnrichtung aus dem Gleichgewicht gebracht seien. Die Anfangswerte seien

$$\alpha_0 = 7^0 \quad \varphi_0 = 0^0 \quad \vartheta_0 = 7^0 \quad v_0 = 43{,}1 \text{ m/s}.$$

Die beschleunigte Bewegung ist in Abb. 255 dargestellt, und zwar für eine so lange Zeit, als sie vielleicht praktisch gar nicht von Interesse ist. Die Kurven sind mit Hilfe numerischer Integration gewonnen. Zuerst sinkt der Anstellwinkel rasch, er erreicht seinen Gleichgewichtswert bereits nach $^1/_4$ s; ϑ sinkt erst etwas, dann steigt es stark an, wie es nach den Überlegungen des vorigen Paragraphen sein muß; nach $^1/_2$ s hat φ seinen Gleichgewichtswert wieder erreicht, von da an steigt die Flugbahn steiler an bis zu $\varphi \sim 14^0$. Erst nach 6,5 s ist die Geschwindigkeit so weit gesunken, daß das Steilerwerden der Flugbahn aufhört, erst nach etwa 12 s ist φ wieder auf seinen Gleichgewichtswert herabgekommen. Der Anstellwinkel ändert sich nach 2 s nur noch wenig, die dann einsetzende periodische Bewegung, die sich im Maximum von ϑ auf φ und im Minimum von v deutlich abzeichnet, wird einen phygoidenartigen Charakter erhalten, nur natürlich durch die Widerstandskräfte gedämpft sein. Die Bewegung zeigt also am Anfang den Charakter des indifferenten, am Ende den Charakter des stark stabilen Grenzfalls.

2. In Abb. 256 ist der Verlauf einer Störung in Abhängigkeit von der statischen Stabilität dargestellt; die Flugzeugkonstanten sind genau so wie im ersten Beispiel angenommen, nur der Momentenverlauf ist in den drei Fällen $m = \pm\, 0{,}00191\,(\alpha - 6)$ bzw. $m = 0$.

Die Gleichgewichtswerte seien

$$\alpha_g = 6^0 \qquad = 7{,}1^0 \qquad = 13{,}1^0 \quad v_g = 30{,}6$$

die Anfangswerte:

$$\alpha_0 =$$

Dies Beispiel ist analytisch durchgerechnet; die Differentialgleichungen sind

$$\frac{d\alpha}{dt} = \eta + \frac{563}{v_0} - 0{,}808$$

$$\frac{d\eta}{dt} -$$

$$\frac{dv}{dt} = 1{,}44 - 0{,}171\,\vartheta - 0{,}0854\,\alpha.$$

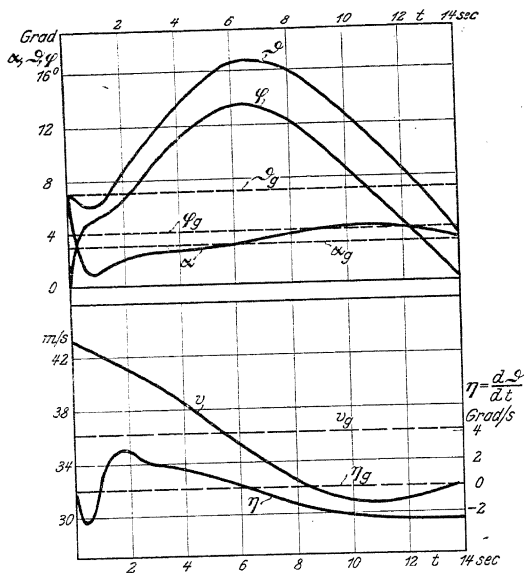



Abb. 255. Beispiel des Verlaufs einer Störung.

Ihre Lösungen haben die Gestalt:

bei Stabilität:

$$\alpha = 5{,}59 + 5{,}04\,e^{-1{,}25\,t}\cos(28{,}9 + 75{,}1\,t)$$
$$\eta = 1{,}037 - 7{,}07\,e^{-1{,}25\,t}\cos(81{,}6 - 75{,}1\,t)$$
$$\vartheta = 9{,}92 + 1{,}037\,t + 3{,}89\,e^{-1{,}25\,t}\cos(35{,}2 - 75{,}1\,t)$$
$$v = 31{,}7 + 0{,}221\,t - 0{,}0887\,t^2 + 0{,}339\,e^{-1{,}25\,t}\cos(28{,}0 - 75{,}1\,t)$$

bei Indifferenz:

$$\alpha = 4{,}99 + 5{,}01\,e^{-1{,}74\,t}$$
$$\eta = 0$$
$$\vartheta = 13{,}1$$
$$v = 32{,}25 - 0{,}37\,t - 0{,}246\,e^{-1{,}74}$$

bei Instabilität:

$$\alpha = 8{,}08 - 1{,}17\,e^{0{,}232\,t} + 3{,}09\,e^{-2{,}73\,t}$$
$$\eta = 5{,}39 - 2{,}32\,e^{0{,}232\,t} - 3{,}07\,e^{-2{,}73\,t}$$
$$\vartheta = 22{,}0 + 5{,}39\,t - 10{,}0\,e^{0{,}232\,t} + 1{,}125\,e^{-2{,}73\,t}$$
$$v = 25{,}1 - 1{,}63\,t - 0{,}461\,t^2 - 6{,}95\,e^{0{,}232\,t} - 0{,}026\,e^{-2{,}73\,t}$$

Die Bahn des instabilen Flugzeugs steigt rascher wieder an, als die des stabilen, seine Geschwindigkeit wird auch rascher vermindert; dabei geht sein Anstellwinkel langsamer an den Gleichgewichtswert heran, wie der des stabilen Flugzeugs und sinkt nicht unter diesen; er steigt im Laufe der späteren Bewegung wieder an. Aber das Flugzeug richtet sich gegen den Erdboden sehr rasch auf, die Bahn steigt steiler und steiler an, und ohne Hilfe des Ruders tritt ein Zustand stationären Fluges nicht mehr ein.

Abb. 256.
Verlauf einer Störung beim st
indifferenten und instabilen Flu

3. Bei Annahme derselben Flugzeugkonstanten sei nun die Bewegung infolge eines **Steuerausschlags** verfolgt. Der ursprüngliche Gleichgewichtszustand, welcher zum Anfangszustand der Bewegung wird, sei wie unter 1. bei $\alpha = 3^0$ angenommen. Es werde nun „gezogen“, und zwar so, daß beim stabilen Flugzeug der neue Gleichgewichtszustand $\alpha = 9^0$ erzwungen wird; das Moment in Abhängigkeit vom Anstellwinkel ist dann in den drei Fällen gegeben durch

$$m = \frac{\pm\, 0{,}00191\,(\alpha - 3)}{0} - 0{,}00191 \cdot 6.$$

Das Moment infolge Steuerausschlags ist also bei bestimmtem Ruderausschlag am Anfang der Bewegung in allen drei Fällen dasselbe, das Momentengleichgewicht hingegen ist verschieden. Das stabile Flugzeug wird zum neuen Gleichgewichtszustand hingezogen, das instabile daraus weiter entfernt; für das indifferente Flugzeug existiert kein Gleichgewichtszustand mit der neuen Ruderstellung. Abb. 257 zeigt, daß das instabile Flugzeug schneller und empfindlicher reagiert: man wird also, um bestimmte Wirkungen zu erzielen, kleinere Ruderausschläge geben als beim stabilen Flugzeug. Aber ein einziger Ruderausschlag genügt niemals, um das Flugzeug dauernd in die Nähe eines neuen Gleichgewichtszustandes zu führen, wie das beim stabilen Flugzeug der Fall ist.

Es mag auffallen, daß in Abb. 256 der Anstellwinkel beim stabilen Flugzeug die rascheste Veränderung durchmacht, in Abb. 257 beim instabilen Flugzeug. Dies rührt daher, daß im letzteren Fall nur eine Störung des Momentengleichgewichts vorliegt, im ersteren Fall aber die Störung des Kräftegleichgewichts auf

den Anstellwinkel des instabilen Flugzeugs die entgegengesetzte Wirkung ausübt wie die Störung des Momentengleichgewichts.

4. Um ein volles Bild eines **Steuerungsvorganges** zu gewinnen, muß man dem Parameter s im Verlaufe der Bewegung verschiedene Werte geben. Ein einziger Steuerausschlag genügt grundsätzlich nur beim stabilen Flugzeug, um einen neuen stationären Zustand herbeizuführen; ein Steuerausschlag, der nach kurzer Zeit wieder zurückgenommen wird, leitet das indifferente Flugzeug; das instabile Flugzeug läßt sich aber nur durch ständiges Spiel mit dem Steuer führen. Dennoch weisen alle Erfahrungen darauf hin, daß auch ein instabiles Flugzeug leicht und einwandfrei — manche sagen sogar, besonders gut — geflogen werden kann. In Wirklichkeit wird auch sicher nicht ein stabiles Flugzeug durch einen einzigen Steuerausschlag gelenkt; alle Flugzeuge werden durch ständiges Spiel mit dem Steuer im Gleichgewicht gehalten und in neue Gleichgewichtslagen geführt. Dabei kann sich der Flieger nicht nach den Werten von φ und α richten, welche er nicht unmittelbar beobachten kann, und die Geschwindigkeit ist eine viel zu langsam veränderliche Größe, um beim Steuern Anhaltspunkte zu geben. Dagegen springt die Größe ϑ, die Lage des Flugzeugs zum Horizont, zur Sonne, zu einer Wolke u. dgl. unmittelbar ins Auge, und die Größe $\frac{d\varphi}{dt}$, welche die Abweichung vom Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte anzeigt, wird als Zentrifugalkraft unmittelbar im Sitz gefühlt. Im ersten Teil eines Steuervorganges richtet sich der Flieger wohl hauptsächlich nach dem Horizont und erzwingt durch wiederholten Ausschlag und Gegenausschlag die Einstellung des Flugzeugs auf den gewünschten Wert von ϑ; er bringt dabei die Drehung des Flugzeugs im Raum zum Stillstand $\left(\frac{d\vartheta}{dt} = 0\right)$. Bei diesem Vorgang wird er — was ihm den Erfolg der Steuermaßnahme anzeigt — starke Zentrifugalkräfte spüren. Im zweiten Teil aber wird er die Zentrifugalkräfte klein halten, wobei er nach Möglichkeit in der Nähe des neuen ϑ-Wertes bleibt; er wird das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte erhalten, d. h. $\frac{d\varphi}{dt}$

Abb. 257. Wirkung eines Steuerausschlags beim stabilen, indifferenten und instabilen Flugzeug.

zu Null machen, während α und v noch die verschiedenen, durch Kurve I der Abb. 251 und 253 verbundenen Werte annehmen, und erst langsam, beim instabilen Flugzeug vielleicht gar nicht, ihre Endwerte annehmen. Der Flieger rutscht dabei sozusagen mit seinem gegen Zentrifugalkräfte empfindlichen Gesäß auf der Fläche des Gleichgewichts der bahnsenkrechten Kräfte hin und her. Ein solcher Steuerungsvorgang spielt sich ganz analog der in § 6 behandelten Bewegung des indifferenten Flugzeugs ab. Versuche mit einem einfachen Neigungsmesser (ϑ) und einem Beschleunigungsmesser $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, welche besser auch noch durch Messung der Ruderausschläge und der Geschwindigkeit ergänzt werden, können zur Aufklärung dieser Verhältnisse, sowie zu einer objektiven Messung der Steuerfähigkeit führen. Die numerische Durchrechnung bestimmter Fälle in der Art der vorigen Beispiele stößt auf keine Schwierigkeiten.

§ 10. Der überzogene Flug.

Von großem Interesse sind die Verhältnisse bei großem Anstellwinkel. In diesem Bereich sind zwei Maxima von Bedeutung, einerseits das Maximum von $\frac{c_a}{c_w}$, welches zum flachsten Gleitflug und (bei Mitrechnung des Schraubenwiderstandes) zum steilsten Anstieg gehört, und welches nach den Painlevéschen Überlegungen in § 1 dieses Kapitels für die Stabilitätsverhältnisse maßgebend sein sollte, andererseits das Maximum von c_a, welches nach den obigen Betrachtungen beim indifferenten Flugzeug mit dem gefährlichen „überzogenen Flugzustand" zusammenhängen muß. Die folgenden beiden Beispiele sollen Licht auf diese Verhältnisse werfen.

Wir gehen von folgenden numerischen Annahmen aus: $G = 1530$ kg, $F = 41{,}3$ m² $\frac{\gamma}{g} = 0{,}106$ kg s²/m⁴, $J = 310$ kg m s², $r_H = 5{,}7$ m, $S = 400 - 0{,}110\, v^2$. Dieser Ansatz für den Schraubenschub entspricht in dem zu betrachtenden Geschwindigkeitsbereich bei 170 PS einem Wirkungsgrad von etwa 60 vH. Für die Luftkräfte sei Abb. 236a maßgebend; nur werde c_w um den Schraubenwiderstand 0,05 erhöht. Für den Momentenverlauf sollte man theoretisch wieder zwischen Stabilität, Indifferenz und Instabilität unterscheiden; bei Indifferenz und natürlich erst recht bei Instabilität werden in dem Fall der Kurve D (Abb. 246) rapides Wachsen des Anstellwinkels und damit gefährliche Flugzustände zu erwarten sein; bei Stabilität ist dem Wachstum des Anstellwinkels eine

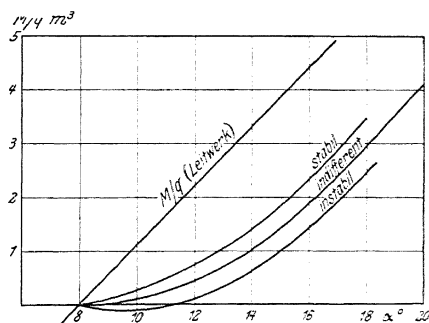



Abb. 258.
Momentenverlauf bei großen Anstellwinkeln.

Grenze gesetzt. Zum Glück sind nun in dem Bereich der Anstellwinkel, welche zum Auftriebsmaximum gehören, alle Flugzeuge stark stabil. Der Druckpunkt der Flügel bleibt an derselben Stelle, wenn der Anstellwinkel wächst, und die Größe des Luftkraftbeiwertes ändert sich auch nur wenig. Die stabilisierende Wirkung des Leitwerks, die bei normalen Flugzuständen durch den instabilisierenden Verlauf des Flügelmomentes ganz oder teilweise aufgehoben wird, kommt in diesem Bereich voll zur Geltung. Die Gefahr einer so rapiden Bewegung, wie sie Kurve D in Abb. 246 darstellt, ist daher wohl in Wirklichkeit nicht hoch einzuschätzen; vielleicht hätte sich die heutige Sicherheit des Flugs im allgemeinen nicht erreichen lassen, wenn die Flügelmomente nicht die besprochene Eigenschaft hätten. In Abb. 258 ist das Moment der Leitwerkskräfte und das Moment der gesamten Luftkräfte auf das Flugzeug, bezogen auf die Staudruckeinheit, aufgetragen; letzteres für die Fälle, daß im Bereich normaler Anstellwinkel statische Stabilität, Indifferenz und Instabilität vorhanden sind. Dabei ist eine solche Ruderlage angenommen, daß für $\alpha = 8^0$ Gleichgewicht herrscht; der Unterschied der Kurven ist unbedeutend, so daß es genügt, die folgenden Beispiele mit der mittleren durchzurechnen. Im Fall A (Abb. 259) sei der Gleichgewichtszustand angenommen, welcher zum steilsten Anstieg gehört:

Abb. 259. Fall A; normaler Flug.

$$\alpha_g = 8{,}0^0 \quad \varphi_g = 4{,}8^0 \quad \vartheta_g = 12{,}8^0 \quad v_g = 28{,}2 \text{ m/s}.$$

Dies Gleichgewicht sei nur dadurch gestört, daß die Geschwindigkeit um 3,45 m/s unter den Gleichgewichtswert heruntergesunken sei.

Im Falle B (Abb. 260) betrachten wir den Verlauf derselben Störung des Gleichgewichts bei $\alpha_g = 12^0$, also mit den Gleichgewichtswerten

$$\alpha_g = 12^0 \quad \varphi_g = 4{,}1^0 \quad \vartheta_g = 16{,}1^0 \quad v_g = 25{,}2 \text{ m/s}.$$

In diesem Fall ist der Anstieg nicht viel geringer, da das Maximum von φ sehr flach verläuft. Es ist kaum anzunehmen, daß der Flugzeugführer fühlen kann,

ob er sich im einen oder im anderen Zustand befindet. Die Momente im Falle B sind wie im Fall A der Abb. 258 zu entnehmen; nur muß man sich die Kurve soviel nach unten schieben, daß sie bei $\alpha = 12^0$ die Abszisse schneidet. Auch die Wirkung eines Steuerausschlags kommt zur Darstellung, wenn man die Kurve der Momente einfach verschiebt, nach oben beim Drücken, nach unten beim

Die Bewegungen sind in den Abb. 259, 260 und 261 dargestellt.

Die erste Folge der betrachteten Störung muß in beiden Fällen eine Krümmung der Flugbahn nach unten sein. Aus Abb. 254 ist ersichtlich, daß diese Krümmung im Fall B viel stärker ist. Dafür ist die Stabilität im Fall B größer, das Flugzeug wird der Flugbahn schneller nachgedreht wie im Falle A. Wird das Steuer nicht betätigt, so wird im Falle A die Flugbahn schnell flacher, bereits nach 2 s ist die Krümmung recht klein geworden; die Flugbahn steigt immer noch an. Im Falle B ist in nicht ganz 1 s der Anstiegwinkel Null geworden und die Flugbahn krümmt sich weiter stetig nach unten; das Flugzeug sinkt nach unten, es sackt stark durch. Befindet es sich nicht hoch über dem Erdboden, so liegt in diesem Verlauf eine große Gefahr. In größeren Höhen ist diese Gefahr hingegen nicht sehr hoch einzuschätzen; die Flugbahn erholt sich im Lauf der Zeit von selbst wieder in dem Maße, wie die Geschwindigkeit anwächst. Im Luftkampf wird freilich auch ein kurz andauerndes Sinken von größter Bedeutung sein.

Abb. 260. Fall B: überzogener Flug.

Der große Unterschied der beiden Fälle tritt aber ganz scharf hervor, wenn wir nun die Folge eines Steuerausschlags berechnen. Wenn die Flugbahn sich nach unten krümmt, so entspricht es dem natürlichen Gefühl, zu „ziehen“, d. h. das Flugzeug aufzurichten. Man zieht das Steuer so, daß auf das Leitwerk eine nach unten gerichtete Kraft wirkt, welche die Spitze des Flugzeugs nach oben dreht. Die Drehung des Flugzeugs beeinflußt den Anstellwinkel und so mittelbar die Flugbahn. Die quantitativen Zusammenhänge sind aus den Abbildungen zu ersehen. In beiden Fällen werden durch das Ziehen die Winkel α und ϑ vergrößert; aber der Winkel φ, auf welchen es für die Flugbahn allein ankommt, verhält sich verschieden.

Im Falle A ist bereits nach $^3/_4$ s die Krümmung der Flugbahn zu Null geworden; weiterhin krümmt sie sich nach oben und steigt steiler und steiler an; schon nach 2 s ist der ursprüngliche Wert des Anstiegwinkels erreicht, dann wird er sogar nicht unerheblich überschritten. Erinnern wir uns, daß der Anfangszustand im Falle A dem steilsten stationären Anstieg entspricht, so sehen wir an diesem Beispiel, wie leicht der oben dargelegte (Painlevésche) Vergleich der Gleichgewichtszustände (Abb. 233) zu falschen Schlüssen führen kann. Die dort gezogenen Schlüsse beziehen sich nur auf Dauerzustände, also nur auf die Wirkung eines Steuerausschlags nach Ablauf der durchaus nicht kurzen Zeit, bis sich ein Gleichgewichtszustand hergestellt hat. Aber die Übertragung auf nichtstationäre Zustände ist falsch; bei der augenblicklichen Wirkung eines Steuerausschlags, auf die es in den meisten Fällen gerade ankommt, kann man von einer Umkehrung der Steuerwirkung nicht reden. Wenn man sich durch Ziehen aus dem Gleichgewichtszustand steilsten Anstiegs oder einem solchen von etwas höherem Anstellwinkel entfernt, so steigt die Flugbahn steiler an, als es dem Gleichgewichtszustand entspricht; die Wirkung ist durchaus die vom natürlichen Gefühl erwartete.

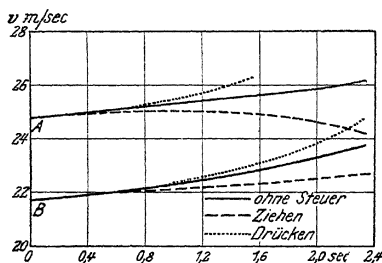



Abb. 261. Verlauf der Geschwindigkeit bei den Beispielen der Abb. 259 u. 260.

Ganz anders wirkt derselbe Steuerausschlag im Falle B. Hier ist der Verlauf von φ beim Ziehen so wenig unterschieden von seinem Verlauf, wenn kein Steuerausschlag gegeben wird, daß die beiden Kurven in Abb. 260 vollständig zusammenfallen. Das Flugzeug wird durch das Steuer richtig herumgedreht; aber die Flugbahn geht nicht mit. Die Verkleinerung von $\frac{d\varphi}{dt}$, welcher der Erhöhung des Anstellwinkels entspricht, wird in diesem Falle vollständig aufgewogen durch den geringeren Anstieg der Geschwindigkeit beim Ziehen. Läßt sich der Flugzeugführer etwa gar durch den Mißerfolg des leichten Ziehens zu stärkerem Ziehen verleiten, so wächst der Anstellwinkel noch stärker; nach Abb. 254 krümmt sich die Flugbahn noch stärker nach unten; die Geschwindigkeit wird nicht mehr steigen und schließlich sogar wieder sinken. Dann ist die Katastrophe unvermeidbar. Die Geschwindigkeitsänderungen selbst in allen berechneten Fällen zeigt Abb. 261.

Neben der Wirkung des Ziehens steht in den Abb. 259—261 die Wirkung des Drückens. Im Falle A ist diese nicht weiter interessant; im Falle B besteht sie einesteils in einer stärkeren Krümmung der Flugbahn nach unten, anderenteils aber in einem verhältnismäßig raschen Anwachsen der Geschwindigkeit. Schon nach 2 s ist diese so weit gestiegen, daß der Charakter der Störung sich dem Falle A nähert, daß also durch nunmehriges Ziehen die Flugbahn rasch aufgerichtet werden kann. „Erst Drücken, dann Ziehen", muß die Vorschrift für den Führer lauten, der aus dem überzogenen Zustand herauskommen will. Das Aufrichten der

Flugbahn im überzogenen Fall ist nicht durch den schnellen Ausgleich der bahnsenkrechten Kräfte wie im Falle A zu erreichen, sondern nur durch den verhältnismäßig langsamen Ausgleich der Kräfte in der Bahnrichtung; dieser Ausgleich kann durch die — dem natürlichen Gefühl zunächst widerstrebende — Maßnahme des Drückens stark beschleunigt werden.

Unsere Diskussion setzt uns nun in den Stand zu beurteilen, welche äußeren Umstände und welche konstruktiven Maßnahmen den Eintritt und die Gefahren des überzogenen Flugs in günstiger oder ungünstiger Weise beeinflussen. Zunächst ist klar, daß Störungen der besprochenen Art harmlos werden, wenn man die Möglichkeit hat, unmittelbar in den Ausgleich der in der Bahnrichtung wirkenden Kräfte einzugreifen, wenn man also die Geschwindigkeit durch erhöhte Motorleistung augenblicklich steigern kann. Dies ist der Fall, wenn mit gedrosseltem Motor geflogen und im Augenblick der Gefahr der Motor auf volle Leistung gestellt wird, und ist besonders der Fall, wenn die Störung im Gleitflug eintritt, wobei die ganze Motorleistung als Reserve zur Verfügung steht. Auch bei großem Leistungsüberschuß am Boden, also bei sehr steigfähigen Flugzeugen, ist die Gefahr vermindert; denn diese steigen in Bodennähe bei großem Anstellwinkel sehr steil an; der Anfangswert von φ ist also groß, daher wird φ nicht so schnell negativ; es dauert länger, bis die Flugbahn sinkt.

Beim Gleitflug tritt der überzogene Zustand auch deshalb weniger leicht ein, weil die maßgebende Kurve auf der (v, α)-Ebene (Abb. 250) bei negativem ϑ zu kleineren Geschwindigkeiten herabreicht wie beim Anstieg. Dazu kommt, daß man beim Gleitflug ohnehein kleinere Anstellwinkel benutzt wie beim Anstieg; der Anstellwinkel flachsten Gleitflugs ist kleiner als der Anstellwinkel steilsten Anstiegs.

Die Konstruktion des Flugzeugs kann in zweierlei Weise Einfluß auf den Verlauf des überzogenen Fluges haben: erstens gibt es Maßnahmen, die den Eintritt des überzogenen Flugs hindern, zweitens solche, die das Herauskommen aus demselben erleichtern. Der Eintritt wird um so mehr erschwert, je weiter die kleinste Geschwindigkeit des normalen Fluges von der Geschwindigkeit, bei welcher ein Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte nicht mehr möglich ist, entfernt liegt. Die Differenz der beiden Geschwindigkeitswerte ist aber proportional der Differenz $\delta \sqrt{c_a \frac{F}{G}}$, also bei gegebener Flächenbelastung durch die Differenz der beiden Auftriebsbeiwerte beeinflußt. Diese Differenz hängt sehr wesentlich vom Profil ab. Wir können zwei Profiltypen (Spad und Fok. in Abb. 262) unterscheiden; der eine mit kleinen Widerstands- und Auftriebsbeiwerten wird bei schnellen, der andere mit großen Beiwerten bei gut steigenden Flugzeugen bevorzugt. Der Wert des Auftriebsmaximums liegt beim zweiten weiter entfernt vom Auftriebsbeiwert, welcher zum steilsten Anstieg gehört, als beim ersten. In der Tat haben erfahrene Führer bei der Flugzeugmeisterei darauf hingewiesen, daß das Spad-Flugzeug leichter überzogen wird als das Fok-Flugzeug. Messungen im Göttinger Kanal für die beiden Profile ergeben in der Tat

beim Spad Doppeldecker . . . . $\delta c_a = 0{,}23$
beim Fok Doppeldecker . . . . $\delta c_a = 0{,}37$.

Es zeigte sich allerdings, daß die Messung des Fok-Profils im Bereich der großen Anstellwinkel sehr unsicher war und voneinander abweichende Werte ergab. Daß ein solch unsicheres Verhalten bei den Dimensionen des wirklichen Flugzeuges auch auftritt, erscheint nach der Aussage der Flugzeugführer, sowie nach den neueren Göttinger Messungen über das Ähnlichkeitsgesetz unwahrscheinlich; man müßte dann gerade große Unsicherheit im Bereich der großen Anstellwinkel erwarten, während das Gegenteil der Beobachtung entspricht. Einen entscheidenden Fortschritt in der Vermeidung des Überziehens bedeuten die Schlitzprofile von Lachmann und Handley Page, bei denen der maximale Auftriebsbeiwert sehr hoch über denjenigen liegt, mit denen ein normaler — wenn auch nicht gerade der günstigste — Flug möglich ist.

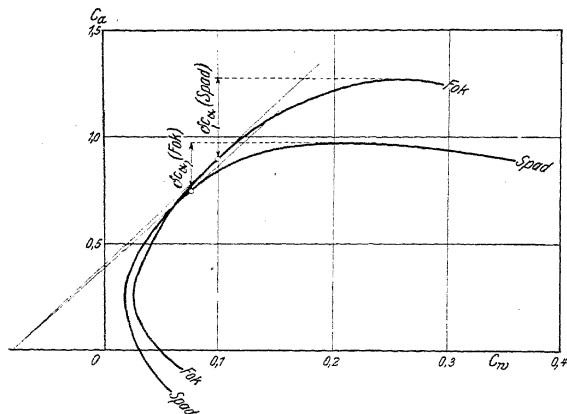



Abb. 262. Einfluß des Flügelprofils auf die Gefahr des „Überziehens“.

Das Auftriebsmaximum sinkt, der Auftriebsbeiwert steilsten Anstiegs steigt relativ dazu, wenn der induzierte Widerstand größer wird. Es muß also bei schlechterem Seitenverhältnis oder ungünstigerer Mehrdeckeranordnung die Gefahr des Überziehens wachsen. Dies bestätigt die Aussage einiger Flugzeugführer, wonach der Fok D VII schwer, dagegen der Fok-Dreidecker, der sehr großen induzierten Widerstand haben muß, leicht überzogen wird. Die Profile der beiden Flugzeuge sind dieselben. Großer schädlicher Widerstand muß ebenfalls das Überziehen erleichtern; durch einen solchen wird zwar das Auftriebsmaximum nicht geändert, aber der Auftriebsbeiwert des normalen Anstiegs wird größer, wie eine Darstellung in Polardiagrammen leicht erkennen läßt. Außer vom Polardiagramm wird der Eintritt des überzogenen Zustandes nur von der Flächenbelastung beeinflußt, und zwar wird die entscheidende Geschwindigkeitsdifferenz größer mit wachsender Flächenbelastung; große Flächenbelastung wirkt also in dieser Hinsicht günstig.

Beim Verlauf der überzogenen Bewegung müssen wir alle Einwirkungen als günstig auffassen, welche die Drehung der Flugbahn hemmen, also den Wert von $\frac{d\varphi}{dt}$ herabsetzen, und ebenso alle Einwirkungen, welche die Drehung des Flugzeugs, vor allem beim Drücken, begünstigen, also $\frac{d\vartheta}{dt}$ vergrößern.

Wenn wir mit δv die Geschwindigkeitsverminderung infolge der Störung bezeichnen, so können wir Gleichung (2) die Gestalt geben:

$$v \frac{d\varphi}{\ldots} = \ldots \frac{F}{\ldots} v\,\delta v \qquad (61)$$

Die absolute Größe der Geschwindigkeit beeinflußt also die Änderung der Bahnneigung $\frac{d\varphi}{dt}$ nicht, die Sinkgeschwindigkeit wächst aber schneller bei schnellen Flugzeugen. Auch hier wirkt große Flächenbelastung günstig; denn ceteris paribus ist die Geschwindigkeit proportional $\sqrt{\frac{G}{F}}$, so daß auf der rechten Seite von (61) immer noch der Faktor $\sqrt{\frac{F}{G}}$ stehenbleibt, also die Sinkgeschwindigkeit bei größerer Flächenbelastung langsamer wächst.

Die verschiedenen Einwirkungen auf die Drehung des Flugzeugs lassen Abb. 258 und Gleichung (47) erkennen. Statische Stabilität begünstigt bei den hier maßgebenden Störungen die Wirkung des Drückens, statische Instabilität die Wirkung des Ziehens; also ist statische Stabilität ein Vorteil. Jedoch kommt dieser Vorteil für die Konstruktion keinesfalls stark in Betracht, da gerade in dem Gebiet der überzogenen Zustände alle Flugzeuge stabil sind. Auf die Größe $\frac{m}{n}$ in Gleichung (47), welche für die Drehung des Flugzeugs am wichtigsten ist, hat die Größe des Leitwerks keinen Einfluß; die Rumpflänge r_H, durch welche die Dämpfung bestimmt wird, tritt aber im Nenner auf. Je größer r_H, um so größer die Dämpfung, um so kleiner die Drehgeschwindigkeit; also große Rumpflänge wirkt ungünstig. Wenn man von aerodynamischen Größen absieht, wird $\frac{m}{n} v$ proportional $\frac{v}{r_H}$; also langsame große Flugzeuge sind in dieser Hinsicht ungünstiger als kleine schnelle Flugzeuge. Der Einfluß des Trägheitsmoments macht sich nur im Exponenten der Exponentialfunktion in Gleichung (47) geltend. Die Drehung wird stärker gehemmt bei großem Trägheitsmoment; dies ist physikalisch selbstverständlich.

Die Unempfindlichkeit der Flugbahn gegen Steuerausschläge hängt damit zusammen, daß bei jeder Störung der von uns betrachteten Art der Anstellwinkel schnell in das Gebiet rückt, in welchem $\frac{dc_a}{d\alpha}$ sehr klein wird. Durch das Steuer wird aber nur das Flugzeug gedreht und so der Anstellwinkel beeinflußt; erst durch die Abhängigkeit der Bahnkrümmung und somit des Winkels φ von α ist eine Einwirkung auf die Flugbahn möglich. Die Größe $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ wird aber proportional $\frac{dc_a}{d\alpha}\frac{F}{G}$.

Die Beeinflussung der Flugbahn durch das Steuer wird daher klein bei kleinem $\frac{d c_a}{d \alpha}$, und zwar um so kleiner, je größer die Flächenbelastung ist. Hier können wir einen ungünstigen Einfluß großer Flächenbelastung feststellen; ob dieser oder der eben erwähnte günstige Einfluß von größerer Bedeutung sind, kann der Theoretiker nicht entscheiden.

§ 11. An- und Abstellen des Motors.

Wir wenden uns jetzt zu der Möglichkeit, künstlich in das K r ä f t e gleichgewicht einzugreifen, also ohne Steuerbewegung den stationären Flugzustand zu verändern. Der wichtigste Fall dieser Art ist das A n - und A b s t e l l e n des M o t o r s. Diese Maßnahme unterscheidet sich von allen anderen bisher betrachteten Vorgängen dadurch, daß dabei die bisher wichtigeren Gleichungen des Momentengleichgewichts

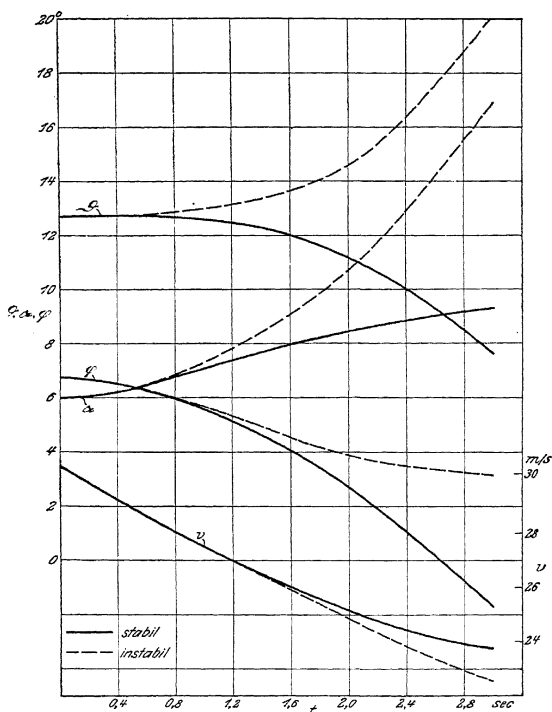



Abb. 263. Abstellen des Motors beim stabilen und beim instabilen Flugzeug.

und des Gleichgewichts der bahnsenkrechten Kräfte im ersten Augenblick gegenüber der sonst unwichtigeren Gleichung des Gleichgewichts der Bahnrichtungskräfte zurücktreten. Abb. 263 zeigt einen Übergang vom Motorflug zum Gleitflug. In diesem Falle ändert sich erst die Geschwindigkeit, dann folgen langsamer die Winkel. Die erste Näherung bei Beginn der Bewegung ist diesmal durch $\varphi = \text{Const}$, $\alpha = \text{Const}$ gegeben; aber v läßt sich genau wie oben in erster Näherung berechnen, wenn man auf der linken Seite von (1) diese Werte und den Anfangswert v_0 einsetzt. Integriert man numerisch, so hat man am Anfang nur v in kleineren Schritten wie sonst aus $\frac{dv}{dt}$ zu berechnen.

Auf den Verlauf dieses Vorgangs ist die statische Stabilität von entscheidendem Einfluß. Während in den ersten Augenblicken die Störung des Kräftegleichgewichts

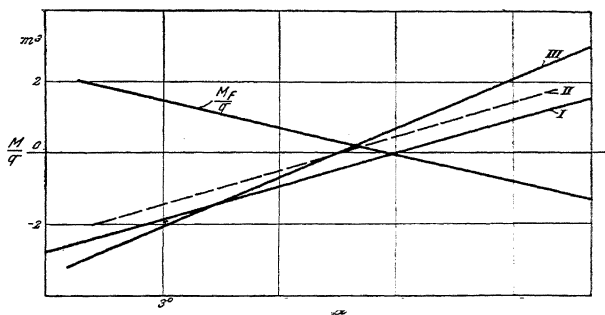



Abb. 264. Momentengleichgewicht beim Beispiel der Abb. 265.
I Leitwerk ohne Ruderausschlag, Gleitflug
II ,, mit ,, ,,
III ,, ,, ,, Motorflug.

allein maßgebend ist, und infolgedessen v und α sich in beiden Fällen in gleicher Weise ändern, wirkt die sekundäre Störung des Momentengleichgewichts in entgegengesetzter Weise. Dies äußert sich im Verlauf von ϑ; während das stabile Flugzeug sich beim Abstellen des Motors der Flugbahn nachdreht, also nach unten neigt, richtet sich das instabile Flugzeug auf. Die Flugbahn senkt sich zwar auch in diesem Fall, aber das Flugzeug geht nicht mit; wir haben keinen richtigen Übergang zum Gleitflug, sondern nur ein Durchsacken; die Sinkgeschwindigkeit ist auch bedeutend kleiner als beim stabilen Flugzeug. Will man mit einem instabilen Flugzeug aus dem Motorflug in den Gleitflug übergehen, so muß man also gleichzeitig mit dem Abstellen des Motors das Höhenruder betätigen.

Eine primäre Störung des Momentengleichgewichts ist aber immer mit dem An- und Abstellen des Motors verbunden, nämlich die Wirkung des Schraubenstrahls auf das Leitwerk. Ist das Leitwerk vollkommen entlastet, wie z. B. in dem Falle des Momentengleichgewichts Abb. 264 Kurve I bei einem Anstellwinkel von 9°, so fällt diese Wirkung fort. Hat das Leitwerk positiven Auftrieb, wie

bei $\alpha > 9^0$, so wird beim des Motors dieser Auftrieb plötzlich geringer, mit ihm das kopflastig s Leitwerks; es entsteht also beim Abstellen des Motors e endes Zusatzmoment, welches das Flugzeug aufzurichten n Übergang flug entgegenwirkt und sofortige Betätigung des ensteuers nötig macht. Bei $\alpha < 9^0$ dagegen entsteht in der gleichen Weise beim Abstellen des Motors ein kopflastiges Moment, welches die erwünschte Wirkung hervorbringt. Die Wirkung dieser Erscheinung ist nicht unbedeutend; Abb. 265 zeigt den numerischen Wert in einem Beispiel,

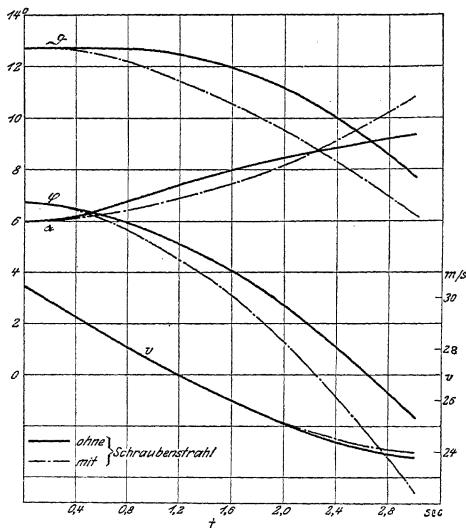



Abb. 265. Einfluß des Schraubenstrahls auf die Vorgänge beim Abstellen des Motors.

das von extremen Voraussetzungen noch weit entfernt ist. Wir nehmen an, das stabile Flugzeug der Abb. 263 sei im Motorflug mit $\alpha = 6^0$ stationär geflogen; dabei sei durch den Schraubenstrahl die Luftgeschwindigkeit am Leitwerk um 25 vH vergrößert worden (Abb. 264 Kurve III), also die Leitwerkskraft das $1{,}25^2$-fache der Leitwerkskraft im Gleitflug (Kurve II). Man sieht in Abb. 265, daß Flugzeug und Flugbahn sich rascher drehen als ohne Berücksichtigung der Schraubenstrahlwirkung, während der Einfluß auf Anstellwinkel und Geschwindigkeit, deren Änderung fast ausschließlich durch die Störung des Kräftegleichgewichts bedingt ist, sehr gering bleibt. Weit intensivere Wirkungen als in unserem Beispiel können sich zeigen, wenn etwa nur durch den Schraubenstrahl die ausreichende Stabilität des Flugzeugs erhalten wird, und der Gleitflug instabil ist.

IV. Kapitel.

Die Seitenbewegung des Flugzeugs.

§ 1. Unsymmetrische Luftkräfte.

Wenn die ganze Flugbahn in der Symmetrieebene des Flugzeugs verläuft und keine äußeren Kräfte in anderer Richtung wirken, dann genügt es, die Luftkräfte durch drei Größen auszudrücken, nämlich durch zwei Kraftkomponenten und ein Drehmoment. Dann hängen die Luftkräfte auch nur von zwei äußeren Umständen ab, nämlich von der Größe der Relativbewegung zwischen Luft und Flugzeug und von deren Richtung, welche durch den Anstellwinkel gegeben ist. Um auch die unsymmetrische seitliche Bewegung des Flugzeugs fassen zu können, muß man die Luftkräfte durch sechs Größen ausdrücken, durch drei Kraftkomponenten und drei Momente. Auch ist die Richtung der Relativbewegung nicht nur durch den einen Anstellwinkel, sondern durch zwei Winkel gegeben.

Abb. 266.
Definition der Winkel und der Kraftkomponenten.

Um diese Winkel klar zu definieren, denken wir uns das aerodynamische Objekt (Flugzeug, Flügel oder sonstigen Flugzeugteil) zunächst symmetrisch angeblasen mit dem Anstellwinkel Null; dabei bleibt es gleichgültig, ob man sich darunter den Winkel verschwindenden Auftriebs oder einen geometrisch bestimmten Winkel denken will. Aus dieser Lage wird das Objekt um eine Achse senkrecht zur Symmetrieebene ($\mathfrak{z}$-Achse, Abb. 266) um den „Anstellwinkel α“ gedreht; dann gehören zu jedem α bestimmte Beiwerte c_a und c_w, woraus wie früher bei Einführung flugzeugfester Achsen die Beiwerte c_n und c_t der Normal- und Tangentialkraft elementar zu berechnen sind. Diese Komponentenzerlegung ist wichtig zur Berechnung der Momente; man legt in der Symmetrieebene zwei zueinander senkrechte Richtungen als Koordinatenachsen fest, die wir als „Stielachse“ (c_n) und „Rumpfachse“ (c_t) bezeichnen wollen. Beim einzelnen Flügel wählt man zu dieser Zerlegung am besten die Richtungen in und senkrecht zur Flügelsehne. Um die Stielachse wird nun unser aerodynamisches Objekt aus seiner symmetrischen Lage herausgedreht; diesen Drehungswinkel wollen wir „Seitenwinkel τ“ nennen. Durch diese Drehung entstehen seitliche Kräfte; zu den beiden Komponenten c_n und c_t tritt noch eine „Transversalkraft“ in Richtung der „Holmachse“ mit dem Beiwert c_s senkrecht zur Symmetrieebene; auch c_n und c_t werden von τ abhängen. Als „Widerstand“ be-

zeichnet man sinngemäß auch in diesem allgemeinen Falle die Kraft in der Luftstromrichtung, als „Auftrieb" bei Flügeln die Kraft senkrecht zur Luftstromrichtung in einer Ebene, welche auf der Sehnenebene des Flügels senkrecht steht. Von den so definierten Kräften kann man erwarten, daß sie bei mäßiger Größe von τ den Charakter des Auftriebs und des Widerstandes, wie er von der symmetrischen Bewegung her bekannt ist, beibehalten. Eine senkrecht zu Auftrieb und Widerstand wirkende Komponente wollen wir „Seitenkraft" nennen und den dazu gehörigen Beiwert mit c_Q bezeichnen. Es ist nicht gleichgültig, ob man die beiden Drehungen um α und um τ in der angegebenen oder in der umgekehrten Reihenfolge vornimmt; aber solange τ klein bleibt — was in allen praktisch interessanten Fällen zutrifft — spielt dieser Unterschied keine Rolle.

Wird ein Flügel unter einem Seitenwinkel τ angeblasen, so ist der Anstellwinkel seiner nunmehr in anderer Richtung gelegenen Sehne kein anderer als bei symmetrischem Anblasen, aber sowohl Grundriß wie Aufriß des Flügels, von der Luftstromrichtung aus gesehen, sind etwas verändert. Der Luftstrom hat entlang dem Flügel einen längeren Weg, der Flügel muß also wie ein tieferer Flügel mit gleicher Dicke wirken, er erscheint weniger gewölbt. Dieser Einfluß vermindert Auftrieb und Widerstand; der maximale Auftrieb wird kleiner. Die Verkleinerung des Widerstandes wird aber aufgehoben durch eine andere Wirkung: Der Flügel hat bei konstant gebliebener Fläche eine kleinere Spannweite, infolgedessen wird der induzierte Widerstand vergrößert. Beide Wirkungen sind gering für kleine Seitenwinkel; denn sie hängen nur von $\cos\tau$ ab. Abb. 267 zeigt den beobachteen Einfluß nach Göttinger Messungen.

Die erstbesprochene Wirkung kann bedeutender bei verwundenen Flügeln sein, da dann der schief einfallende Luftstrom ein erheblich anderes und anders angestelltes Profil trifft, als der symmetrisch einfallende. Messungen darüber liegen aber nicht vor, und es ist fraglich, ob man der Aussage von Flugzeugführern, welche diese Wirkung beobachtet haben wollen, großes Gewicht beilegen soll. Eine Messung im Luftstrom würde interessant sein.

Sehr viel bedeutender wird die Wirkung des Seitenwindes, wenn der Flügel pfeilförmig eingestellt ist. Trifft der Luftstrom einen pfeilförmigen Flügel (Abb. 223) von außen (links in der Abb.), so findet er ein weniger tiefes, also höher gewölbtes Profil, und zwar ist die Tiefenverminderung bei kleinem τ von der Größenordnung $\tau \operatorname{tg} \iota$; der Auftrieb auf der von außen angeblasenen Seite des Pfeilflügels wird größer als der Auftrieb auf der entgegengesetzten Seite.

Eine Seitenkraft kann bei einem Flügel nicht auftreten; eine solche könnte nur von einer Ablenkung des Luftstroms nach der Seite hin herrühren; zu einer solchen Wirkung ist aber keine Ursache vorhanden.

Die Beiwerte c_n, c_t und c_s folgen aus c_a und c_w nach den Formeln

$$\begin{aligned} c_n &= c_a \cos\alpha + c_w \sin\alpha \\ c_t &= (c_w \cos\alpha - c_a \sin\alpha) \cos\tau \\ c_s &= (c_w \cos\alpha - c_a \sin\alpha) \sin\tau \end{aligned} \tag{1}$$

Das Vorzeichen ist hierbei so festgesetzt, daß c_t, c_n und c_s in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, und daß die körperfesten Achsen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ unter Beibehaltung

des früher eingeführten Richtungssinnes von $\mathfrak{x}$ nach vorn und von $\mathfrak{y}$ nach oben gleichfalls ein Rechtssystem bilden; die $\mathfrak{z}$-Achse weist dabei nach der rechten Seite des Flugzeugführers; der Winkel τ ist positiv, wenn bei der Drehung die rechte Flügelseite nach vorn rückt. So gehört zu positivem τ bei $\alpha = 0$ auch positives c_s. Direkte Messungen der Größen c_n, c_t und c_s sind in England ausgeführt worden; sie zeigen die Größenordnungen der Formeln (1), sind aber nicht genau genug, um darüber hinaus Aufschlüsse zu geben.

Die geringe Änderung der Luftkräfte infolge des Seitenwindes hat auch zur Folge, daß bei gewöhnlichen Flügeln kein „Quermoment" K um die $\mathfrak{x}$-Achse

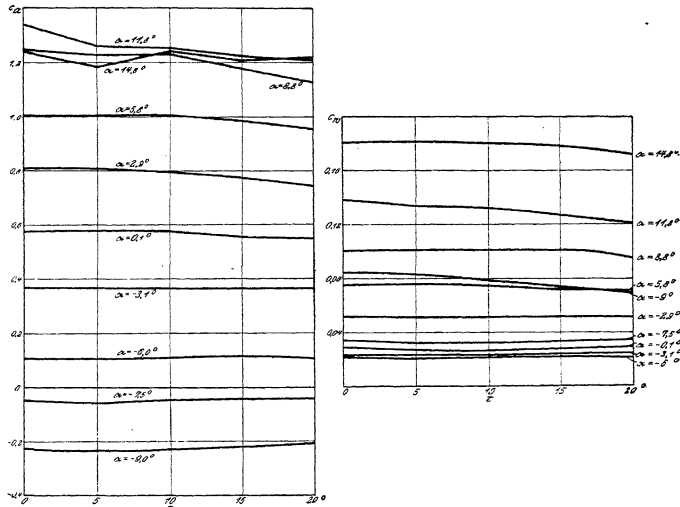



Abb. 267. Auftrieb und Widerstand in Abhängigkeit vom Seitenwinkel.

und kein „Seitenmoment" L um die $\mathfrak{y}$-Achse auftritt. Eine Ausnahme zeigt sich in dieser Hinsicht in der Nähe und jenseits des Auftriebsmaximums, wie Abb. 268 nach Göttinger Versuchen (am selben Profil wie bei Abb. 267) zeigt. Auch bei englischen Modellversuchen ergab sich derselbe Effekt, für den eine ganz befriedigende Erklärung noch nicht gegeben werden kann.

Wir führen das Vorzeichen der Momente — um mit den üblichen Bezeichnungen bei der symmetrischen Bewegung in Übereinstimmung zu bleiben — immer so ein, daß ein positives Moment dem postiven Drehsinn entgegenwirkt, also eine positive Drehung rückgängig zu machen sucht. So ist oben ein kopflastiges Längsmoment, welches einer Drehung von der positiven $\mathfrak{x}$- nach der positiven $\mathfrak{y}$-Achse entgegenwirkt, positiv gesetzt worden; so wirkt ein positives K von der positiven $\mathfrak{z}$- nach der positiven $\mathfrak{y}$-Achse hin.

Bei anderen Flugzeugteilen ist die Wirkung eines Seitenwindes aus den bekannten Auftriebs- und Widerstandsverhältnissen abzuschätzen. Im allgemeinen wird der schädliche Widerstand etwas wachsen, wenn der Seitenwind wächst; denn die dem Wind gebotene Fläche wird größer und die Form aerodynamisch ungünstiger. Bei Rümpfen tritt eine relativ starke Transversalkraft auf; denn es entsteht ein Auftrieb wie bei einem Rumpf mit Anstellwinkel; natürlich ist hier aber diese Kraft den Modellmessungen ohne Flügel zu entnehmen, also wesentlich kleiner als die Auftriebskraft des Rumpfes in der Symmetrieebene des Flugzeugs (vgl. I. Teil, 6. Kap. § 4). Eine Auftriebskraft wird auch auf Streben erzeugt, welche von der Seite Wind bekommen; eine Strebe verhält sich dann wie ein symmetrisches Flügelprofil und hat bedeutend größere Luftkräfte aufzunehmen als bei symmetrischer Flugzeugbewegung.

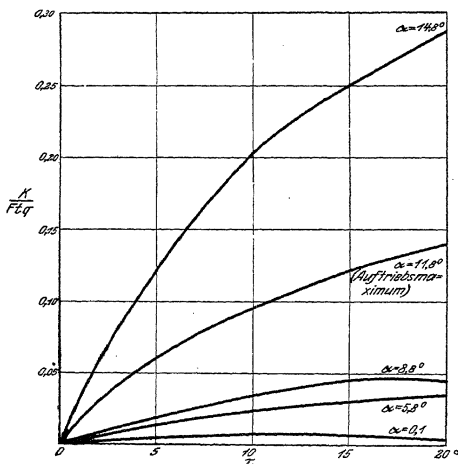



Abb. 268. Quermoment auf einen Flügel bei Seitenwind.

Die Seitenkraft (c_Q) ist experimentell wenig erforscht; sie ist auch wegen ihrer Kleinheit von geringer praktischer Bedeutung. Die unsymmetrischen Kräfte und Momente am Flugzeug werden fast ausschließlich nicht durch Ausnutzung einer derartigen c_Q-Komponente, sondern aus Auftriebskräften gewonnen, welche an geeignet liegenden Flugzeugteilen entstehen. So ist in erster Linie die Kraft auf das Seitenleitwerk eine Auftriebskraft, welche bei symmetrischer Bewegung nicht vorhanden ist; sie spielt als Kraft, wie jede Leitwerkskraft, im Haushalt des Flugzeugs eine unbedeutende Rolle, wirkt aber an einem großen Hebelarm.

Um auch die Flügelkräfte bei gewöhnlichem Anstellwinkel vom Seitenwind abhängig zu machen, muß man die Flügel nicht einfach senkrecht zur Symmetrieebene bauen, sondern sie in der Symmetrieebene V-förmig zusammenstoßen lassen. Die V-Stellung werde durch den spitzen Winkel 2ν zwischen den Sehnenebenen der beiden Flügel gemessen. Die Sehnenebene eines Flügels schließt dann mit der Ebene senkrecht zur Stielachse, in welcher die Drehung τ vorgenommen wird, den Winkel ν ein. Der wahre Anstellwinkel α_1 des Flügels gegen die Flugbahn wird dadurch ein anderer als der Anstellwinkel α der Rumpfachse. Abb. 269 zeigt die Kugeldreiecke auf der in Abb. 266 verwendeten Einheitskugel, aus welchen die Beziehung zwischen α und α_1 entnommen werden kann. Solange alle Winkel als klein angesehen werden können, wird

$$\alpha_1 = \alpha + \nu\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Da ν und τ klein sind, ist die Änderung von zweiter Größenordnung; es wird aber, im Gegensatz zu den Flügeln ohne V-Stellung, durch den Seitenwind der Anstellwinkel und somit auch die große Auftriebskomponente beeinflußt und dadurch eine relativ starke Wirkung erzielt, welche der oben geschilderten Wirkung der Pfeilstellung ganz analog ist.

Im Sinne unserer Vorzeichenregel haben wir einen Winkel ν als positiv anzusehen, der einer Drehung von der positiven $\mathfrak{y}$- nach der positiven $\mathfrak{z}$-Achse entspricht; also ist bei der gewöhnlichen V-Stellung der Flügel nach oben, der Winkel auf der linken Flugzeugseite $+\nu$, auf der rechten $-\nu$. Die Luftkraft wird auf der Seite, von welcher der Wind weht, erhöht, auf der anderen erniedrigt. Die Gesamtkraft wird daher dieselbe wie ohne Seitenwind, aber es entsteht ein Moment K um die Rumpfachse des Flugzeugs, welches bei voller Gleichförmigkeit der Flügel, wenn der Auftriebsmittelpunkt also nicht schon ohne V-Stellung seitlich aus der Mitte des Flügels verschoben ist, die Größe hat:

$$K = -\frac{d c_n}{d \alpha} \quad \frac{F}{2} \cdot \frac{b}{2} \text{ (b Spannweite)} \qquad (3)$$

Göttinger Messungen stimmen mit dieser Formel gut überein. Für große Anstellwinkel, die ein bedeutendes K auch ohne V-Stellung aufweisen, ist der Wert der Abb. 268 unabhängig von der V-Stellung maßgebend. Das bei positivem ν und τ entstehende Moment K dreht von der positiven $\mathfrak{y}$- nach der positiven $\mathfrak{z}$-Achse, ist also negativ zu nehmen.

Abb. 269.
Wirkung der V-Stellung.

Ein entsprechender Ausdruck, bei welchem nur an Stelle von c_n der Beiwert c_t tritt, findet sich für das Moment L; auch dies ist im Sinn unserer Vorzeichenregel mit negativem Vorzeichen anzuschreiben; es ist aber beim Flugzeug von untergeordneter Bedeutung, da es stets klein ist im Vergleich zu dem in der gleichen Drehebene wirkenden Moment, das vom seitlich angeblasenen Seitenleitwerk herrührt.

Bedeutendere Kräfte als durch den Seitenwind werden bei der unsymmetrischen Flugzeugbewegung dadurch erzeugt, daß die einzelnen Flügelelemente unter recht verschiedenen Bedingungen stehen. Beschreibt das Flugzeug eine Kurve in der Weise, daß die Flugbahn ständig die Symmetrieebene berührt, so daß also kein Seitenwind auftritt, so bewegt sich der innere Flügel langsamer wie der äußere; er nimmt also geringere Luftkräfte auf. Genauer gesagt wirken auf jedes Element der Flügel Kräfte nach denselben Gesetzen wie bei einer symmetrischen Bewegung; der Anstellwinkel ist auch für jedes Element derselbe, bzw. beim verwundenen Flügel eindeutig durch den Anstellwinkel der Rumpfachse bestimmt, aber die Geschwindigkeit ist von Element zu Element verschieden. Man kann die Größen der Kräfte und Momente, welche infolge dieses Umstandes auftreten, dadurch abschätzen, daß man die Kraft auf jedes einzelne Flügelelement so rechnet, wie wenn der ganze Flügel unter den Verhältnissen dieses Elementes stünde, und dann integriert. Beschreibt das Flugzeug eine Kurve vom Krümmungsradius ρ mit der Bahn-

geschwindigkeit v, und schließt die $\mathfrak{z}$-Achse mit der nach außen positiv gerechneten Richtung des Krümmungsradius den Winkel μ_1 ein, so ist die Geschwindigkeit eines Flügelelementes im seitlichen Abstand $\mathfrak{z}$ von der Symmetrieebene

$$v\left(1 + \mathfrak{z}\,\frac{\cos\mu_1}{\rho}\right).$$

Auf das Flächenelement des Flügels $t \cdot d\mathfrak{z}$ wirken dann die Normalkraft

$$c_n t\, d\mathfrak{z}\,\frac{\gamma}{2g}\,v^2\left(1 + \mathfrak{z}\,\frac{\cos\mu_1}{\rho}\right)^2$$

und eine entsprechende Tangentialkraft. Aus diesen Kraftdifferentialen erhält man die gesamten Kräfte, sowie die Momente um die flugzeugfesten Achsen durch Integration, wobei grundsätzlich auch noch die Tiefe und die Beiwerte — infolge Verwindung oder Profilverschiedenheit — von $\mathfrak{z}$ abhängen können.

Im einfachsten Fall eines unverwundenen, überall gleich tiefen Flügels und bei einem Krümmungsradius, der groß gegenüber den Abmessungen des Flugzeugs ist, ergibt sich dieselbe Normalkraft wie beim symmetrischen Flug, aber ein Moment um die $\mathfrak{x}$-Achse:

$$K = c_n t\,\frac{\gamma}{2g}\,v^2 \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(1 + \frac{2\mathfrak{z}\cos\mu_1}{\rho}\right)\mathfrak{z}\, d\mathfrak{z}.$$

Hier ist der Hebelarm $(+\mathfrak{z})$ einzusetzen, weil die Auftriebskräfte an der positiven $\mathfrak{z}$-Seite im Sinn eines positiven Momentes, d. i. von der positiven $\mathfrak{z}$- nach der positiven $\mathfrak{y}$-Achse drehen; es wird

$$K = c_n\, F\,\frac{\gamma}{2g}\,v^2 \cdot \frac{b^2\cos\mu_1}{6\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das Moment um die $\mathfrak{y}$-Achse wird

$$L = c_t\, F\,\frac{\gamma}{2g}\,\frac{b^2\cos\mu_1}{6\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Beschreibt das Flugzeug also z. B. eine Linkskurve, so daß der Winkel μ_1 spitz und $\cos\mu_1 > 0$ ist, so sind die Luftkräfte auf den äußeren (rechten) Flügel stärker; es ergeben sich Drehmomente im Sinn einer negativen Drehung um die $\mathfrak{x}$-Achse und um die $\mathfrak{y}$-Achse. Nach unserer Vorschrift sind daher K und L positiv zu setzen. In einem so einfachen Fall kann man wohl annehmen, daß man mit einer derartigen Integration den wirklichen Werten sehr nahekommt; wie weit dies bei kleinerem Krümmungsradius oder bei stark verwundenen oder verschieden profilierten Flügeln der Fall ist, läßt sich schwer beurteilen; direkte Messungen mit Hilfe von Schwingungen, die in England ausgeführt wurden, sind wohl auch nicht als zuverlässig anzusehen. Vielleicht wäre es am aussichtsreichsten, derartige Messungen am Rundlauf anzustellen.

Bei exakter Ausrechnung der Momente muß man berücksichtigen, daß unter Umständen, z. B. bei V-Stellung an Mehrdeckern, auch die Komponente c_s zum

Moment K beiträgt, daß auch vom Leitwerk ein solches Moment herrühren kann, wenn es einen nennenswerten Hebelarm um die $\mathfrak{x}$-Achse aufweist u. dgl. Diese Beiträge sind normalerweise so klein, daß man sie nicht weiter zu beachten braucht; in besonderen Fällen kann man sie leicht berücksichtigen. Auch die Beeinflussung des Längsmomentes M (s. 2. Kap.) der Flügel durch eine nicht zu enge Kurve kann nicht bedeutend sein; denn der Angriffspunkt der Luftkraft hängt nicht von der Geschwindigkeit ab, und die Größe der gesamten Flügelkraft erfährt nur Änderungen von der Ordnung $\frac{b^2}{\rho^2}$.

Von großer Bedeutung sind dagegen noch die dämpfenden Momente, die von der Drehung des Flugzeugs um seine Achsen herrühren. Dreht sich das Flugzeug im Raum, so erhalten die einzelnen Flächenteile, wenn sie vom Schwerpunkt genügend weit abstehen, eine nennenswerte Zusatzbewegung senkrecht zur Drehachse; dadurch wird die wahre Luftbewegung an den Flächen geändert, und zwar tritt einesteils eine Größenänderung der Relativgeschwindigkeit ein, die eben besprochen wurde, andererseits eine Richtungs-, also Anstellwinkeländerung. Diese kann bedeutende Wirkungen hervorrufen. Dreht sich das Flugzeug um seine Stielachse ($\mathfrak{y}$), so tritt an den Flügeln eine solche Anstellwinkeländerung nicht ein, da die Drehung im wesentlichen tangential zur Sehnenebene verläuft, wohl aber am Seitenleitwerk. Sei die Drehgeschwindigkeit $\omega_\mathfrak{y}$, die Entfernung des Seitenleitwerks vom Schwerpunkt l_S, so ist die Zusatzgeschwindigkeit am Leitwerk $l_S\,\omega_\mathfrak{y}$ im wesentlichen senkrecht zur Bahngeschwindigkeit v gerichtet, der Anstellwinkel des Seitenleitwerks also um $\frac{l_S\,\omega_\mathfrak{y}}{v}$ erhöht; es entsteht ein Dämpfungsmoment

$$L = \frac{}{d\alpha}\,\frac{l_S\,\omega_\mathfrak{y}}{v}\,\frac{\gamma}{2g}\,v^2 \qquad (6)$$

Dabei bezieht sich der Index S auf das Seitenleitwerk. Das Vorzeichen ergibt sich daraus, daß bei positivem $\omega_\mathfrak{y}$, d. i. bei einer Drehung des Flugzeugs von der positiven $\mathfrak{z}$- nach der positiven $\mathfrak{x}$-Achse, das Leitwerk — das bei positivem l_S hinter dem Schwerpunkt liegen soll — Wind von außen bekommt, also ein Moment entsteht, welches der Drehung entgegenwirkt, somit positiv zu setzen ist.

Ein ebensolches Dämpfungsmoment wirkt auf die Flügel, wenn sich das Flugzeug um die Rumpfachse dreht; die Drehgeschwindigkeit sei $\omega_\mathfrak{x}$, positiv, wenn von der positiven $\mathfrak{y}$- nach der positiven $\mathfrak{z}$-Achse gerichtet. Jedes Flügelelement erhält eine Zusatzgeschwindigkeit $\mathfrak{z}\,\omega_\mathfrak{x}$, und infolgedessen eine Anstellwinkelerhöhung um $\frac{\mathfrak{z}\,\omega_\mathfrak{x}}{v}$. Bei einer positiven Drehung wird der Anstellwinkel auf der rechten Seite erhöht, auf der linken erniedrigt; es entsteht ein Drehmoment K, welches der Drehung entgegenwirkt, sie also dämpft, und die Größe hat:

$$K = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_n \frac{\gamma}{2g}\, v^2\, t\, \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei c_n von $\alpha + \frac{\mathfrak{z}\,\omega_{\mathfrak{x}}}{v}$ abhängt; im besonderen Fall, wenn $\frac{\mathfrak{z}\,\omega_{\mathfrak{x}}}{v}$ klein ist, wird

$$c_n = c_{n0} + \frac{d\,c_n}{d\,\alpha} \frac{\mathfrak{z}\,\omega_{\mathfrak{x}}}{v}$$

und

$$K = \frac{d\,c_n}{d\,\alpha} \frac{\gamma}{2g}\,\omega_{\mathfrak{x}}\,v t\,\frac{b^3}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7a)$$

Mit diesem Dämpfungsmoment ist noch ein Moment um die Stielachse verbunden; denn die Anstellwinkeländerung hat auch eine Änderung der Tangentialkräfte im Gefolge; dies Moment wird

$$L = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_t \frac{\gamma}{2g} v^2 t \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und bei kleinem $\frac{\mathfrak{z}\,\omega_{\mathfrak{x}}}{v}$:

$$L = \frac{d\,c_t}{d\,\alpha} \frac{\gamma}{2g}\,\omega_{\mathfrak{x}}\,v t\,\frac{b^3}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8a)$$

Die Dämpfungsmomente sind ganz analog dem Dämpfungsmoment in der Symmetrieebene, welches bei der gestörten und beschleunigten Längsbewegung auftritt. Zum Unterschied davon spielen aber die Dämpfungsmomente der Seitenbewegung ihre Rolle auch bei stationärem Kurvenflug. Das Flugzeug dreht sich im allgemeinen um eine Achse, welche mit keiner der drei flugzeugfesten Achsen zusammenfällt; bei jeder, auch bei der stationären Seitenbewegung sind daher die Dämpfungsmomente um alle drei Achsen in Betracht zu ziehen.

Die einzelnen hier besprochenen Effekte treten im praktischen Fall alle gleichzeitig auf. Die Integrale, welche die Flügelmomente darstellen, enthalten dann lauter Abhängige von $\mathfrak{z}$. Im einfachsten Fall lassen sie sich in der Weise entwickeln, daß die Formeln dieses Paragraphen als Koeffizienten einer Reihenentwicklung auftreten. Bei Konstruktionen, welche vom Normaltyp abweichen, können Wirkungen von Bedeutung werden, auf die hier nicht ausdrücklich eingegangen wurde, die aber in ganz analoger Weise zu erfassen sind.

§ 2. Allgemeine Bewegungsgleichungen.

Zur Darstellung des Kraft- und Momentengleichgewichts bei der Seitenbewegung muß man zunächst ein geeignetes Koordinatensystem festlegen; es kommen erdfeste, bahnfeste und flugzeugfeste Koordinaten in Betracht. Bei den Kraftgleichungen der Längsbewegung hatten wir nur bahnfeste Koordinaten benutzt, bei der Momentengleichung flugzeugfeste, was sich allerdings nur in der Benutzung der Beiwerte c_n und c_t äußerte. Diese Auswahl ist wohl auch im Gebiet der Seitenbewegung die geeignetste.

Wir führen neben dem flugzeugfesten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$-Koordinatensystem ein x, y, z-System ein; in diesem sei x die Richtung der Flugbahn, z die dazu senkrechte in

der Horizontalebene gelegene Richtung, y senkrecht zu den beiden, positiv nach oben; x, y, z sollen wieder ein Rechtssystem bilden. Die gegenseitige Lage der beiden Koordinatensysteme sei in folgender Weise beschrieben (Abb. 270): Wir denken uns zunächst die beiden Systeme zur Deckung gebracht; dann werde das Flugzeug

1. um die x-Achse um den „Neigungswinkel μ" gedreht; dabei rückt y nach $\mathfrak{y}_1$ und z nach $\mathfrak{z}_1$. Bei dieser Drehung entstehen noch keine Luftkräfte; denn es ist nur die Orientierung des Flugzeugs gegen die Erde, nicht gegen die Bahn geändert worden.
2. Nun wird das Flugzeug, wie im vorigen Paragraphen, um seine senkrecht zur Symmetrieebene gelegene $\mathfrak{z}_1$-Achse um den „Anstellwinkel α" gedreht, der für die Luftkräfte in erster Linie maßgebend ist; x rückt nach $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ nach $\mathfrak{y}$. Der „Auftrieb" geht in Richtung $\mathfrak{y}_1$.
3. Schließlich wird wieder, wie im vorigen Paragraphen, um die $\mathfrak{y}$-Richtung um den „Seitenwinkel τ" gedreht; $\mathfrak{x}_1$ rückt nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}_1$ nach $\mathfrak{z}$; in welcher — im allgemeinen geringen — Weise diese Drehung auf die Luftkräfte wirkt, ist schon auseinandergesetzt.

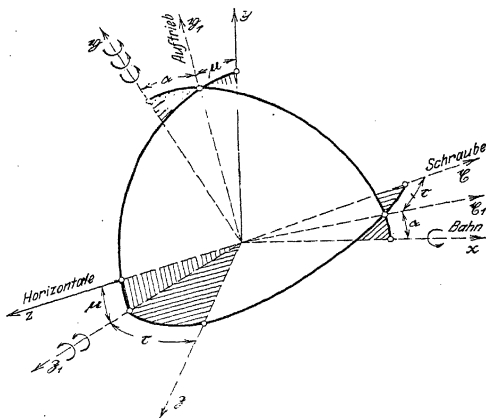



Abb. 270. Koordinatensysteme.

Die Schwerkraft hat keine Komponente in der z-Richtung; die Flugbahn (x-Richtung) schließe mit der Horizontalebene den Winkel φ ein. Die Schraubenkraft wirkt nach der $\mathfrak{x}$-Richtung und wird meist nur in der Bahnrichtung eine nennenswerte Komponente aufweisen. Die Zentrifugalkraft schließlich hat keine Komponente in der Bahnrichtung; sie wirkt in der Richtung des Krümmungsradius nach außen. Ihre y- und z-Komponenten sind der Größe nach gegeben durch $v\omega_z$ und $v\omega_y$, wenn ω_y und ω_z die betreffenden Komponenten der Drehgeschwindigkeit des Flugzeugs sind. Da die z-Achse nach Definition stets horizontal bleiben soll, ist die ganze Drehbewegung im x, y, z-System beschrieben durch eine Drehung um die z-Achse und durch eine Drehbewegung des ganzen x, y, z-Systems im Raume; letztere kann nur um eine raumfeste vertikale Achse stattfinden. ω_z ist identisch mit der zeitlichen Änderung des Bahnneigungswinkels $\frac{d\varphi}{dt}$; die Drehgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse ist eine neue für die Be-

wegung charakteristische Größe. Auf den Absolutwert des Seitenbewegungswinkels, als dessen zeitliche Ableitung man ω auffassen kann, kommt es aber — im Gegensatz zu φ — nicht an. Die Drehgeschwindigkeiten sind positiv im Sinne des Rechtssystems x, y, z zu rechnen.

Die Seitenbewegung des Flugzeugs wird durch sechs Größen beschrieben: Bahngeschwindigkeit v, Drehgeschwindigkeit ω, Steig- oder Gleitwinkel φ und Neigungswinkel μ, welche die Lage der Flugbahn und des Flugzeugs gegen die Erde angeben, Anstellwinkel α und Seitenwinkel τ, welche die Lage des Flugzeugs gegen die Flugbahn festlegen. Zur Bestimmung dieser sechs Unbekannten stehen die sechs mechanischen Gleichungen zur Verfügung.

Die Kraftgleichungen schreiben wir für das Koordinatensystem x, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ nieder:

$$x\text{-Achse:} \quad \frac{G}{g}\frac{dv}{dt} = -G\sin\varphi + S\cos\tau\cos\alpha - c_w q F \tag{9}$$

$$\mathfrak{y}_1\text{-Achse:} \quad 0 = \frac{G}{g} v \quad \sin \quad -\frac{d\varphi}{dt}\cos\mu\Big) - G\cos\varphi\cos\mu + S\cos\tau\sin\alpha + c_a q F \tag{10}$$

$$\mathfrak{z}_1\text{-Achse:} \quad 0 = G \quad v \quad \omega_y\cos\mu + \frac{d\varphi}{dt}\sin \quad + G\cos\varphi\sin\mu \tag{11}$$

Die Beiwerte c_a, c_w und c_Q hängen von α und τ ab; die Abhängigkeit von τ ist in der Regel sehr gering.

Die Momentengleichungen beziehen wir auf die drei flugzeugfesten Achsen durch den Schwerpunkt; wir nehmen dabei wieder zur Vereinfachung an, daß die Schraubenkraft durch den Schwerpunkt geht. Dann müssen die Momente der Trägheitskräfte mit denen der Luftkräfte im Gleichgewicht sein. Da bewegte Achsen verwendet werden, sind die sog. Kreiselglieder zu berücksichtigen. Mit $J_\mathfrak{x}$, $J_\mathfrak{y}$, $J_\mathfrak{z}$ seien die Trägheitsmomente um die drei flugzeugfesten Achsen bezeichnet; die Zentrifugalmomente sollen vernachlässigt werden; wir nehmen also an, daß die gewählten Achsen mit den Hauptachsen des Flugzeugs zusammenfallen. $\omega_\mathfrak{x}$, $\omega_\mathfrak{y}$, $\omega_\mathfrak{z}$ bezeichnen die Komponenten der Drehgeschwindigkeit um die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$-Achse. Die von den Luftkräften herrührenden Momente zerlegen wir in zwei Teile, solche die von den Flügeln und solche, die vom Leitwerk herrühren. Der Index $_F$ beziehe sich auf die Flügel, $_H$ auf das Höhenleitwerk, $_S$ auf das Seitenleitwerk. Die Momente um die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$-Achsen hängen ab von den Ruderausschlägen s_F, s_S und s_H der Querruder (Flügel), des Seitenruders und des Höhenruders.

Die Momentengleichungen lauten nun:

$$\frac{d\omega_\mathfrak{x}}{dt} \tag{12}$$

$$\frac{d\omega_\mathfrak{y}}{dt} \qquad = -L = -L_F - \tag{13}$$

$$\frac{d\omega_\mathfrak{z}}{dt}$$

Hier ist schon zum Ausdruck gebracht, von welchen Flugzeugteilen die einzelnen Momente herrühren, wenn es sich nicht um ganz besondere Konstruktionen handelt.

So kann z. B. ein Moment $K_{\mathfrak{S}}$ nur auftreten, wenn das Seitenwerk in bedeutender Höhenlage über oder unter der Rumpfachse angebracht ist.

Die Größen $\omega_{\mathfrak{x}}$, $\omega_{\mathfrak{y}}$, $\omega_{\mathfrak{z}}$ müssen in den oben gewählten Veränderlichen ausgedrückt werden; sie hängen ab von den beiden Drehgeschwindigkeiten der Flugbahn ω und $\frac{d\varphi}{dt}$ und von der zeitlichen Änderung der drei die Flugzeuglage bestimmenden Winkel μ, α und τ. Aus Abb. 270 folgen die Beziehungen.

Für die Bewegung des Flugzeugschwerpunkts ergeben sich die Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_x = \omega \sin\varphi \quad \omega_y = \omega\cos\varphi \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \qquad (15)$$

Transformiert man diese Ausdrücke auf Grund der Abb. 270 auf die flugzeugfesten Koordinaten, und fügt die Winkelgeschwindigkeiten $\frac{d\mu}{dt}$ um die x-Achse, $\frac{d\alpha}{dt}$ um die $\mathfrak{z}_1$-Achse und $\frac{d\tau}{dt}$ um die $\mathfrak{y}$-Achse hinzu, so erhält man die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{\mathfrak{x}} &= \left\{\left(\omega\cos\varphi\cos\mu + \frac{d\varphi}{dt}\sin\mu\right)\sin\alpha + \left(\omega\sin\varphi + \frac{d\mu}{dt}\right)\cos\alpha\right\}\cos\tau - \\
&\qquad - \left\{-\omega\cos\varphi\sin\mu + \frac{d\varphi}{dt}\cos\mu + \frac{d\alpha}{dt}\right\}\sin\tau \\
\omega_{\mathfrak{y}} &= \left(\omega\cos\varphi\cos\mu + \frac{d\varphi}{dt}\sin\mu\right)\cos\alpha - \left(\omega\sin\varphi + \frac{d\mu}{dt}\right)\sin\alpha + \frac{d\tau}{dt} \\
\omega_{\mathfrak{z}} &= \left\{\left(\omega\cos\varphi\cos\mu + \frac{d\varphi}{dt}\sin\mu\right)\sin\alpha + \left(\omega\sin\varphi + \frac{d\mu}{dt}\right)\cos\alpha\right\}\sin\tau + \\
&\qquad + \left\{-\omega\cos\varphi\sin\mu + \frac{d\varphi}{dt}\cos\mu + \frac{d\alpha}{dt}\right\}\cos\tau
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Die Variablen kommen also in diesen Ausdrücken in nicht ganz einfachem Zusammenhang vor; aber natürlich wird man bei keiner Rechnung alle Glieder mitschleppen müssen, sondern immer erhebliche Vereinfachungen anbringen können. So bleiben z. B. bei stationären Bewegungen nur die Glieder mit ω stehen. Für den früher behandelten Fall der reinen Längsbewegung findet man wieder $\omega_{\mathfrak{z}} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}$.

Die Luftkraftmomente hängen von allen sechs Veränderlichen ab; aber diese treten in einfachen Kombinationen auf. Die vom Flügel herrührenden Momente sind durch Integration über alle einzelnen Flügelelemente zu gewinnen; es ist

$$K_F = \frac{\gamma}{2g}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_n v^2 t \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} \qquad \qquad (18)$$

$$L_F = \frac{\gamma}{2g}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_t v^2 t \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} \qquad \qquad (19)$$

$$M_F = \frac{\gamma}{2g} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_m v^2 t^2 \, d\mathfrak{z} = \frac{\gamma}{2g} c_m F t v^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Der Ausdruck (20) unterscheidet sich nicht von dem Ausdruck, mit dem wir in früheren Kapiteln gearbeitet haben; das Längsmoment auf die Flügel wird bei der Seitenbewegung nicht wesentlich geändert; die kleinen Einwirkungen des Seitenwindes und der Drehbewegung können ganz außer Betracht bleiben. In den Integralen (18) und (19) sind alle unter dem Integralzeichen stehenden Größen als von $\mathfrak{z}$ abhängig anzusehen, teils durch die Konstruktion des Flugzeugs (verschiedene Tiefe und Einstellung der einzelnen Flügelelemente), teils infolge der Drehung.

Die Geschwindigkeit eines Flügelelementes wird geändert durch die Bewegung in der x-Richtung und senkrecht zur Holmachse, also durch eine Drehung in der $\mathfrak{z}$-x-Ebene mit dem Dreharm $\mathfrak{z} \cos \tau$; solange τ klein ist, kann die Zusatzgeschwindigkleit gleich $\omega_{\mathfrak{y}1} \mathfrak{z}$ gesetzt werden. Geschwindigkeitsänderungen durch Drehung um die $\mathfrak{z}$- oder $\mathfrak{z}_1$-Achse kommen meist wegen der geringen Dreharme $\mathfrak{y}$ nicht in Betracht. Der Anstellwinkel eines Flügelelementes wird durch eine Bewegung senkrecht zur Bahnrichtung und senkrecht zur Holmrichtung geändert, also nur durch die Drehung ω_x, deren Dreharm bis auf Größen zweiter Ordnung gleich $\mathfrak{z}$ gesetzt werden kann. Ferner sind c_n und c_t vom Seitenwind abhängig; aber nur bei V-Stellung und Pfeilstellung macht sich diese Abhängigkeit geltend. In seiner Abhängigkeit von $\mathfrak{z}$ wird c_n wesentlich beeinflußt durch den Ausschlag der Querruder s_F; auf diese Weise kann das Moment K_F willkürlich geändert werden. Das bei bestimmtem Querruderausschlag erzeugte Zusatzmoment um die Schraubenachse ist abhängig vom Anstellwinkel der Flügel, aber bei gewöhnlichen Flugwinkeln nur in geringer Weise. Wegen der relativen Größe von c_n gegenüber c_t ist das Moment K_F weit bedeutungsvoller als L_F.

Das Moment L_S auf das Seitenleitwerk hängt außer vom Ruderausschlag s_S nur von τ und von $\omega_{\mathfrak{y}1}$ ab. Wir können setzen:

. (21)

und können auch (wie früher beim Höhenleitwerk) nach der kleinen Größe $\frac{l_S \omega_{\mathfrak{y}1}}{v}$ entwickeln:

$c_{nS} =$. (22)

Die negativen Vorzeichen treten hier auf, weil bei positivem $\omega_{\mathfrak{y}1}$ der Winkel τ am Leitwerk verkleinert wird, und weil die positive Richtung von c_{nS} nach rechts geht, also ein negatives Moment erzeugt. Die Größe $\frac{\partial c_{nS}}{\partial \tau}$ ist identisch mit der im Modellversuch gemessenen Größe $\frac{\partial c_{aH}}{\partial \alpha_H}$, die im II. Kapitel besprochen wurde. Der Abwind der Flügel spielt beim Seitenleitwerk die Rolle eines Seitenwindes; seine Einwirkung wird wohl nicht bedeutend sein; zur Abschätzung fehlen die experimen-

tellen Unterlagen. Dagegen gilt für den Staudruck q wieder, daß er vom Schraubenstrahl erheblich vergrößert werden kann.

Das Moment M_H auf das Höhenleitwerk kann durch die unsymmetrische Bewegung nicht wesentlich beeinflußt werden; es gilt die früher verwendete Formel

(23)

mit der Entwicklung

$$\ldots, \alpha) \qquad \overline{\partial \alpha} \tag{24}$$

Die unsymmetrische Bewegung hat nur zur Folge, daß ω_3 nicht mehr durch $\frac{d(\varphi}{dt}$ ausgedrückt wird, sondern auch durch die anderen in (15) und (16) vorkommenden Größen, daß insbesondere auch bei einer stationären Bewegung, bei der ω von Null verschieden ist, eine Dämpfung und somit eine — allerdings meist kleine — Verminderung der Wirksamkeit des Höhenleitwerks eintreten kann.

§ 3. Der stationäre Kurvenflug; Kräftegleichgewicht.

Ein stationärer Flugzustand, d. i. ein Flugzustand, bei welchem sich weder die Bahnneigung, noch die Lage des Flugzeugs, noch das Gleichgewicht der Kräfte und Momente mit der Zeit ändert, wird dann erreicht, wenn unsere sechs Unbekannten v, ω, φ, μ, α und τ konstante Werte annehmen. Bei anderer Wahl der Variablen könnte man eine so einfache Aussage nicht machen; so z. B. könnte man nicht von einem stationären Zustand reden, wenn $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$ konstant wäre; es kommt für das Kräftespiel auf den Wert φ selbst an, während ein „Kurswinkel", als dessen Ableitung wir ω auffassen könnten, selbst ganz belanglos ist. Daraus folgt ohne weiteres, daß bei jedem stationären Kurvenflug, der senkrecht zur Bahn in der Drehebene verlaufende Hauptkrümmungsradius horizontal liegt. Der stationäre Kurvenflug ist eine Spiralbewegung auf einem Kreiszylinder mit vertikaler Achse.

Sind alle Konstruktionsgrößen des Flugzeugs gegeben, so erzwingt der Führer durch die Ausschläge der drei Steuerungen eine ganz bestimmte derartige stationäre Kurve, so wie im besonderen durch Ausschlag des Höhenruders allein eine bestimmte stationäre symmetrische Bahn erzwungen werden kann.

Wir gehen vor wie bei Behandlung der stationären Längsbewegung; wir betrachten zunächst nur die drei Kraftgleichungen und denken uns drei der Unbekannten durch Erfüllung der Momentengleichungen bestimmt, so daß wir sie als Parameter in die Kraftgleichungen einführen können. Anders ausgedrückt: wir ändern die Unbekannten, führen drei der bisherigen Unbekannten als konstante Parameter ein und setzen dafür die Ruderausschläge als Unbekannte an; dann ist das Studium der Momentengleichungen vollkommen loslösbar vom Studium der Kraftgleichungen, in welchen die Ruderausschläge nicht vorkommen. So wählten wir früher den Anstellwinkel als Parameter und trennten die Momentengleichung der reinen Längsbewegung von den Kraftgleichungen ab. Jetzt denken wir uns in erster Linie durch die richtigen Ruderausschläge ω und τ bestimmt und außerdem, je

nach der Problemstellung, φ oder α; dann zeigen die Kraftgleichungen den notwendigen Zusammenhang der anderen Variablen mit diesen Parametern. An Stelle der Drehgeschwindigkeit ω, kann man auch den Krümmungsradius

$$\rho = \frac{v \cos \varphi}{\omega} \quad \text{(25)}$$

als Unbekannte einführen.

Es gibt für das Flugzeug grundsätzlich zwei Möglichkeiten, die Zentrifugalkraft aufzunehmen, nämlich entweder durch Kräfte, welche der Seitenwind hervorruft (τ), oder durch Veränderung seiner Lage zur Drehebene (μ), wodurch die Auftriebskraft eine Komponente entgegen der Richtung der Zentrifugalkraft erhält (Abb. 271). Aus Gleichung (11) ist zu ersehen, daß die von τ herrührenden Kräfte nicht groß sein können; die Komponente des Schraubenschubs ist gering, wenn man nicht den fliegerisch unmöglichen Fall eines starken „Schiebens" (großes τ) in Betracht ziehen will, und die Luftkraftkomponente c_Q ist auch nur klein; sie rührt im wesentlichen vom Leitwerk und unter Umständen vom Rumpf her. Es ist aber unmöglich, eine wirklich bedeutende Kraft mit diesen Flugzeugteilen aufzunehmen. Diese Möglichkeit ist also nur dann von praktischer Bedeutung, wenn es sich um eine ganz kleine Zentrifugalkraft handelt; wir werden also damit zu rechnen haben, wenn wir unten die kleinen Abweichungen von der geraden Bahn untersuchen. Beim Kurvenflug mit erheblicher Drehgeschwindigkeit jedoch treten die von τ abhängigen Glieder vollkommen zurück; die Gleichung (11) wird fast allein durch richtige Auswahl des Neigungswinkels μ befriedigt.

Abb. 271. Gleichgewicht beim Kurvenflug.

Wir wollen also in erster Näherung den kleinen Einfluß des Seitenwindes vollkommen vernachlässigen und $\tau = 0$ setzen. Dann folgt aus Gleichung (11)

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{v \omega}{g} \quad \text{(26)}$$

Das Flugzeug legt sich in die Kurve wie ein Radfahrer, so daß die Resultierende der Schwere und der Zentrifugalkraft in die Symmetrieebene fällt. Unter diesen Voraussetzungen, und wenn wir wie früher $S = \frac{75 N \eta}{v}$ setzen und die Steiggeschwindigkeit $w = v \sin \varphi$ einführen, reduzieren sich nun die Gleichungen (9) und (10) auf:

$$75 N \eta - \quad 2g$$

und (27)

$$\sqrt{1} \quad \frac{\gamma}{2g} v^2$$

Diese Gleichungen bestimmen zwei der vier Größen v, ω, w und α, wenn die anderen beiden als Parameter gegeben sind. Der Winkel φ ist keine besondere Veränderliche, sondern durch v und w eindeutig bestimmt, und nur der Kürze halber in der Formel belassen. Man eliminiert nun v mit Hilfe der ersten Gleichung und erhält dann die zweite in einer übersichtlichen Gestalt durch Einführung der dimensionslosen Größen:

$$\xi = \left[\frac{(75\,N\eta - G w)^2\,F}{G^3}\,\frac{\gamma}{2\,g}\right]^{1/3}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (28)$$

$$\zeta = \frac{2\,G\,\omega^2}{g\gamma F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

Dann ist

$$\zeta = \frac{c_a^2}{c_w^{2/3}}\,\frac{\xi}{\cos^2\varphi} - \frac{c_w^{2/3}}{\xi}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (30)$$

ξ ist ein Maß für die aufzuwendende Arbeit, ζ ein Maß für die Drehfähigkeit des Flugzeugs. Beim Horizontalflug und beim Anstieg kann immer $\cos^2\varphi = 1$ gesetzt werden, beim Gleitflug ohne Motor

$$\cos^2\varphi = 1 - c_w^{2/3}\,\xi^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (31)$$

Der Übergang aus Gleichung (30) in die einfachere Gleichung des geraden Flugs $\zeta = 0$ bringt die früheren Ergebnisse

$$\xi^2 = \frac{c_w^{4/3}}{c_a^2} \text{ beim Anstieg}$$

und

$$\xi^2 = \frac{c_w^{4/3}}{c_a^2 + c_w^2} \text{ beim Gleitflug.}$$

Auch zeigt die Form der Gleichung ohne weiteres, daß bei bestimmtem Anstellwinkel ein schnellerer Anstieg und ein Gleitflug mit geringerer Fallgeschwindigkeit als der gerade durch Kurvenflug nicht zu erreichen ist. Dies ist physikalisch einleuchtend; denn im Kurvenflug wird ja die Belastung durch die Zentrifugalkraft erhöht; die Verhältnisse entsprechen also durchaus denen eines Flugzeugs mit größerem Gewicht.

Gleichung (30) gibt den Zusammenhang zwischen Anstellwinkel, Motorleistung bzw. Steiggeschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit bei gegebenen Konstruktionsgrößen; man kann in jedem Fall eine dieser Größen aus den anderen berechnen, insonderheit etwa nach der Drehgeschwindigkeit fragen, die bei bestimmter Motorleistung in bestimmter Höhe bei verschiedenen Anstellwinkeln ohne Höhenverlust erreicht wird, oder nach der Sinkgeschwindigkeit, wenn mit bestimmten Werten von Anstellwinkel, Motorleistung und Luftdichte eine bestimmte Drehgeschwindigkeit erzwungen werden soll. Von besonderem Interesse sind die Extremalwerte. Wir fragen zunächst nach der „wendigsten Kurve" im Horizontalflug, d. i. nach dem größten Wert der Drehgeschwindigkeit, der ohne Höhenverlust unter bestimmten Umständen erreicht werden kann, und sehen den Anstellwinkel dabei als veränderlich an. Dann muß sein:

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = 0 = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{c_a^2}{c_w^{2/3}}\right)\cdot\xi - \frac{d\,c_w^{2/3}}{d\alpha}\cdot\frac{1}{\xi} \quad \ldots \ldots \ldots (32)$$

Ist ξ sehr groß, so spielt der zweite Summand keine Rolle; der Anstellwinkel für die wendigste Kurve ist dann durch das Maximum des Verhältnisses $\frac{c_a}{c_w{}^{1/3}}$ gegeben; für kleinere ξ wird der Winkel kleiner; denn $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{c_a{}^2}{c_w{}^{2/3}}\right)$ ist für kleinere Winkel positiv und $\frac{d\,c_w{}^{2/3}}{d\alpha}$ ist für alle Winkel positiv. Der andere Grenzfall ist durch den kleinstmöglichen Wert von ξ gegeben; dieser gehört aber zum geraden Flug und führt auf das Maximum des Verhältnisses $\frac{c_a}{c_w{}^{2/3}}$. Hat die Motorleistung gerade den Wert, der bei maximalem $\frac{c_a}{c_w{}^{2/3}}$ zum Horizontalflug gehört, so ist eine Kurve ohne Höhenverlust nicht ausführbar. Ist ein Leistungsüberschuß vorhanden,

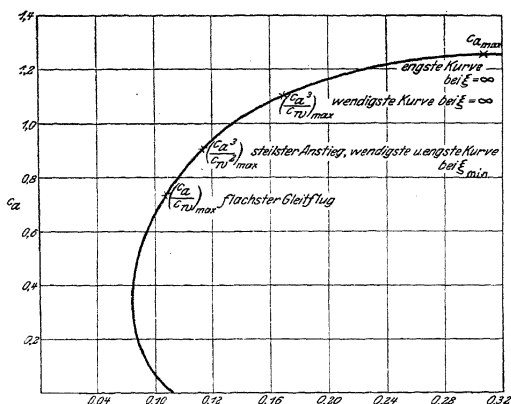



Abb. 272. Extremalwerte beim Kurvenflug.

so wird dieser zum Kurvenfliegen am besten ausgenutzt durch einen Anstellwinkel, welcher durch Gleichung (32) eindeutig gegeben ist, und immer zwischen den zu $\left(\frac{c_a{}^3}{c_w{}^2}\right)_{\max}$ und $\left(\frac{c_a{}^3}{c_w}\right)_{\max}$ gehörigen Werten liegt (Abb. 272). Für noch kleinere Werte von ξ gibt es keinen horizontalen Kurvenflug; Gleichung (32) gibt zwar auch für diesen Fall Extremalwerte; dieselben gehören aber nach (30) und (29) zu imaginären Werten von ω. Abb. 273 gibt einen Überblick über diese Verhältnisse, und zwar zeigt Abb. 273a den allgemeinen Zusammenhang, Abb. 273b die in einem bestimmten Fall zu folgernden numerischen Werte. Dort ist ein Flugzeug in verschiedenen Höhen verglichen und dabei die Abhängigkeit der Motorleistung nach Abb. 205 (Kapitel I), die Leistungsbelastung $\frac{G}{N_0} = 6{,}0$ kg/PS, die Flächenbelastung $\frac{G}{F} = 40$ kg/m² angenommen. Die Wendigkeit eines

Flugzeugs wird durch dieselben Umstände erhöht wie die Steigfähigkeit, durch kleine Leistungsbelastung, kleine Flächenbelastung, große Luftdichte.

Natürlich kann immer jeder Wert der Drehgeschwindigkeit zwischen Null und dem Höchstwert durch Veränderung des Anstellwinkels erreicht werden. Da beim Kurvenfliegen noch größere c_a-Werte benutzt werden als beim geraden Flug, ist die Gefahr des Überziehens in der Kurve erhöht. Die Beanspruchung des Flugzeugs in der Kurve ist gegenüber dem geraden Flug durch die Zentrifugalkraft erhöht; an Stelle des Flugzeuggewichts haben die Flügel die Resultierende

$$R = \qquad \frac{v^2\omega^2}{g^2} = \frac{G}{\cos\mu} \qquad (33)$$

aufzunehmen. Abb. 273b zeigt, daß die Überbelastung im stationären Flug nicht so bedeutend ist, daß sie für die Festigkeit des Flugzeugs allein maßgebend sein könnte; im nichtstationären Flug treten erheblich höhere Beanspruchungen auf.

Die wendigste Kurve beansprucht auch deshalb ein besonderes Interesse, weil sie die geringste Arbeit zum Umkehren erfordert, gleichgültig, ob diese Arbeit auf Kosten der Motorleistung oder durch Höhenverlust aufgebracht wird; denn diese Arbeit ist $(75\,N\eta - G\,w)\,\frac{\pi}{\omega}$, also bei gegebener Leistung um so kleiner, je größer die Drehgeschwindigkeit ist.

a)

b)

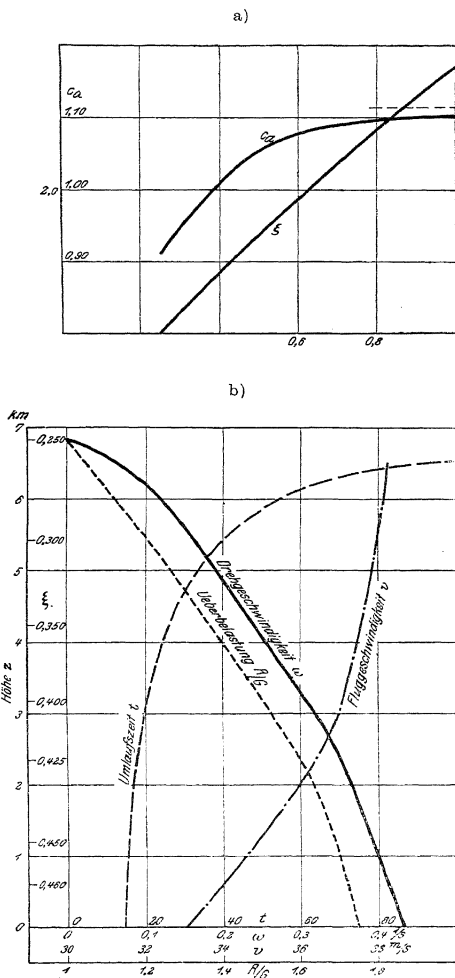



Abb. 273. Wendigste Kurve.

Die wendigste Kurve fällt nun nicht zusammen mit der engsten Kurve; erstere hat wohl praktisch das größere Interesse, doch kann es Fälle geben, in denen die vom Flugzeug umflogene Fläche von Wichtigkeit ist; man will etwa den kleinsten Radius des Zylinders kennen, auf welchem unter gegebenen Umständen das Flugzeug eine stationäre Spiralbewegung ausführen kann; man fragt dann nach der Größe ρ in (25). Zur Beziehung zwischen ρ, ξ und α gelangen wir in folgender Weise. Es ist nach (29), (25), (27) und (28)

$$= 2\,\frac{G}{\gamma F}\,\frac{v^2\cos^2\varphi}{\rho^2} = \left(\frac{2\,G}{\gamma F\rho}\right)^2 \frac{\cos^2\varphi}{c_w^{2/3}}\,.$$

Wir setzen

$$\chi = \left(\frac{2G}{\gamma F\rho}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

und erhalten dann nach (30)

$$\chi = \frac{c_a^2}{\cos^4\varphi} - \frac{c_w^{4/3}}{\xi^2\cos^2\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

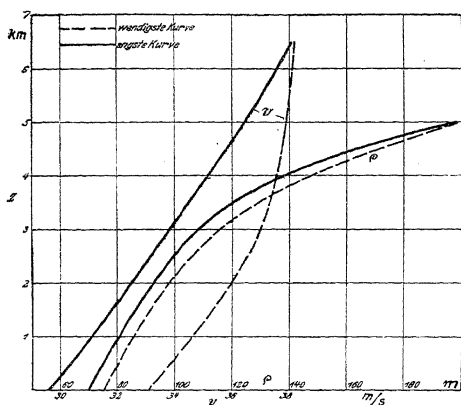



Abb. 274. Engste und wendigste Kurve.

Im Horizontalflug und Anstieg ($\cos\varphi = 1$) ist, wie bei der wendigsten Kurve, der kleinstmögliche Wert von $\xi = \left(\frac{c_w^{2/3}}{c_a}\right)_{\min}$ und gehört zum geraden Flug. Die engstmögliche Kurve wird bei jedem größeren ξ mit einem Anstellwinkel geflogen, der zu größeren c_a-Werten gehört. Für sehr große ξ nähert sich dieser Anstellwinkel demjenigen, zu welchem das Auftriebsmaximum gehört. Abb. 274 gibt einige Zahlwerte, welche die wendigste mit der engsten Kurve vergleichen lassen. Der Unterschied ist nicht groß, was den Krümmungsradius anlangt, etwas bedeutender bei der Fluggeschwindigkeit. Für Überschlagsrechnungen lohnt es sich meist nicht, exakt den günstigsten Anstellwinkel aufzusuchen; man kann den Wert $\left(\frac{c_a^3}{c_w^2}\right)_{\max}$ einsetzen, der bei Berechnungen der Steiggeschwindigkeit ohnehin verwendet wird.

Im Gleitflug lautet die Beziehung (30)

$$\zeta = \frac{c_a^2}{c_w^{2/3}} \cdot \frac{\xi}{1 - c_w^{2/3}\xi^2} - \frac{c_w^{2/3}}{\xi} = \frac{(c_a^2 + c_w^2)\,\xi^2 - c_w^{4/3}}{c_w^{2/3}\xi\,(1 - c_w^{2/3}\xi^2)} \quad \ldots \quad (36)$$

Die untere Grenze der ξ-Werte, welche zu einer möglichen Flugkurve gehören, ist durch $\zeta = 0$ gegeben, also

$$\frac{c_w^{4/3}}{c_a^2 + c_w}$$

Das Minimum dieser Größe stellt den kleinstmöglichen Wert von ξ^2, somit die kleinstmögliche Sinkgeschwindigkeit dar. Es ist also nicht möglich, durch Kurvenflug eine kleinere Sinkgeschwindigkeit zu erzielen, als im geraden Gleitflug. Wird ξ etwas größer, so wächst der Anstellwinkel größter Wendigkeit ganz ähnlich wie beim Horizontalflug. Solange $c_w^{2/3}\,\xi^2 \ll 1$ ist, hat in den Überlegungen für den Horizontalflug nur $c_a^2 + c_w^2$ an Stelle von c_a^2 zu treten. Aber während beim Horizontalflug ξ nur relativ beschränkte Werte annehmen konnte, kann es im Gleitflug sehr groß werden; denn der Sinkgeschwindigkeit ist erst dann eine Grenze gesetzt, wenn sie gleich der Fluggeschwindigkeit geworden ist. Aus den Beziehungen (27) und (28) folgt in diesem Fall der Wert

Abb. 275. Gekrümmte Gleitflüge mit Gleitwinkel 65 Grad.

Die Formel (36) zeigt in der Tat, daß für diesen Wert $\zeta = \infty$ wird, und höhere ξ-Werte keinen reellen Drehgeschwindigkeiten entsprechen. In diesem Grenzfall wird die Drehgeschwindigkeit unendlich, nicht aber die Zentrifugalbeschleunigung $v\omega\cos\varphi$; denn $\cos\varphi$ wird Null. Die Zentrifugalkraft ist

$$\frac{G}{g}\,v\,\omega\cos\varphi = \frac{G}{g} \qquad c_w F \qquad c_w$$

Die Bewegung ist ein senkrechter Sturzflug, bei welchem sich das Flugzeug unendlich schnell dreht; dabei wird das Gewicht vom Widerstand, die Zentrifugalkraft vom Auftrieb aufgenommen. Eine solche Bewegung ist, — soweit nur das Kräftegleichgewicht in Frage kommt —, mit jedem Anstellwinkel möglich; die Art, wie sich ω der Unendlichkeit nähert, bzw. die Größe der Drehgeschwindigkeit bei nahezu senkrechter Flugbahn hängt vom Anstellwinkel ab.

Der Bereich der möglichen Anstellwinkel des normalen Bereichs bei gegebenem ξ liegt zwischen den Schnittpunkten der Geraden $\xi^2 = \text{Const}$ und der beiden Kurven $\frac{c_w{}^3}{c_a{}^2 + c_w{}^2}$ und $c_w^{-\;3}$ in Abhängigkeit von c_a. Die Drehgeschwindigkeit ist an der unteren Grenze des Intervalls Null und steigt — unter Umständen über ein uninteressantes Maximum und Minimum — zu unendlich an. Abb. 275 zeigt Zahlen-

werte von ω, wenn die Sinkgeschwindigkeit 90 vH der Fluggeschwindigkeit beträgt, also die Bahn mit der Vertikalen einen Winkel von etwa 65⁰ einschließt; dabei ist $\frac{G}{F} = 40$ kg/m² und $\gamma = 1{,}0$ kg/m³ angenommen.

§ 4. Momentengleichgewicht; Flug- und Trudelkurven.

Die Flugbahnen, welche im vorigen Paragraphen beschrieben wurden, werden durch die drei Ruder erzwungen; man kann nach den Ruderausschlägen fragen, welche zur Aufrechterhaltung des Momentengleichgewichts bei einer bestimmten Kurve nötig sind; man kann auch die Rudergröße ermitteln, welche bei mäßigem Ausschlag bestimmte Bahnen möglich macht. Von diesem Standpunkt aus wird man besonders den wendigsten Kurven im Horizontalflug die Aufmerksamkeit zuwenden. Bei allen Horizontalflügen, wie auch bei Anstieg und flachem Gleitflug ist die Drehgeschwindigkeit so mäßig, daß $\frac{l_S\,\omega}{v}$ und $\frac{b\,\omega}{2v}$ klein gesetzt, die Ausdrücke für die Luftkraftmomente entwickelt und die Kreiselmomente vernachlässigt werden können. Für den speziellen Fall stationären Kurvenflugs ohne Seitenwind haben die Komponenten der Drehgeschwindigkeit nach Abb. 270 folgende Größe:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_x = \omega \sin\varphi, \qquad \omega_y = \omega\cos\varphi, \qquad \omega_z = 0,\\
&\omega_{\mathfrak{y}1} = \omega\cos\varphi\cos\mu,\\
&\omega_{\mathfrak{z}1} = -\,\omega\cos\varphi\sin\mu = \omega_{\mathfrak{z}},\\
&\omega_{\mathfrak{x}1} = \omega\,(\cos\varphi\cos\mu\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \omega_{\mathfrak{x}},\\
&\omega_{\mathfrak{y}} = \omega\,(\cos\varphi\cos\mu\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha).
\end{aligned}\right\} \quad . \qquad (37)$$

Für den horizontalen oder nahezu horizontalen Flug vereinfachen sich diese Gleichungen noch weiter; eine besondere Erleichterung für die Ausrechnung der Momente bedeutet es, wenn man $\sin\varphi = 0$ setzen kann; denn mit ω_x entfällt die Veränderlichkeit des Anstellwinkels über den Flügel hin (natürlich bis auf die konstante, durch Verwindung gegebene Veränderlichkeit); die Momente um die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse rühren dann nur von der verschiedenen Geschwindigkeit der einzelnen Flügelelemente her. Bezeichnet v die Schwerpunktsgeschwindigkeit, so ist die Geschwindigkeit eines Flügelelements im Abstand $\mathfrak{z}$ von der Symmetrieebene

$$v_{\mathfrak{z}} = v + \omega\mathfrak{z}$$

und es wird nach (18):

$$K_F = \frac{\gamma}{2g}\,v^2\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_n t\,\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z} + \frac{2\omega}{v}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_n t\,\mathfrak{z}^2\,d\mathfrak{z}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (38)$$

Das erste Integral ist das statische Moment der Normalkräfte um die Rumpfachse; dieses verschwindet bei voller Symmetrie und erhält einen endlichen Wert durch die unsymmetrische Einstellung der Querruder. Das zweite Integral ist das Trägheitsmoment der Normalkräfte; es ist maßgebend für die Wirkung der Drehbewegung. Da dieses Trägheitsmoment stets positiv ist, muß

bei stationärem horizontalem Kurvenflug das Querrudermoment negativ sein; auf der inneren Seite muß durch den Querruderausschlag die Normalkraft erhöht, auf der äußeren Seite erniedrigt sein. Ein solcher Ausschlag wirkt der Neigung des Flugzeugs, sich in die Kurve hineinzulegen, entgegen; also der Querruderausschlag, der einen Kurvenflug einleiten kann, ist dem entgegengesetzt, der einen Kurvenflug stationär aufrechterhält. In den Anfängen der Flugtechnik wurde das Quermoment durch willkürliche Verwindung des ganzen Flügels erreicht; jetzt bildet man allgemein nur die Flügelenden zu Rudern aus, die sich bei Betätigung des Steuers rechts und links im entgegengesetzten Sinne bewegen.

Der Ausdruck für das Moment um die $\mathfrak{y}$-Achse wird ganz ähnlich:

$$L_F = \frac{\gamma}{2g} v^2 \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_t t \mathfrak{z} \, d\mathfrak{z} + 2 \frac{\omega}{v} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_t t \mathfrak{z}^2 \, d\mathfrak{z} \right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Da c_t durch den Querruderausschlag nicht ebenso stark verändert wird wie c_n, wird im allgemeinen der Querruderausschlag zum Ausgleich dieses Momentes nicht dienen; im Ausgleich der Momente um die $\mathfrak{y}$-Achse spielt aber das Seitenleitwerk die ausschlaggebende Rolle. Das dort aufzunehmende Moment ist also auch dem Trägheitsmoment von Luftkräften auf die Flügel proportional, nicht aber der Seitenruderausschlag. Das Seitenruder steht nämlich nicht in einem Luftstrom, welcher der Flugrichtung entgegengesetzt ist; es hat vielmehr noch eine Drehgeschwindigkeit $l_S \omega$, wird also ohne Ruderausschlag und Seitenwind unter einem Anstellwinkel $\frac{l_S \omega}{v}$ von außen angeblasen und nimmt auch ohne Ruderausschlag ein Moment auf, das im gleichen (positiven) Sinn wie das Flügelmoment wirkt. Der Ruderausschlag nach innen, welcher das Flügelmoment ins Gleichgewicht setzt, muß diesem Anstellwinkel entsprechend vergrößert sein. Sonst tritt „Schieben“ des Flugzeugs ein, der Seitenwind τ erhält einen endlichen Wert. Der Seitenruderausschlag beeinflußt wesentlich nur die Größe von τ; da andererseits Quer- und Höhensteuerung von τ so gut wie unabhängig sind, kann das Seitenruder stets dazu dienen, den gewünschten Wert des Seitenwindes — meist Null — zu erzwingen.

Es liegt nahe, diese Überlegungen zur Dimensionierung der Querruder und des Seitenleitwerks zu benutzen; da jedoch die Leitorgane hauptsächlich für den nichtstationären Flug maßgebend sind, hat es kaum praktische Bedeutung, genaue Rechnungen anzustellen und etwa aus dem Höchstwert von $\frac{\omega}{v}$ im Horizontalflug und dem Trägheitsmoment der Flügel die statischen Momente der Leitorgane zu berechnen. Nur soviel kann man wohl festhalten, daß der Quotient $\frac{\text{Trägheitsmoment der Flügel}}{\text{Statisches Moment des Leitorgans}}$, also eine Länge das Maß für die Wirksamkeit der Leitorgane abgibt. Wie groß diese Länge im Einzelfall gewählt werden muß, kann einstweilen nur die Erfahrung lehren.

Bei Flugzeugen mit zwei oder mehreren Luftschrauben ist unter Umständen nicht der so berechnete Wert maßgebend; man muß immer auch das statische Moment des Seitenleitwerks errechnen, welches nötig ist, um den geraden Flug weiter zu ermöglichen, wenn eine Schraube versagt.

Von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus ist das Momentengleichgewicht beim steilen Gleitflug interessant. Steile Spiralgleitflüge werden selten absichtlich vollführt; aber sie treten sehr häufig ungewollt auf. Weitaus die meisten Unglücksfälle sind auf solche Bewegungen zurückzuführen, bei welchen die Flugbahn steil nach unten verläuft und das Flugzeug rasche Drehungen ausführt. Man pflegt in der Fliegersprache diese Bewegung „Trudeln" zu nennen. Die große Gefahr liegt dabei in der Unempfindlichkeit gegen Steuerausschläge im allgemeinen; nur ganz bestimmte, nicht gerade naheliegende Manöver bringen das Flugzeug langsam wieder in einen erwünschten Flugzustand und in die Hand des Führers. Auch tritt der gefährliche Zustand leicht ein, ohne daß besonders auffallende Stellungen oder Bewegungen der Ruder vorliegen; so kommt z. B. ein Flugzeug im Nebel, wenn die Orientierung durch das Auge wegfällt, sehr leicht ins Trudeln; dabei hat der Führer oft gar nicht das Gefühl, daß in seinem gleichförmigen Flug eine Veränderung eingetreten ist.

Da diese Trudelkurven lange Zeit ohne wesentliche Änderung bestehen können, muß man sie als stationäre Kurven ansprechen; die Frage ist, wodurch sie sich wesentlich von den Flugkurven unterscheiden, bei welchen das Flugzeug fest in der Hand seines Führers ist. Was im vorigen Paragraphen über das Kräftegleichgewicht gesagt wurde, gibt den Rahmen für beide Arten von Kurven ab; der Unterschied muß in der Art liegen, wie sich das Momentengleichgewicht herstellt.

Qualitative Aufklärung gibt ein Modellversuch, der zuerst in England von Relf und Lavender angestellt wurde. Befestigt man das Modell eines Flugzeugs oder auch nur eines Flügels so im Luftstrom, daß es um die Rumpfachse drehbar ist, und variiert den Anstellwinkel, so bleibt bei kleinen Anstellwinkeln das Modell ruhend im Gleichgewicht, bei größeren (etwa $> 10^0$) dreht es sich mit einer Drehgeschwindigkeit, welche in einfacher Weise von der Windgeschwindigkeit und vom Anstellwinkel abhängt. Die Drehgeschwindigkeit ist aus dem Momentengleichgewicht um die Drehachse

$$K_F = 0$$

zu berechnen, und zwar wird bei dieser Anordnung K_F nur vom mittleren Anstellwinkel und von der Anstellwinkeländerung am einzelnen Flügelelement, die von der Drehung ω_x herrührt, abhängen. Die Geschwindigkeitsänderung wie in Gleichung (38) tritt nicht ein. Kann man $\frac{\omega_x \mathfrak{z}}{v}$ klein setzen, so folgt analog Gleichung (38), wenn ein Querruderausschlag nicht vorhanden ist:

$$K_F = \frac{\gamma}{2g} v^2 \cdot \frac{\omega_x}{v} \frac{d c_n}{d \alpha} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \mathfrak{z}^2 t \, d\mathfrak{z}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur, wenn entweder $\omega_x = 0$ oder $\frac{d c_n}{d \alpha} = 0$ ist; für denjenigen Anstellwinkel, bei welchem die Normalkraft ihren Höchstwert erreicht, könnte danach eine Drehung mit beliebiger Geschwindigkeit stattfinden, ohne daß das Momentengleichgewicht gestört wäre. Um die Meßergebnisse zu verstehen, darf man aber nicht mit der Voraussetzung „$\frac{\omega_x \mathfrak{z}}{v}$ klein" rechnen; man muß vielmehr setzen:

$$K_F = \frac{\gamma}{2g} v^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c_n\left(\alpha + \frac{\omega_x \mathfrak{z}}{v}\right) \mathfrak{z}\, t\, d\mathfrak{z} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Hierbei soll die Klammer unter dem Integral bedeuten, daß c_n nur von $\alpha + \frac{\omega_x \mathfrak{z}}{v}$ abhängt. Man kann diesen Ausdruck nach Bairstow auf eine recht handliche Form bringen. wenn man t konstant setzt, die neue Unbekannte

$$\xi_0 = \frac{\omega_x}{v} \cdot \frac{b}{2}$$

einführt und mit δc_n den Unterschied zwischen den Normalkraftbeiwerten bezeichnet, welche zu $\alpha + \xi$ und $\alpha - \xi$ gehören. Es wird dann

(41)

Dabei hängt δc_n nur von $\alpha + \xi$ ab. — In Abb. 276 ist c_n als Funktion von α aufgetragen; c_n ist nur für kleine Anstellwinkel identisch mit c_a; das Maximum von c_n liegt aber bei einem etwas höheren Anstellwinkel wie das von c_a und ist etwas flacher; bei großem Anstellwinkel ($> 30^0$) ist c_n konstant, die ganze Luftkraft ist normal zur Fläche gerichtet und vom Winkel unabhängig. Spiegelt man nun die Kurve an irgendeiner Linie $\alpha = \text{Const}$ (gestrichelte Linien in der Abbildung), so gibt der Abstand der ursprünglichen von der gespiegelten Kurve den Wert von δc_n; das statische Moment der von den beiden Kurven begrenzten Fläche, bezogen auf den Spiegelungspunkt bis zum Grenzwert ξ_0, ist das Integral in (41). Man sieht ohne weiteres, daß dies Integral für Anstellwinkel, die unter dem zum Maximalwert gehörigen liegen, nie verschwinden kann, und daß es bei jedem größeren Anstellwinkel einen bestimmten Wert von ξ_0 gibt, welcher das Integral zum Verschwinden bringt. Zu jedem solchen Anstellwinkel gehört also ein bestimmter Wert von $\frac{b}{2} \frac{\omega_x}{v}$, somit bei gegebenen b und v eine bestimmte Drehgeschwindigkeit; für welche das Momentengleichgewicht hergestellt ist. Abb. 277 zeigt die Übereinstimmung der so berechneten und der gemessenen Werte nach Bairstow. Natürlich könnte das Modell auch ohne Drehung im Gleichgewicht sein; doch ist dies Gleichgewicht nicht stabil, wie wir in späteren Paragraphen sehen werden.

Versuche im Fluge, die gleichfalls in England angestellt wurden, haben die Wesensgleichheit der Trudelkurven mit der „Autorotation“ (Eigendrehung) des Flügelmodells insofern erwiesen, als auch bei jenen ein großer Anstellwinkel und eine nahezu mit der Drehachse zusammenfallende, also vertikale Bewegungsrichtung gestellt werden konnte.

Aber diese Ähnlichkeit genügt noch nicht zum vollen Verständnis und zur konstruktiven Beherrschung der Trudelkurven. Man versteht noch nicht die starke ɔfindlichkeit gegen das Steuer und versteht nicht, wie ein so großer Anstell- ohne wesentliche Betätigung des Höhensteuers zustande kommen und sich

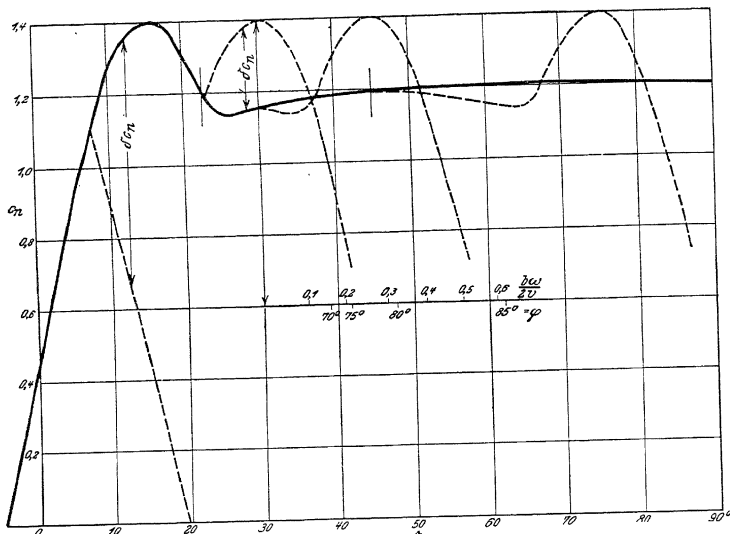



Abb. 276. Zur Erklärung der Autorotation.

erhalten kann. Das Gleichgewicht der Längsmomente erfährt — wie oben bei Besprechung des überzogenen Fluges schon auseinandergesetzt wurde — bei großem Anstellwinkel eine mächtige Störung; während die Normalkraft ihren Wert nur wenig ändert, rückt der Druckpunkt um etwa ein Zehntel der Flügeltiefe hinter den Schwerpunkt, so daß von den Flügeln ein starkes kopflastiges, also positives Moment herrührt. Auch das unausgeschlagene Leitwerk erzeugt ein großes kopflastiges Moment, und eine überschlägige Rechnung auf Grund der wenigen bis in dieses Gebiet reichenden Modellversuche zeigt, daß mit Ruderausschlag das Gleichgewicht der Längsmomente für Anstellwinkel über 16—20° kaum zu erzwingen ist (Abb. 278). Aber Trudelbewegungen, bei denen nach den englischen Messungen noch wesentlich höhere Anstellwinkel vorkommen, treten auch ohne

derartig extreme Ruderausschläge auf und verschwinden nicht, wenn man absichtlich gegebene große Ausschläge des Höhenruders zurücknimmt.

Um zur Klarheit darüber zu kommen, müssen wir nicht mehr wie bisher die Ruderausschläge als Unbekannte ansehen, sondern fragen, welche stationäre Bahnen zu bestimmten Ruderausschlägen gehören. Die folgende Diskussion wird zeigen, daß im allgemeinen zu jeder Kombination von Ruderausschlägen nicht nur eine, sondern zwei mögliche Bahnen gehören, von denen eine mit kleiner Drehgeschwindigkeit und flacher Neigung gegen die Erde verläuft, die andere unter rascher Drehung steil nach unten; der Anstellwinkel der ersteren liegt im normalen Bereich, bei der letzteren nimmt er hohe Werte an; dies wird bei normalem Ruderausschlag möglich durch das große Kreiselmoment, das bei rascher Drehung um die Holmachse wirkt.

Abb. 277.
Autorotation nach englischen Messungen.

Das Gleichgewicht der Momente um die $\mathfrak{y}$-Achse ist von geringer Bedeutung; die Stellung des Seitenruders beeinflußt im wesentlichen die Größe von τ, und diese Größe ist wiederum von sehr geringem Einfluß auf das übrige Gleichgewicht der Momente und Kräfte. Wir können daher im folgenden annehmen, daß durch die Einstellung des Seitenruders stets $\tau = 0$ gemacht wird; die Abweichungen davon sind durchaus zu vernachlässigen.

In den anderen beiden Momentengleichungen eliminieren wir die Unbekannten ω und μ durch die Beziehungen

$$\cos\mu = -\frac{c_w}{c_a}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \tag{42}$$

und

$$\frac{b}{2}\frac{\omega}{v} = \frac{\gamma F b}{4G}\cdot\frac{c_w \operatorname{tg}\mu}{\sin\varphi}, \tag{43}$$

welche für den stationären Kurvenflug ohne Motor aus den Gleichungen (26) und (27) folgen. Dann bleiben in den Momentengleichungen nur noch die beiden Unbekannten Bahnneigung φ und Anstellwinkel α stehen. Dabei bezeichnen wir jetzt mit α immer den Anstellwinkel in der Symmetrieebene; die in den Gleichungen (42) und (43) auftretenden Beiwerte ordnen wir den α-Werten so zu, wie wenn der Anstellwinkel nicht von Flügelelement zu Flügelelement verschieden wäre. Diese Vernachlässigung, welche bei Berechnung des Momentengleichgewichts nicht gemacht werden darf, kann bei Berechnung des Kräftegleichgewichts keinen großen Fehler bedeuten.

Das Momentengleichgewicht um die $\mathfrak{x}$-Achse wird in ganz analoger Weise hergestellt, wie bei dem einfachen Fall der Autorotation. Man kann den Ausdruck (18) für das Moment K_F von zwei Seiten her näherungsweise berechnen:

1. $\frac{b\omega}{2v}$ ist klein, dann führt eine Taylorsche Entwicklung zu dem Ausdruck

$$\mathfrak{K} = \frac{K_F}{\frac{\gamma}{2g} v^2 F b} = C_S + \frac{1}{12} b \left(\frac{d c_n}{d\alpha} \frac{\omega_x}{v} + 2 c_n \frac{\omega_{\mathfrak{y}1}}{v}\right)$$

$$= C_S + \frac{1}{12} \frac{b\omega}{v} \left(\frac{d c_n}{d\alpha} \sin\varphi + 2 c_n \cos\varphi \cos\mu\right). \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

Hierbei ist C_S eine nur vom Ruderausschlag, bei normalen Anstellwinkeln auch nicht vom Anstellwinkel abhängige Konstante und die Tiefe t ist konstant an-

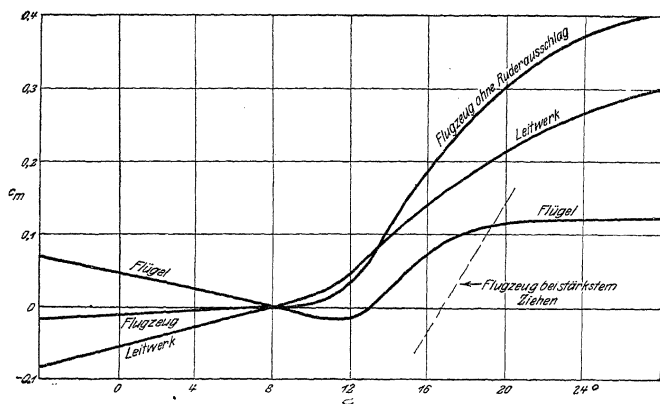



Abb. 278. Längsmomente bei großen Anstellwinkeln.

genommen. Abb. 279 zeigt $\mathfrak{K} - C_S$ in Abhängigkeit von α mit dem Parameter φ. Unter Annahme eines bestimmten Wertes von φ folgen $\frac{b\omega}{2v}$ und $\cos\mu$ für jedes α aus den Gleichungen (42) und (43); somit kann $\mathfrak{K} - C_S$ nach (44) berechnet werden. Die Schnittpunkte der so erhaltenen Kurven mit der α-Achse, zeigen die Anstellwinkel an, bei welchen ohne Querruderausschlag ein Flug mit dem betreffenden Bahnneigungswinkel φ möglich ist. Die Kurven schneiden die α-Achse im allgemeinen in drei Punkten; davon gehören die beiden äußeren zum Werte $\frac{b\omega}{2v} = 0$, stellen also gerade Flüge dar; der mittlere gehört zu dem der Autorotation des Flügels entsprechenden Flugzustand. Zeichnet man auch die Kurven $C_S = \text{Const}$ in das Diagramm ein, so erhält man ebenso zwei Flugzustände mit kleinem, einen Flugzustand mit großem $\frac{b\omega}{2v}$. Diese Einzeichnung ist aber in Abb. 279 unter-

blieben, da Messungen, welche für den Verlauf der Kurven genügend Anhalt geben könnten, nicht vorliegen. Zu jedem Querruderausschlag gehört also eine einfach unendliche Schar von möglichen stationären Flugzuständen, in welchen das partielle Momentengleichgewicht herrscht.

2. Ist $\frac{b\,\omega}{2\,v}$ nicht klein, so lassen die Gleichungen (37) erkennen, daß $\omega_{\mathfrak{y}1}$, welches den kleinen Faktor $\cos\varphi$ enthält, von kleinerer Ordnung ist als ω_x. Letzteres geht nach den Überlegungen des vorigen Paragraphen bei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ins Unendliche, $\omega_{\mathfrak{y}1}$ bleibt endlich. In diesem Fall gelangen wir also wieder zu dem Aus-

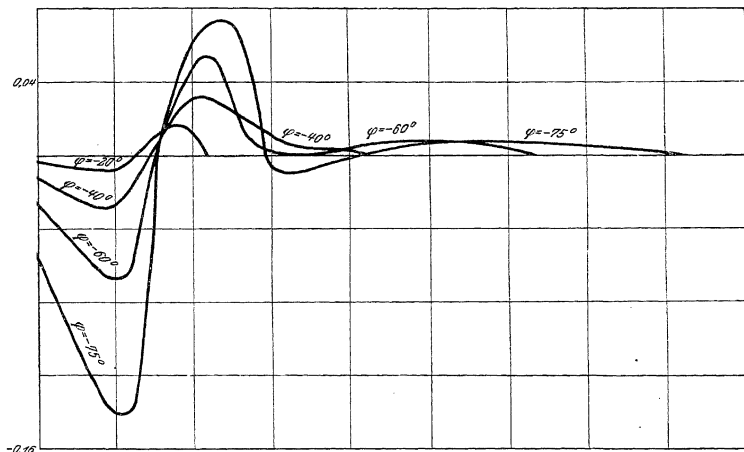



Abb. 279. Momentengleichgewicht um die Rumpfachse bei kleinem $\frac{b\,\omega}{2\,v}$.

druck (41). In Abb. 276 ist vom Winkel $\alpha = 30^0$ aus eine Skala der Werte $\frac{b\,\omega}{v}$ eingetragen und dabei sind die Werte angezeigt, welche der oberen Grenze $\frac{b\,\omega}{2\,v}$ bei verschiedenen Winkeln φ entsprechen. Rechnet man, wie oben bei Diskussion der Gleichung (41), so erhält man für jedes α einen bestimmten Wert φ, bei welchem ohne Querruderausschlag Gleichgewicht herrscht. Ein normaler Querruderausschlag kann wenig an diesem Gleichgewicht ändern. Wenn der Ausschlag in dem Sinne läuft, durch den das Flugzeug in die Kurve hineingelegt wird, so wird der Anstellwinkel am inneren Flügelende um einen bestimmten Betrag gegenüber dem am äußeren Flügelende herabgedrückt; um den Ausgleich der Momente herbeizuführen, ist also bei bestimmtem α ein kleinerer Wert von $\frac{b\,\omega}{2\,v}$ erforderlich. Gibt

man daher einen Gegenausschlag wie in der stationären Kurve mit kleiner Drehgeschwindigkeit, so gehört der gleiche Wert von φ zu einem kleineren α-Wert als ohne Querruderausschlag; der Einfluß ist indes gering.

Die Kreiselglieder in (12) können in erster Näherung vernachlässigt werden; denn sie gehen mit fallendem φ auch nur wie $\frac{b\,\omega}{2\,v}$ ins Unendliche, da $\omega_{\mathfrak{z}}$ mit $\cos\varphi$ multipliziert ist, und daher endlich und sogar klein bleibt. Auch der Faktor $\frac{J_{\mathfrak{y}} - J_{\mathfrak{z}}}{\frac{\gamma}{g}}$, der bei dimensionsloser Schreibweise in die Kreiselglieder tritt, ist in der Regel recht klein.

Die zusammengehörigen Werte von α und φ, bei welchen die $\mathfrak{x}$-Momente ohne

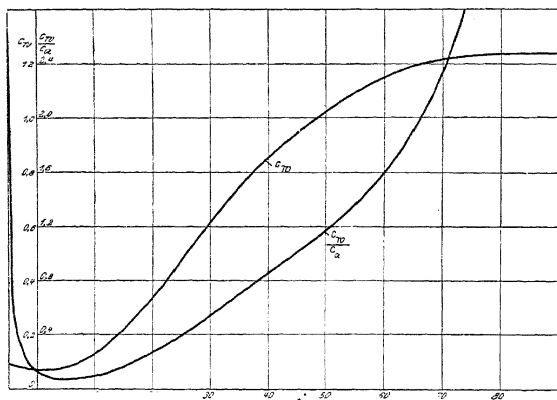



Abb. 280. Luftkraftbeiwerte bei hohen Anstellwinkeln

Querruderausschlag im Gleichgewicht stehen, sind in Abb. 281 als Kurven I eingetragen. Für $\varphi < 70^0$ ist mit Gleichung (44) gerechnet, für größere φ nach (41); dabei erzielt man im Übergangsgebiet gute Übereinstimmung. Für Anstellwinkel oberhalb des zum flachsten Gleitflug gehörigen gibt es neben der Möglichkeit des Gleichgewichts ohne Drehung auch ein durch Drehung aufrecht erhaltenes Gleichgewicht bei großen φ-Werten. Für $\alpha > 26^0$, gibt es zwei solche Werte von φ, wie ja schon Abb. 279 zeigt. Dies liegt am Durchgang der c_n-Kurve durch ein Minimum. Man darf aber diese Kurven, wie alle anderen Abbildungen dieses Paragraphen nur als qualitativen Ausdruck der Verhältnisse ansehen; denn es liegen keine exakten Messungen über das Verhalten der Flügelprofile bei großen Anstellwinkeln vor, und die numerischen Annahmen, auf welchen unsere Abbildungen beruhen, sind daher mit einiger Willkür behaftet; Abb. 280 zeigt die angenommenen Werte von c_w und $\frac{c_w}{c_n}$, die Zahl $\frac{\gamma F b}{4 G}$ ist $= 0{,}05$ gesetzt. Verändert man den Querruder-

ausschlag, so erhält man eine Kurvenschar I, deren Charakter durch eine Kurve in Abb. 281 angedeutet ist.

Welche der unendlich vielen Kurvenbewegungen des Flugzeugs, die bei bestimmtem Querruderausschlag möglich sind, wirklich eintritt, wird durch den Ausschlag des Höhenruders und somit durch den Ausgleich der Momente um die $\mathfrak{z}$-Achse bestimmt. Dieser ist durch Gleichung (14) gegeben, welche wir als Beziehung zwischen dimensionslosen Größen schreiben:

$$\frac{{}^2 - k_{\mathfrak{x}}^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot \frac{b\,\omega_{\mathfrak{x}}}{2v} \cdot \frac{b\,\omega_{\mathfrak{y}}}{2v} = c_m \frac{\gamma F b}{2G} \cdot \frac{t}{b} \tag{45}$$

Dabei ist

gesetzt, und c_m ist der Momentenbeiwert des ganzen Flugzeugs bezogen auf Flügelfläche und Flügeltiefe.

In Gleichung (45) ist das Kreiselglied nicht zu vernachlässigen; es wächst, wenn φ sich $-\frac{\pi}{2}$ nähert, quadratisch ins Unendliche, und zwar ist das Kreiselmoment

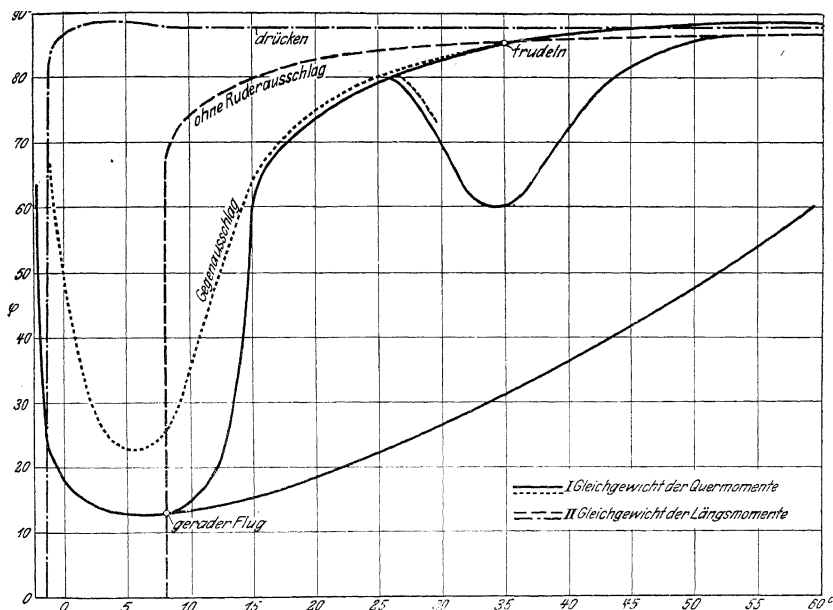



Abb. 281. Momentengleichgewicht bei Flug- und bei Trudelkurven.

beim normalen Flugzeug von heute wohl stets schwanzlastig, da $J_{\mathfrak{y}}$ immer größer wie $J_{\mathfrak{x}}$ ist. $J_{\mathfrak{x}}$ rührt wesentlich von den Flügeln her; diese geben auch zu $J_{\mathfrak{y}}$ einen Beitrag, der sich von $J_{\mathfrak{x}}$ nicht nennenswert unterscheidet; dazu kommt aber bei $J_{\mathfrak{y}}$ noch ein erheblicher von Rumpf und Leitwerk herrührender Teil. Messungen der Trägheitsmomente von Flugzeugen liegen nur vereinzelt vor; eine Abschätzung zeigt, daß beim normalen Typus $J_{\mathfrak{x}}$ und $J_{\mathfrak{z}}$ in der Regel von gleicher Größenordnung sind, und $J_{\mathfrak{y}}$ etwa $^2/_3$ der Summe der beiden anderen. Um die mechanische Vorstellung zu unterstützen, ist in Abb. 282 das Flugzeug durch zwei große, auf der $\mathfrak{x}$-Achse liegende, und zwei kleine, auf der $\mathfrak{y}$-Achse liegende Massen ersetzt; die ersteren geben ein Trägheitsmoment $J_{\mathfrak{y}}$, die letzteren $J_{\mathfrak{x}}$. Bei der Drehung um die vertikale Achse treten Zentrifugalkräfte auf, deren Moment, eben das Kreiselmoment, schwanzlastig wirkt. Durch dieses Moment wird das in Abb. 278 dargestellte kopflastige Moment der Luftkräfte bei großem Anstellwinkel aufgenommen. In Abb. 283 sind Kreisel- und Luftkraftmoment in Abhängigkeit von α mit dem Parameter φ eingetragen. Dabei ist noch $\approx \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad 36$ gesetzt. Die Schnittpunkte geben eine Kurve auf der φ-α-Ebene, welche in Abb. 281 als Kurve II eingetragen ist. Durch „Drücken" des Höhensteuers wird die c_m-Kurve in Abb. 283 in die bezeichnete Lage verschoben; die Kurve II in Abb. 281 rückt somit bei gleichem α zu höheren φ-Werten.

Abb. 282.
Wirkung der Kreiselmomente beim Trudeln.

Aus Abb. 281 können wir nunmehr das Ergebnis unserer Überlegungen ablesen. Im allgemeinen schneiden sich die beiden Kurven, welche partielles Momentengleichgewicht darstellen, in zwei Punkten; der eine Schnittpunkt entspricht der Flugkurve, der andere der Trudelkurve. Mit denselben Ruderausschlägen kann man flach mit geringer Drehgeschwindigkeit und mäßigem Anstellwinkel und steil mit rascher Drehung und hohem Anstellwinkel fliegen. Die scheinbare Unempfindlichkeit der Trudelkurve gegen Steuerbetätigung rührt daher, daß jeder Ruderausschlag das Flugzeug nur von einer Trudelkurve in die andere, nicht aber in eine Flugkurve überführt.

Steuermaßnahmen würden dann sicher das Trudeln unterbinden, wenn bei bestimmten Ruderausschlägen die beiden Kurven I und II der Abb. 281 ganz auseinandergerückt würden, so daß nur noch der zur Flugkurve (im besonderen Fall der zum geraden Flug) gehörige Schnittpunkt vorhanden wäre. Dies ist nun nicht der Fall; denn bei ganz großen Anstellwinkeln ist jeder Ruderausschlag ohne

Einfluß. Doch sei es, daß die von uns verwendeten numerischen Werte weit von der Wirklichkeit abweichen, sei es, daß bei großen Anstellwinkeln und großen Drehgeschwindigkeiten unsere Berechnung der Quermomente nicht mehr zulässig ist, jedenfalls scheint nach allen Beobachtungen und auch nach den englischen Messungen das Gebiet ganz großer Anstellwinkel nicht für wirkliche Flugzustände in Betracht zu kommen. Man kann daher eine Wirkung gegen die Trudelgefahr von jedem Ruderausschlag erwarten, infolge dessen die Kurven I und II im Gebiete

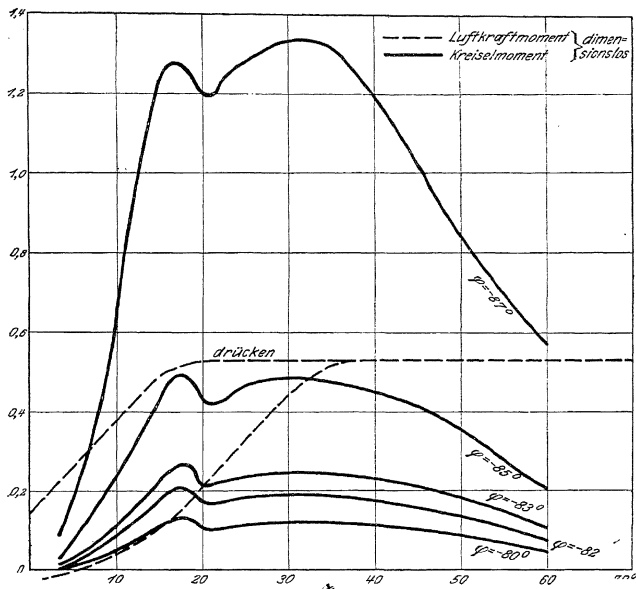



Abb. 283. Momentengleichgewicht um die Holmachse.

mittlerer Anstellwinkel (vielleicht < 45°) auseinanderrrücken. Die entsprechenden Kurven in Abb. 281 lassen die Wirkung von Steuerausschlägen erkennen. Die Quersteuerung ist nur von geringem Einfluß; Gegenausschlag, der dem natürlichen Empfinden wohl zunächst entsprechen dürfte, nähert die beiden Kurven einander, ist darum schädlich. In der Tat empfiehlt der englische Bericht (Major Godden), die Querruder nicht auszuschlagen; deutsche Führer empfahlen sogar einen Querruderausschlag, der das Flugzeug im normalen Flug noch stärker in die Kurve legen würde. Wichtiger ist die Betätigung des Höhensteuers. Starkes Drücken reißt die beiden Kurven wirksam auseinander; die Flugerfahrung bestätigt, daß Drücken das einzige sichere Mittel ist, um die Trudelbewegung zu

unterbinden und zum normalen Flug zurückzukehren. Seitdem darüber Klarheit herrscht, hat das Trudeln in großer Höhe seine Schrecken verloren; in geringer Höhe über dem Erdboden ist aber oft keine Möglichkeit zur Durchführung der richtigen Steuermanöver gegeben. Zum vollen Verständnis der Wirkung von Steuermaßnahmen wird es wohl nötig sein, die nichtstationäre Bewegung des Flugzeugs zu untersuchen; doch ist diese Arbeit für das hier besprochene wichtige Problem noch nicht geleistet. Wir sahen oben bei Besprechung des überzogenen Fluges, daß im Gebiete größerer Anstellwinkel durch das Höhensteuer weniger die Flugbahn als der Anstellwinkel wirksam beeinflußt wird. Damit mag es wohl auch zusammenhängen, daß beim Trudeln durch Drücken des Höhensteuers zunächst kleinere Anstellwinkel und als deren Folge kleinere Drehgeschwindigkeiten auftreten, und daß so schließlich wieder eine Flugkurve erzwungen wird.

Für die Konstruktion ist in erster Linie der Einfluß der Trägheitsmomente von Wichtigkeit; je geringer die Differenz $J_{\mathfrak{y}} - J_{\mathfrak{x}}$ ist, um so weniger kommt das Kreiselmoment in Betracht; es wird erst bei größeren Werten von φ stark genug, um bei einem bestimmten α das Längsmoment der Luftkräfte ins Gleichgewicht zu setzen. Die Kreiselmomentkurven in Abb. 283 rücken nach unten und Kurve II in Abb. 281 verläuft mit höheren φ-Werten, so daß die beiden Kurven auseinander rücken, auch für ganz große Anstellwinkel. Auch diese Folgerung scheint die Erfahrung zu bestätigen.

Zeigt das Längsmoment der Luftkräfte bei größeren Anstellwinkeln wesentlich kleinere Werte als in den Abb. 278 und 283, so werden die Trudelkurven mit wesentlich kleineren Bahnneigungen durchflogen; die Drehgeschwindigkeit ist geringer. Dies gilt hauptsächlich für Entenkonstruktionen und ist an Modellen beobachtet worden.

Der Einfluß der dimensionslosen Größe $\frac{\gamma F b}{G}$ ist ein doppelter; einerseits wächst $\frac{b\,\omega}{v}$ mit dieser Größe an, und dadurch wird die Kurve I bei gleichem φ zu höheren α-Werten verschoben, also in einem Sinn, der das Trudeln unterbindet; andererseits wächst aber in Gleichung (45) das Kreiselmoment quadratisch, das Luftkraftmoment nur linear mit $\frac{\gamma F b}{v}$, so daß durch Erhöhung dieser Größe das Trudeln gefördert wird. Welche Wirkung den Ausschlag gibt, kann nur eine ausführliche numerische Diskussion lehren, welche auch den wahrscheinlich nicht unerheblichen Einfluß des Flügelprofils zu untersuchen haben wird. Da zuverlässige Zahlwerte nicht vorliegen, muß diese Diskussion der Zukunft überlassen bleiben.

§ 5. Seitenstabilität des geraden Fluges.

Von den Problemen des nichtstationären Fluges im Raum ist wie bei der symmetrischen Bewegung das einfachste das Stabilitätsproblem. Es wird angenommen, daß die sechs Variablen Werte annehmen, welche sich von den zu einer stationären Bewegung gehörigen nur wenig unterscheiden; die Gleichungen werden nach diesen kleinen Abweichungen entwickelt und so linear gemacht; der zeitliche Verlauf

der Variablen ist dann entscheidend für die Stabilität und Instabilität des stationären Fluges, der als Ausgang der Entwicklung diente. Auf diese Weise könnte die Stabilität jeder in den vorigen Paragraphen behandelten Bewegung untersucht werden; doch ist die Aufgabe in dieser Allgemeinheit bisher noch nicht in Angriff genommen worden.

Man kann das Problem nämlich noch bedeutend vereinfachen, wenn man sich von vornherein auf **kleine Abweichungen vom geradlinigen Fluge** beschränkt, also nur die Seitenstabilität des geraden Flugs untersucht. Dann ist der stationäre Flug vollkommen beschrieben durch die drei Größen v_0, α_0, φ_0; von diesen sollen die Variablen v, α, φ nur um die unendlich kleinen Größen v_1, α_1, φ_1 abweichen; die drei Variablen der unsymmetrischen Bewegung τ, ω, μ sind selbst als unendlich kleine Größen anzusehen. Dann vereinfachen sich die Gleichungen (16) folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
&= \omega \sin (\varphi_0 \quad \alpha_0) + \frac{d\mu}{dt} \cos \alpha_0, \\
&\omega \cos (\varphi_0 + \alpha_0) - \frac{d\mu}{dt} \sin \alpha_0 + \frac{d\tau}{dt}, \qquad (46) \\
&d \quad (\varphi_0 + \alpha_0)
\end{aligned}
$$

Entwickeln wir nun die Gleichungen (9) bis (14) nach den kleinen Größen und behalten wir nur die Glieder erster Ordnung bei, so ergibt sich folgendes:

1. In den Gleichungen (9), (10) und (14), den Gleichgewichtsbedingungen beim symmetrischen Flug, treten die Variablen τ, ω, μ nicht auf. Auch die Luftkraftbeiwerte c_a, c_w und c_m hängen von diesen Variablen in erster Ordnung nicht ab, weil die Einwirkungen der Drehbewegungen und des Seitenwindes nach den Ausführungen unseres ersten Paragraphen auf der einen Flugzeugseite entgegengesetzt verlaufen wie auf der anderen, daher keine Kräfte, sondern nur Momente um die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse hervorrufen.

2. In den Gleichungen (11), (12) und (13) treten die Variablen v_1, α_1, φ_1 nicht auf; denn unsymmetrische Luftkräfte und -momente, welche im stationären Flug nicht vorhanden sind, können nicht infolge Änderung der symmetrischen Variablen auftreten. Infolgedessen zerfällt unser System von sechs Bewegungsgleichungen in zwei Systeme von je drei Gleichungen. Das eine, welches die Variablen v_1, α_1, φ_1 enthält, ist identisch mit den Gleichungen der gestörten symmetrischen Bewegung; es gibt Auskünfte über die „Längsstabilität" des Fluges. Das andere läßt die Wirkungen unsymmetrischer Störungen erkennen; es zeigt also die „**Seitenstabilität**". Die Trennung der beiden Systeme bedeutet, **daß die symmetrischen Störungen unabhängig von den unsymmetrischen verlaufen, daß Längsschwingungen und Querschwingungen sich ohne gegenseitige Beeinflussung überlagern.** Dagegen gibt es keine Trennung der Störung des Kurses (ω) von der Störung der Seitenneigung (μ); Seitenstabilität und Querstabilität hängen untrennbar zusammen, und jede gesonderte Behandlung ist fehlerhaft. Auch von einer besonderen Längs- und Seitenstabilität kann man nur **beim geraden Fluge** reden (und bei Kurven, die unendlich wenig davon

abweichen); daher ist dieser — bisher allein behandelte — Fall so viel einfacher wie der allgemeine.

Die Luftkräfte hängen von τ, ω_x und $\omega_{\mathfrak{y}1}$ ab. Die Geschwindigkeit der einzelnen Flügelelemente wird durch Drehung um eine Achse senkrecht zur
zur Geschwindigkei htung verändert; da τ u
mit $\mathfrak{y}_1$ zusammen. Die Anstellwinkeländerung rührt ebenso bis auf Glieder zweiter Ordnung von einer Drehung um die x-Achse her. Dieselben Drehungskomponenten geben Zusatzgeschwindigkeiten des Leitwerks senkrecht zur x-Achse und rufen auch dadurch Momente hervor. Zunächst haben wir ω_x und $\omega_{\mathfrak{y}1}$ durch unsere Variablen τ, ω, μ auszudrücken. Aus Gleichung (16) und Abb. 270 folgt:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \omega \sin \varphi_0 + \frac{d\mu}{dt} - \frac{d\tau}{dt} \sin \alpha_0, \\ \omega_{\mathfrak{y}1} &= \omega \cos \varphi_0 + \frac{d\tau}{dt} \cos \alpha_0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (47)$$

Entwickeln wir die Luftkräfte nach den Variablen, so erhalten wir z. B.

$$\begin{aligned} K = \frac{\partial K}{\partial \tau}\tau + \frac{\partial K}{\partial \omega_x}\omega_x + \frac{\partial K}{\partial \omega_{\mathfrak{y}1}}\omega_{\mathfrak{y}1} &= \frac{\partial K}{\partial \tau}\tau + \left(\frac{\partial K}{\partial \omega_{\mathfrak{y}1}} \cos \alpha_0 - \frac{\partial K}{\partial \omega_x} \sin \alpha_0\right)\frac{d\tau}{dt} \\ &+ \left(\frac{\partial K}{\partial \omega_{\mathfrak{y}1}} \cos \varphi_0 + \frac{\partial K}{\partial \omega_x} \sin \varphi_0\right)\omega + \frac{\partial K}{\partial \omega_x} \cdot \frac{d\mu}{dt} \end{aligned} \qquad (48)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$K = \left(K_\tau + K_{\dot\tau} \frac{d}{dt}\right)\tau + K_\omega \cdot \omega + K_{\dot\mu} \frac{d\mu}{dt}.$$

Die Gleichungen (11), (12) und (13) nehmen nun bei Taylorscher Entwicklung unter Berücksichtigung von (46) und (48) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{G}{g} v \cos \varphi \cdot \omega + G \cos \varphi \cdot \mu - S\tau \\ &\quad - qF \cdot \left\{\left(c_{Q\tau} + c_{Q\dot\tau} \frac{d}{dt}\right)\tau + c_{Q\omega}\,\omega + c_{Q\dot\mu} \frac{d\mu}{dt}\right\}, \\ J_{\mathfrak{x}}\left(\frac{d\omega}{dt} \sin \vartheta + \frac{d^2\mu}{dt^2} \cos \alpha\right) &= -\left(K_\tau + K_{\dot\tau} \frac{d}{dt}\right)\tau - K_\omega \cdot \omega - K_{\dot\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\ J_{\mathfrak{y}}\left(\frac{d\omega}{dt} \cos \vartheta - \frac{d^2\mu}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d^2\tau}{dt^2}\right) &= -\left(L_\tau + L_{\dot\tau} \frac{d}{dt}\right)\tau - L_\omega \omega - L_{\dot\mu} \frac{d\mu}{dt}. \end{aligned}\right\} \; . \; (49)$$

Dabei ist der Index $_0$ weggelassen und $\varphi + \alpha = \vartheta$ gesetzt. Diesen Gleichungen geben wir eine übersichtliche Form durch Einführung dimensionsloser Größen; wir setzen

$$K = \mathfrak{k} \cdot qFb \qquad L = \mathfrak{l} \cdot qFb \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (50)$$

und schreiben der Übersicht halber:

$$c_Q = \mathfrak{q}.$$

Wir führen auch dimensionslose Variablen ein durch die Beziehungen

$$\bar{t} = \frac{v}{b}\,t, \qquad \bar{\omega} = \frac{b}{v}\,\omega, \qquad \bar{\mu} = \frac{b}{v}\,\frac{d\mu}{dt}, \qquad \bar{\tau} = \frac{b}{v}\,\frac{d\tau}{dt}. \quad \ldots \ldots \quad (51)$$

Die Winkel τ und μ sind ohnehin dimensionslos. Wir dividieren nun die erste Gleichung (48) durch qF, die anderen durch qFb; dann treten in den Gleichungen die dimensionslosen Zahlen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \frac{G v^2}{g q F b}, & c_a &= \frac{G \cos\varphi}{qF}, \\ \mathfrak{J}_\mathfrak{x} &= \mathfrak{G}\,\frac{k^2_\mathfrak{x}}{b^2}, & \mathfrak{J}_\mathfrak{y} &= \mathfrak{G}\,\frac{k^2_\mathfrak{y}}{b^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

auf, wobei $k_\mathfrak{x}$ und $k_\mathfrak{y}$ wie im vorigen Paragraphen die Trägheitsradien um die $\mathfrak{x}$- bzw. $\mathfrak{y}$-Achse bedeuten. Die Gleichungen (48) lauten nun, wenn die Glieder mit derselben Variablen zusammengefaßt werden:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{S}{qF} - \mathfrak{q}_\tau - \mathfrak{q}_{\bar{\tau}}\,\frac{d}{d\bar{t}}\right)\tau + (\mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\bar{\omega}})\,\bar{\omega} + \left(c_a - \mathfrak{q}_{\bar{\mu}}\,\frac{d}{d\bar{t}}\right)\mu, \\ 0 &= \left(\mathfrak{k}_\tau + \mathfrak{k}_{\bar{\tau}}\,\frac{d}{d\bar{t}}\right)\tau + \left(\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\sin\vartheta\,\frac{d}{d\bar{t}} + \mathfrak{k}_{\bar{\omega}}\right)\bar{\omega} + \left(\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\cos\alpha\,\frac{d^2}{d\bar{t}^2} + \mathfrak{k}_{\bar{\mu}}\,\frac{d}{d\bar{t}}\right)\mu, \\ 0 &= \left(\mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\frac{d^2}{d\bar{t}^2} + \mathfrak{l}_\tau + \mathfrak{l}_{\bar{\tau}}\,\frac{d}{d\bar{t}}\right)\tau + \left(\mathfrak{J}_\mathfrak{y}\cos\vartheta\,\frac{d}{d\bar{t}} + \mathfrak{l}_{\bar{\omega}}\right)\bar{\omega} \\ &\qquad + \left(-\mathfrak{J}_\mathfrak{y}\sin\alpha\,\frac{d^2}{d\bar{t}^2} + \mathfrak{l}_{\bar{\mu}}\,\frac{d}{d\bar{t}}\right)\mu. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Über die Lösung eines solchen Gleichungssystems und die Gewinnung der Stabilitätskriterien wurde im vorigen Kapitel § 3 bei Diskussion der Längsstabilität ausführlich gesprochen; wir verweisen hier also nur auf die dortigen Ausführungen. Wir setzen τ, $\bar{\omega}$ und μ proportional $e^{\lambda \bar{t}}$ und erklären die Flugbewegung für stabil gegen unsymmetrische Störungen, wenn keiner der auftretenden λ-Werte einen positiv reellen Teil hat. Die λ-Werte folgen aus der Bedingung, daß die Hauptdeterminante von (53) verschwinden muß:

$$\begin{array}{lll} -\frac{S}{qF} - \mathfrak{q}_\tau - \mathfrak{q}_{\bar{\tau}}\,\lambda & \mathfrak{G}\cos\varphi & \\ +\,\mathfrak{k}_{\bar{\tau}}\,\lambda & \mathfrak{J}_\mathfrak{x}\sin\ \cdot\lambda & \mathfrak{J}_\mathfrak{x}\cos \\ +\,\mathfrak{l}_{\bar{\tau}}\,\lambda & \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\cos\ \cdot\lambda \quad \mathfrak{l}_\omega & - \qquad \cdot\lambda^2 \end{array} = 0 \quad . \ (54)$$

Auch hier tritt, wie in der Theorie der Längsstabilität, eine Gleichung vierten Grades auf; daß sie nicht vom sechsten Grad wird, hat seinen physikalischen Grund darin, daß die Lagenkoordinate z des Schwerpunkts und die Kursrichtung, deren Ableitung ω ist, keine Rolle spielen, analog den Lagenkoordinaten x und y in der Theorie der Längsstabilität. Die Ausrechnung der Determinante ergibt:

$$C\lambda^2 + D\lambda + E = 0,$$

wobei

$$A = \mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\{\mathfrak{q}_{\bar\tau} \cos\varphi + (\mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\bar\omega}) \cos\alpha + \mathfrak{q}_{\bar\mu} \quad \sin\vartheta\},$$

$$B = \left(\frac{S}{qF} + \mathfrak{q}_\tau\right) \mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{J}_\mathfrak{y} \cos\varphi + \mathfrak{q}_{\bar\tau}\,(\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_\omega \cos\alpha + \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\omega} \sin\alpha - \mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_{\bar\mu} \sin\vartheta$$
$$+ \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\mu} - \cos\vartheta + (\mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\bar\omega})\,(\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_{\bar\tau} \cos\alpha + \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\tau} \sin\alpha$$
$$\mathfrak{k}_{\bar\mu}) - c_a\,\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{J}_\mathfrak{y} \sin \qquad \mathfrak{l}_{\bar\tau} \sin\vartheta - \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\tau} \cos$$

$$C = \left(\frac{S}{qF} + \mathfrak{q}_\tau\right) (\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_{\bar\omega} \cos\alpha + \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\omega} \sin\alpha - \mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_{\bar\mu} \sin\vartheta + \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\mu} \cos\vartheta)$$
$$+ \mathfrak{q}_{\bar\tau}\,(\mathfrak{k}_{\bar\mu}\,\mathfrak{l}_{\bar\omega} - \mathfrak{k}_{\bar\omega}\,\mathfrak{l}_{\bar\mu}) + (\mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\bar\omega})\,(\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_\tau \cos\alpha + \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_\tau \sin\alpha + \mathfrak{k}_{\bar\mu}\,\mathfrak{l}_{\bar\tau} \tag{55}$$
$$- \mathfrak{k}_{\bar\tau}\,\mathfrak{l}_{\bar\mu}) + c_a\,(-\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_{\bar\tau} \sin\vartheta + \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\tau} \cos\vartheta - \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_{\bar\omega}) + \mathfrak{q}_{\bar\mu}\,(\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{k}_\tau \sin\vartheta$$
$$- \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_\tau \cos\vartheta + \mathfrak{k}_{\bar\omega}\,\mathfrak{l}_{\bar\tau} - \mathfrak{k}_{\bar\tau}\,\mathfrak{l}_{\bar\omega}),$$

$$D = \qquad \mathfrak{k}_{\bar\mu}\,\mathfrak{l}_{\bar\omega} - \mathfrak{k}_{\bar\omega}\,\mathfrak{l}_{\bar\mu}) + (\mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\bar\omega})\,(\mathfrak{k}_{\bar\mu}\,\mathfrak{l}_\tau - \mathfrak{k}_\tau]\,\mathfrak{l}_{\bar\mu})$$
$$(-\mathfrak{J}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{l}_\tau \sin\vartheta + \mathfrak{J}_\mathfrak{y}\,\mathfrak{k}_\tau \cos\vartheta + \mathfrak{k}_{\bar\tau}\,\mathfrak{l}_{\bar\omega} - \mathfrak{k}_{\bar\omega}\,\mathfrak{l}_{\bar\tau}$$

Diese Ausdrücke sind natürlich sehr unhandlich; aber sie lassen sich in allen Fällen bedeutend kürzen, wenn man die numerische Größenordnung der einzelnen Summanden in Betracht zieht. Auch ist noch auszuführen, von welchen Konstruktionsgrößen die einzelnen Beiwerte abhängen:

$\mathfrak{G} = \frac{2G}{\gamma b F}$ wächst mit der Flächenbelastung und mit der Flughöhe und sinkt, wenn die Spannweite wächst; da die Flächenbelastung meist hoch ist, wird $\mathfrak{G}$ bei normalen kleinen Flugzeugen von der Größenordnung 6 bis 10; bei ganz schmalen Flugzeugen (wie z. B. der Fokker-Dreidecker) kann es noch größer werden, bei leicht belasteten Riesenflugzeugen und bei Segelflugzeugen kann es bis etwa 1 bis 2 heruntersinken.

$\mathfrak{J}_\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{J}_\mathfrak{y}$ sind von kleinerer Größenordnung; der Trägheitsradius um die $\mathfrak{x}$-Achse mag vielleicht ein Achtel der Spannweite betragen, der um die $\mathfrak{y}$-Achse ist anderthalb bis zweimal so groß. Man muß also $\mathfrak{J}_\mathfrak{x}$ zu $\frac{1}{60}\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{J}_\mathfrak{y}$ zu $\frac{1}{30}\,\mathfrak{G}$ veranschlagen.

$\frac{S}{qF} = c_w + c_a \operatorname{tg}\varphi$ wird im Motorflug von der Größe 0,1 bis 0,5, im Gleitflug natürlich $= 0$; c_a liegt zwischen 0 und 1,5.

Die Beiwerte der Luftkräfte und Luftmomente sind meist in den vorigen Paragraphen schon berechnet; sie rühren wesentlich nur von den Flügeln und vom Seitenleitwerk her; nur bei $\mathfrak{q}_\tau$ können die Streben, Räder und der Rumpf einen nennenswerten Einfluß haben. Es bezeichne wieder F_S die Fläche des Seitenleitwerks, l_S seine Rücklage hinter dem Schwerpunkt, h_S seine Höhenlage über dem Schwerpunkt, c_S den Beiwert der Normalkraft auf das Seitenleitwerk, c_n und c_t Normal- und Tangentialkraftbeiwerte der Flügel; $c_S{}'$, $c_n{}'$, $c_t{}'$ bedeuten die Ableitungen dieser Größen nach dem Anstellwinkel der betreffenden Flügel- oder Flossenteile. Φ sei die „schädliche Fläche" des Flugzeugs ohne Leitwerk und Flügel bei Seitenwind. Dann werden:

$$\mathfrak{q}_\tau - c_S \quad F \qquad 0{,}05 + 0{,}1 \sim 0{,}25.$$

$\underline{q_{\omega_x}} = c_S' \frac{F_S}{F} \frac{h_S}{b}$ eine Größe, die nur bei großer Höhenlage des Seitenleitwerks, also bei ganz abweichenden Konstruktionen in Betracht kommt.

$$\frac{F_S}{F} \frac{l_S}{b} \quad 3 \cdot 0{,}05 \qquad 0{,}075.$$

Aus den Beziehungen (47) ist zu ersehen, daß

$$\cos\varphi + c \quad \sin\varphi \tag{56}$$
$$\cos\alpha - \quad \sin\alpha$$
$$F_S \; h_S$$

Das Integral stellt eine Art statischen Momentes der Flügelfläche dar; es ist über die ganze Flügelfläche zu erstrecken; wir wollen abkürzend das Verhältnis dieses statischen Moments zum Produkt bF mit $\underline{U_{c'_n \nu}}$ bezeichnen. Nehmen wir an, daß c_n' und die Flügeltiefe überall denselben Wert haben, und ν — wie es nach Abb. 269 normalerweise der Fall ist — bei positivem $\mathfrak{z}$ negativ, bei negativem $\mathfrak{z}$ positiv ist, so ergibt sich

$$1 \qquad -\frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 0{,}05 \qquad 0{,}06.$$

Der zweite Summand von $\mathfrak{k}_r$ mit dem Faktor $\frac{h_S}{b}$ kommt kaum in Betracht, so daß wir $\mathfrak{k}_r$ etwa zu $+0{,}06$ veranschlagen können. Macht man $|\nu|$ außen an den Flügeln größer, ohne dabei die Flügeltiefe zu verkleinern, so kann man zu größeren Werten gelangen. Bei großer Pfeilstellung der Flügel kann dieser Beiwert noch erheblich erhöht werden.

$\underline{\mathfrak{k}_{\omega_x}} = \frac{\int c'_n \mathfrak{z}^2 dF}{b^2 F} + c_S' \frac{F_S}{F} \left(\frac{h_S}{b}\right)^2$. Hier tritt ein Integral auf, welches die Form eines Trägheitsmomentes hat; wir wollen sein Verhältnis zu $b^2 F$ mit $T_{c_n'}$ bezeichnen. Die Größenordnung folgt wieder, wenn wir c_n' und die Flügeltiefe über den ganzen Flügel konstant setzen; dann wird

$$\frac{1}{12} \qquad 0{,}5.$$

Bei großem Anstellwinkel (Bereich der Trudelkurven) wird aber c_n' und mit ihm $T_{c_n'}$ und $\mathfrak{k}_{\omega_x} = 0$ und sogar negativ. Starke gleichseitige Verwindung, durch welche der Anstellwinkel an den äußeren Flügelteilen herabgesetzt wird, vergrößert $T_{c_n'}$; denn c_n' wird größer, wenn der Anstellwinkel fällt. Der vom Leitwerk herrührende Summand im Ausdruck für $\mathfrak{k}_{\omega_x}$ spielt keine Rolle.

$$\frac{{}^2 dF}{F} + c_S' \frac{F_S}{F} \frac{h_S}{b}$$ Das hier auftretende Trägheitsmoment T_{2c_n} $= \frac{1}{?} c_n \quad 0$ bis $0{,}2$ wird durch gleichseitige Verwindung der Flügel, welche den

äußeren Teilen kleinere Anstellwinkel gibt, herabgesetzt. Der vom Leitwerk herrührende Teil enthält wieder den kleinen Faktor $\frac{h_S}{b}$, kann darum vernachlässigt werden.

Nun werden $\mathfrak{l}_{\overline{\tau}} = T\,'$

$$\varphi + T_{c_n}{}' \sin\varphi,\qquad (57)$$
$$\alpha - T_{c_n}{}' \sin\alpha,$$
$$\div\, c'_S \frac{F_S}{F}\frac{l_S}{b}.$$

Der erste Summand von $\mathfrak{l}_\tau$, der mit $-U_{c_t{}'\nu}$ bezeichnet werden muß, ist negativ; denn $c_t{}'$ und ν sind beide negativ. Im normalen Winkelbereich ist $c_t{}' \sim -0{,}5$, also $U_{c_t{}'\nu} \sim \frac{1}{4}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}015$, also sehr klein gegen den vom Leitwerk herrührenden Summanden, der zu $\sim 3\cdot 0{,}05\cdot 0{,}5 \sim 0{,}075$ veranschlagt werden kann; der Einfluß der V-Stellung ist also hier gering. $\mathfrak{l}_\tau$ erhält ein negatives Vorzeichen, wenn das Seitenleitwerk oder wenigstens dessen aerodynamischer Schwerpunkt vor dem Flugzeugschwerpunkt liegt, da dann l_S negativ ist.

$\int c_t{}' \mathfrak{z}^2\, dF \quad c_S{}' \frac{F_S}{F}\frac{h_S}{b}\frac{l_S}{b}$. Der erste Summand $T_{c'_t}$ wird negativ von der Größenordnung $\frac{0{,}5}{12} \sim -0{,}04$; der zweite Summand $\sim 3\cdot 0{,}05\cdot 0{,}05\cdot 0{,}5$ erreicht unter Umständen dieselbe Größenordnung, wird aber immer kleiner als $T_{c'_t}$ bleiben. $\mathfrak{l}_{\overline{\omega_x}}$ ist also stets recht klein.

$\underline{\mathfrak{l}_{\overline{\omega_{\mathfrak{y}1}}}} = \frac{\int 2c_t \mathfrak{z}^2 dF}{b^2 F} + c_S{}' \frac{F_S}{F}\left(\frac{l_S}{b}\right)^2$ Da im normalen Winkelbereich c_t sehr klein ist, spielt der erste Summand keine Rolle; der zweite, eine Art Trägheitsmoment des Seitenleitwerks, ist $3\cdot 0{,}05\cdot (0{,}5)^2 \sim 0{,}038$.

Nun werden:

$$_S{}' \frac{F_S}{F}\left(\frac{l_S}{b}\right)^2 \cos\varphi + T_{c'_t} \sin \qquad (58)$$
$$c'_S \frac{F_S}{F}\left(\frac{l_S}{b}\right)^2 \cos\alpha - T_{c'_t} \sin\alpha.$$

Setzt man diese Zahlenwerte in Gleichung (55) ein, so erweisen sich die mit $\mathfrak{G}$ multiplizierten Summanden als die bei weitem größten. Sie geben für das Vorzeichen der einzelnen Koeffizienten den Ausschlag und sind deshalb für die Stabilität maßgebend. Die anderen Summanden treten so stark zurück, daß ihre Mitführung wohl kaum der Sicherheit unserer Abschätzung und der wirklichen Kenntnis der numerischen Werte entsprechen dürfte. Man wird darum nur in ganz abweichenden Fällen und vielleicht später, wenn man sichere numerische Werte hat, auf die allgemeine Form (55) zurückgreifen; wir benutzen im folgenden nur die Näherung:

$$A = \mathfrak{G} \cos \varphi \cdot \mathfrak{J}_{\mathfrak{x}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}} \cos \alpha,$$

$$= \mathfrak{G} \cos \qquad \mathfrak{l}_{\tau}^{-} \cos \alpha \qquad \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}} \mathfrak{k}_{\tau}^{-} \sin \alpha + \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}} \mathfrak{k}_{\mu}^{-}).$$

Beim normalen Flugzeug kommt nur der letzte Summand der Klammer in Betracht.

$$C = \mathfrak{G} \cos \varphi \cdot (\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}} \mathfrak{l}_{\tau} \cos \alpha + \mathfrak{J}_{\mathfrak{y}} \mathfrak{k}_{\tau} \sin \alpha + \mathfrak{k}_{\mu}^{-} \mathfrak{l}_{\tau}^{-} - \mathfrak{k}_{\tau}^{-} \mathfrak{l}_{\mu}^{-}), \quad . \; (59)$$

Stabilität ist nur vorhanden, wenn die Koeffizienten $A \ldots E$ und die Diskriminante (BC — AD) D — B²E alle positiv sind. Im normalen Flug sind A, B, C, D sicher positiv; auch die in obiger Darstellung mit negativem Vorzeichen auftretenden Glieder sind positiv, da $\mathfrak{l}_{\mu}^{-}$ negativ ist. Zu Instabilität kann es nur kommen, wenn

1. $\mathfrak{k}_{\mu}^{-} < 0$ ist; dies ist im Bereich großer Anstellwinkel der Fall und von großer Bedeutung für die Trudelbewegung. Das Fehlen eines Momentes, welches die Vergrößerung der Seitenneigung dämpft, macht sich im langsamen überzogenen Flug sehr störend bemerkbar; das Flugzeug zeigt Neigung zum „Wackeln".

2. $\mathfrak{l}_{\tau} < 0$; dies ist der Fall, wenn das Seitenleitwerk überwiegend vor dem Flugzeugschwerpunkt liegt. Das Flugzeug muß in diesem Fall wie eine Windfahne auf seitliches Anblasen reagieren. Diese Bedingung, auf die Reißner zuerst hingewiesen hat, ist wichtig für „Enten"-Konstruktionen.

3. Am schwierigsten ist die Bedingung zu erfüllen, daß E positiv sein soll. Im horizontalen oder schwach geneigten Flug ist $\mathfrak{k}_{\omega}^{-} = T_{2c_n}$ recht groß gegen $\mathfrak{k}_{\tau}$, welches nur bei starker V-Stellung oder großer Pfeilstellung einen vergleichbaren Wert erhalten kann; auch ist im wesentlichen $\mathfrak{l}_{\omega}^{-} = \frac{l_S}{b} \cdot \mathfrak{l}_{\tau} \quad 0{,}5\, \mathfrak{l}_{\tau}$; also wird normalerweise das negative Glied in E überwiegen und Instabilität die Folge sein. Diese Instabilität scheint bei den meisten Flugzeugen vorhanden; daß die Determinante $\mathfrak{k}_{\tau} \mathfrak{l}_{\omega} - \mathfrak{k}_{\omega} \mathfrak{l}_{\tau}$ dafür maßgebend ist, hat Reißner zuerst erkannt und aus rein statischen Betrachtungen hergeleitet; in der Tat spielt dies konstante Glied in unserer Gleichung 4. Grades die analoge Rolle wie die „statische Stabilität" in der Gleichung der Längsstabilität; wir können die Determinante daher als „statische Seitenstabilität" bezeichnen; für ihre Wirkung spielen die Trägheitskräfte keine Rolle.

Um dieser Instabilität entgegenzuarbeiten, hat man vor allem vier Wege: erstens gleichseitige Verwindung der Flügel, so daß außen kleinerer Anstellwinkel herrscht; dadurch wird $\mathfrak{k}_{\omega}$ verkleinert; die ersten Flugzeuge, bei welchem dies Mittel Anwendung fand, waren die sog. „Tauben". Ihr Vorbild war der von Ahlborn untersuchte Zanoniasamen; bei diesem sind auch das zweite und das dritte Mittel gut ausgeprägt: starke V-Stellung der Flügel, besonders außen, und starke Pfeilstellung. Viertens kann man durch Vergrößerung der Schwanzlänge $\mathfrak{l}_{\omega}$ gegenüber $\mathfrak{l}_{\tau}$ vergrößern und dadurch die Stabilität vermehren; Vergrößerung der Leitwerksfläche ist wirkungslos, da sowohl $\mathfrak{l}_{\omega}$ wie $\mathfrak{l}_{\tau}$ dadurch vergrößert werden. Wirksamer wird die Vergrößerung von $\mathfrak{l}_{\omega}$ gegenüber $\mathfrak{l}_{\tau}$ durch Anbringung von Leitflächen vor und hinter dem Schwerpunkt erreicht; die Beiträge dieser

Flächen zu $\mathfrak{l}_\tau$ werden voneinander abgezogen, da sie $\frac{l_S}{b}$ proportional sind, die Beiträge zu $\mathfrak{l}_{\bar{\omega}}$ hingegen, die $\left(\frac{l_S}{b}\right)^2$ proportional sind, addieren sich; in dieser Hinsicht wirken die größeren schädlichen Widerstände, besonders wohl die Räder, die vor dem Schwerpunkt liegen, günstig. Mit wachsendem Anstellwinkel nimmt die statische Seitenstabilität ab; im Ausdruck

$$\mathfrak{k}_\tau \mathfrak{l}_{\bar{\omega}} - \mathfrak{k}_{\bar{\omega}} \mathfrak{l}_\tau = \frac{F_S}{F} \frac{\iota_S}{b} \tag{60}$$

wird nämlich der erste (positive) Summand, welcher $c_n{}'$ proportional ist, kleiner, der zweite (negative), c_n proportionale Summand größer. Der Ausdruck (60) kann bei Berechnungen der nötigen V-Stellung und Verwindung zugrunde gelegt werden.

Im steilen Gleitflug ändern sich die Verhältnisse der statischen Seitenstabilität; da dann $\sin \varphi < 0$ und von gleicher oder höherer Größenordnung wie $\cos \varphi$ wird, ist nach (57) $\mathfrak{k}_{\bar{\omega}}$ negativ und recht groß; die Dämpfung der Drehbewegung um die x-Achse spielt dann eine entscheidende Rolle. Im Ausdruck (58) für $\mathfrak{l}_{\bar{\omega}}$ tritt der Summand $T_{c_t{}'} \sin \varphi$ hervor, der positiv bleibt. Infolgedessen ist im steilen Gleitflug und im Sturzflug die statische Seitenstabilität stets gewahrt. Dies ist in der bisherigen Literatur, in welcher fast ausschließlich der Horizontalflug behandelt wird, nicht hervorgehoben, aber in der Praxis wohlbekannt.

Das Vorzeichen der Routhschen Diskriminante $(BC - AD)\,D - B^2 E$ ist bestimmt durch das Vorzeichen der Klammer; denn E, welches den Faktor $\mathfrak{G} \cos \varphi$ nicht enthält, ist als klein gegen die anderen Koeffizienten anzusehen; in der Klammer bleibt als größter Summand $\mathfrak{G}^2 \cos^2 \varphi\, \mathfrak{J}_\mathfrak{y} \mathfrak{k}_{\bar{\mu}}^{-2} \mathfrak{l}_{\bar{\tau}}$ stehen, also eine stets positive Größe, so daß diese Stabilitätsbedingung nie verletzt ist.

Der Fall steilen Sturzflugs erfordert noch eine Bemerkung: Wenn $\cos \varphi$ klein wird, so scheinen die Näherungen (59) ihren Sinn zu verlieren; setzt man aber in (55) $\cos \varphi = 0$, $c_a = 0$ ein und berücksichtigt die Beziehungen (56), (57) und (58), so fallen auch alle nicht mit $\mathfrak{G}$ multiplizierten Glieder fort und bei Taylorscher Entwicklung von $\varphi = -90^0$ aus, geben wieder die letzteren den Ausschlag; also auch, wenn $\cos \varphi$ sehr klein wird, sind die Stabilitätsverhältnisse durch die Näherung (59) gut wiedergegeben.

§ 6. Die Haupttypen der Seitenbewegung.

Um nun die Wurzeln der Stabilitätsgleichung zu finden und über den Charakter der dazugehörigen Flugbewegungen Klarheit zu bekommen, vereinfachen wir die Ausdrücke (59) noch weiter durch Beschränkung auf normale Flugzustände, d. h. wir setzen $\cos \alpha = 1$, vernachlässigen dagegen $\sin \alpha$ und geben $\mathfrak{k}_{\bar{\mu}}$ den oben abgeschätzten Wert 0,5, so daß die damit multiplizierten Summanden in B, C und D die Hauptrolle spielen und wir die anderen bis auf $\mathfrak{J}_\mathfrak{x} \mathfrak{l}_\tau$ dagegen vernachlässigen können. Wir dividieren auch gleich die ganze Gleichung durch A; dann bekommt E den kleinen Faktor

$$\frac{}{\mathfrak{G} \cos \varphi}$$

der im normalen Flug bei kleinen Flugzeugen etwa $= \frac{1}{16}$ ist und bei langsamen, sehr großen Flugzeugen höchstens bis $\frac{2}{3}$ steigt.

Dann lautet die Stabilitätsgleichung:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^4 + \frac{\mathfrak{k}_{\bar{\mu}}}{\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}}}\lambda^3 + \left(\frac{\mathfrak{l}_\tau}{\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}} + \frac{\mathfrak{k}_{\bar{\mu}}\,\mathfrak{l}_{\bar{\tau}}}{\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}}\right)\lambda^2 + \frac{\mathfrak{k}_{\bar{\mu}}\,\mathfrak{l}_\tau}{\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}}\lambda + \frac{gb}{v^2}\cdot\frac{\mathfrak{k}_\tau\mathfrak{l}_{\bar{\omega}} - \mathfrak{k}_{\bar{\omega}}\mathfrak{l}_\tau}{\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}}} = \\ = \lambda^4 + B_1\lambda^3 + C_1\lambda^2 + D_1\lambda + E_1 = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (61)$$

numerisch der Größenordnung nach, wenn wir $\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}} = 0{,}1$, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{y}} = 0{,}2$ einsetzen,

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + (0{,}38 + 0{,}95)\,\lambda^2 + 1{,}9\,\lambda - 0{,}05 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (61\text{a})$$

Diese Gleichung hat stets eine große, eine sehr kleine und zwei konjugiert komplexe Wurzeln von mittlerer Größenordnung; bezeichnen wir diese mit λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4, so muß allgemein sein:

$$\left.\begin{aligned} -B_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ C_1 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) \\ -D_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2)\,\lambda_3\lambda_4 + (\lambda_3 + \lambda_4)\,\lambda_1\lambda_2 \\ E_1 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62)$$

Nun ergibt sich in erster Näherung mit Rücksicht auf die Größenordnungen der Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= -B_1 \\ \lambda_3^{(1)} + \lambda_4^{(1)} &= \frac{C_1}{\lambda_1^{(1)}} = -\frac{C_1}{B_1} \\ \lambda_3^{(1)}\lambda_4^{(1)} &= -\frac{D_1}{\lambda_1^{(1)}} = +\frac{D_1}{B_1} \\ \lambda_2^{(1)} &= \frac{E_1}{\lambda_1^{(1)}\lambda_3^{(1)}\lambda_4^{(1)}} = -\frac{E_1}{D_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62\text{a})$$

Die verbesserte zweite Näherung lautet:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{(2)} &= -B_1 - \lambda_3^{(1)} - \lambda_4^{(1)} = -B_1\left(1 - \frac{C_1}{B_1^2}\right) \\ \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)} &= \frac{C_1 - \lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(1)} - \lambda_3^{(1)}\lambda_4^{(1)}}{\lambda_1^{(2)}} = -\frac{C_1}{B_1}\,\frac{1 - \frac{B_1E_1}{C_1D_1} - \frac{D_1}{B_1C_1}}{1 - \frac{C_1}{B_1^2}} \\ \lambda_3^{(2)}\lambda_4^{(2)} &= \frac{-D_1 - (\lambda_3^{(1)} + \lambda_4^{(1)})\,\lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(2)}} = \frac{D_1}{B_1}\cdot\frac{1 - \frac{C_1E_1}{D_1^2}}{1 - \frac{C_1}{B_1^2}} \\ \lambda_2^{(2)} &= \frac{E_1}{\lambda_1^{(2)}\lambda_3^{(2)}\lambda_4^{(2)}} = \frac{E_1}{D_1}\cdot\frac{1}{1 - \frac{C_1E_1}{D_1^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (62\text{b})$$

Die Zahlenwerte der Gleichung (61a) ergeben die ersten Näherungen:

$$\lambda_1^{(1)} = -5 \quad \lambda_2^{(1)} = +0{,}026 \quad \lambda_3^{(1)} + \lambda_4^{(1)} = -0{,}26 \quad \lambda_3^{(1)} \lambda_4^{(1)} = +0{,}38$$

also $\lambda_{3,4}^{(1)} = -0{,}13 \pm i \cdot 0{,}60$.

Die verbesserten Werte nach (62b) sind:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(2)} &= -5 \cdot (1 - 0{,}05) = -4{,}75 \\ \lambda_2^{(2)} &= 0{,}026\,(1 + 0{,}02) = 0{,}0265 \\ \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)} &= -0{,}26\,(1 - 0{,}15) = -0{,}22 \\ \lambda_3^{(2)}\, \lambda_4^{(2)} &= +0{,}38\,(1 + 0{,}08) = 0{,}41. \end{aligned}$$

Wenn man den Betrachtungen die erste Näherung zugrunde legt, so macht man einen bedeutenden Fehler nur beim reellen Teil der Wurzeln λ_3 und λ_4; also die Dämpfung der durch $\lambda_{3,4}$ dargestellten Schwingung wird erst in zweiter Näherung richtig. Das Verfahren konvergiert sehr gut; in unserem numerischen Beispiel wird die dritte Näherung

$$\lambda_1 = -4{,}78 \quad \lambda_3 \lambda_4 = -0{,}218 \quad \lambda_3 \lambda_4 = 0{,}40 \quad \lambda_2 = 0{,}0265$$

also sehr nahe gleich der zweiten Näherung.

Unser Näherungsverfahren zerspaltet die Gleichung 4. Grades in zwei Gleichungen ersten und eine Gleichung zweiten Grades, welche in erster Näherung lauten:

$$(\lambda + B_1)\left(\lambda + \frac{E_1}{D_1}\right)\left(\lambda^2 + \frac{C_1}{B_1}\lambda + \frac{D_1}{B_1}\right) = 0.$$

Diese Zerspaltung der Gleichung haben Bairstow und Hunsaker auch benutzt, und zwar in zweiter Näherung; doch fehlen dort im Ausdruck für $\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}$ die Glieder $\frac{D_1}{B_1 C_1}$ und $\frac{C_1}{B_1^2}$, was uns unberechtigt erscheint.

Wir wenden uns nunmehr zur Diskussion der einzelnen Wurzeln:

1. Die Wurzel λ_1 stellt eine stark gedämpfte aperiodische Bewegung dar. Um ihren Charakter zu erkennen, gehen wir auf die Gleichungen (53) zurück und vereinfachen diese so, daß nur diese Wurzel λ_1 übrigbleibt; dies ist der Fall, wenn wir ω und τ gleich Null setzen und nur das Gleichgewicht um die $\mathfrak{x}$-Achse als gestört ansehen. Dies führt zur Gleichung

$$\mathfrak{J}_x \frac{d^2\mu}{dt^2} + \mathfrak{l}_\mu \frac{d\mu}{dt} = 0,$$

welche eine gedämpfte „Rollbewegung" um die $\mathfrak{x}$-Achse darstellt. Ein solches Rollen ist beim Flugzeug nicht eine Schwingung wie beim Schiff, da kein Moment dem Herausdrehen μ aus der Gleichgewichtslage entgegenwirkt. Nur die Drehgeschwindigkeit $\frac{d\mu}{dt}$ erzeugt ein Moment, welches dämpfend wirkt. Die Flugbahn und der Seitenwind bleiben durch diese Bewegung in erster Näherung ganz unbeeinflußt. Im normalen Flug ist die Dämpfung so groß, daß von der ganzen Bewegung kaum etwas bemerkt wird. Die Drehgeschwindigkeit sinkt auf die

Hälfte ihres Anfangswertes, wenn $e^{\lambda_1 \frac{v}{b} t} = \frac{1}{2}$, also mit $\lambda_1 = -5$ und $\frac{v}{b} = 4 \cdot \frac{1}{\sec}$, in 0,034 s. Nur bei ganz großen Anstellwinkeln, wenn $\mathfrak{k}_{\overline{\mu}}$ klein oder gar negativ wird, fällt diese starke Dämpfung fort; doch läßt sich in diesem Fall natürlich die Gleichung nicht mehr nach obigem Verfahren auflösen.

2. Die Wurzel λ_2, welche in der Regel eine aperiodisch anwachsende Störung darstellt, daher für die Stabilität am kritischsten ist, wird allein aus der Hauptdeterminante erhalten, wenn man das Gleichungssystem (53) in folgender Weise vereinfacht:

$$\mathfrak{S} \cos \varphi \cdot \overline{\omega} + c_a \mu = 0$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \qquad (64)$$

$$\overline{\omega} = 0$$

Die erste Gleichung besagt, daß das Flugzeug stets so in der Kurve liegt, daß die Resultierende in der Symmetrieebene liegt. Der Seitenwind, der in diesem Fall nicht verschwindet, wie bei den in §§ 3 und 4 beschriebenen Bewegungen, spielt für den Ausgleich der Kräfte keine Rolle. Die dritte Gleichung setzt den Seitenwind in Beziehung zur Drehgeschwindigkeit; solange $\mathfrak{l}_\tau$ und $\mathfrak{l}_{\overline{\omega}}$ positiv sind, haben τ und $\overline{\omega}$ entgegengesetztes Vorzeichen; das bedeutet nach Abb. 270, daß das Flugzeug Seitenwind vom Krümmungsmittelpunkt der Kurve her erhält, daß es „nach innen schiebt". Am einfachsten wird diese Bewegung deutlich, wenn man, wie beim normalen Flugzeugtyp, nur eine hinter dem Schwerpunkt liegende Seitenleitfläche annimmt; dann ist

$$\frac{\mathfrak{l}_\tau}{\mathfrak{l}_{\overline{\omega}}} = \frac{b}{l_S} \text{ und daher } \overline{\omega} = -\frac{b}{l_S} \tau.$$

Die Drehgeschwindigkeit ist $\omega = -\frac{v}{l_S} \tau$, und die absolute Geschwindigkeit des Leitwerks infolge dieser Drehung um den Schwerpunkt $= -v\tau$, d. i. gerade gleich und entgegengesetzt der Leitwerksgeschwindigkeit infolge des Seitenwindes. In diesem einfachsten Fall hat also das Leitwerk keine seitliche Bewegung, es wird durch die Luftkraft festgehalten, während sich der vordere Teil des Flugzeugs dreht; das Leitwerk dient als Drehungsmittelpunkt. In welcher Weise diese Bewegung anwächst oder abklingt, regelt die zweite Gleichung (64); die Seitenneigung wird dadurch vergrößert, daß der äußere Flügel bei der beschriebenen Drehung dem inneren voreilt und daher größeren Auftrieb erfährt; die Vergrößerung wird vermindert, wenn die äußeren Flügelteile unter kleinerem Anstellwinkel stehen und wenn infolge der V-Stellung oder der Pfeilstellung der Seitenwind den inneren Flügel hebt. In dieser Weise ist die ganze Flugbewegung zuerst von Reißner, dann ausführlicher von Gehlen beschrieben worden; man bezeichnet sie als „Spiralsturz", weil mit der Zeit die Drehung immer schneller, die Kurve immer enger wird. Sowohl bei Stabilität als auch bei Instabilität geht die ganze Bewegung nur sehr langsam vor sich, die treibenden Kräfte $\mathfrak{k}_\tau \tau + \mathfrak{k}_{\overline{\omega}} \overline{\omega}$ sind immer recht klein, die Dämpfung $\mathfrak{k}_{\overline{\mu}}$ ist verhältnismäßig groß. Nehmen wir für λ_2 den obigen Wert $+ 0{,}026$ an, der bei guter

Abgleichung durch V-Stellung und Verwindung noch erheblich herabgedrückt werden kann, so steigen die Größen μ, $\bar{\omega}$ und τ auf das Doppelte ihres Anfangswertes, wenn $e^{\lambda_2 \frac{v}{b} t} = 2$ ist, also bei der Annahme $\frac{v}{b} = 4 \frac{1}{\sec}$, in 6,6 sec. Dies ist für das Flugzeug eine sehr lange Zeit; infolgedessen ist diese Instabilität in der Regel keine Gefahr; beim Flug im Nebel freilich, wenn der Führer von dieser Bewegung nichts fühlt, daher nicht entgegenarbeitet, kann sie zum Absturz führen. Die Instabilität stört um so weniger, je größer die Geschwindigkeit und je kleiner die Spannweite ist.

3. Die Wurzeln λ_3 und λ_4 stellen eine periodische, gedämpfte Bewegung dar, wenn nur $\mathfrak{l}_\tau$ positiv ist, also der aerodynamische Schwerpunkt der Leitflächen hinter dem Flugzeugschwerpunkt liegt. Der physikalische Sinn dieses Bewegungstypus wird deutlich, wenn man das Gleichungssystem (53) vereinfacht zu der einen Gleichung:

$$[illegible] \quad d\tau \quad [illegible] \qquad (65)$$

Hierbei ist allerdings das Glied $\frac{\mathfrak{l}_\tau}{\mathfrak{J}_\eta} \lambda^2$ in (61) fortgelassen; nimmt man es mit, so führt es aber nur wieder auf die Rollbewegung. Die Gleichung (65) beschreibt eine gedämpfte Schwingung, welche das Flugzeug unter Einfluß des Seitenwindes ausführt; das Flugzeug stellt sich mit Hilfe einer gedämpften Schwingung in den Wind ein; wir wollen daher diesen Bewegungstypus als „Windfahnenbewegung" des Flugzeugs bezeichnen. Die Flugbahn, und somit die Drehgeschwindigkeit, wird durch diese Bewegung nicht beeinflußt. Dieser Bewegungstypus ist von Gehlen zuerst richtig beschrieben worden; daß er bei Hunsaker mit der Schlittschuhlaufbewegung „Holländern" (Dutch Roll) in Zusammenhang gebracht wird, scheint uns auf einer falschen Abschätzung der Größenordnung im Ausdruck D von Gleichung (55) zu beruhen.

§ 7. Seitensteuerung.

Die Vorgänge bei der Seitensteuerung sind sehr kompliziert und noch sehr wenig geklärt. Um sie restlos zu erfassen, müßte man in der Art, wie es im vorigen Kapitel mit der Längssteuerung geschehen ist, nun allgemein den Verlauf einer nichtstationären Bewegung, die durch einen Steuerausschlag eingeleitet ist, verfolgen; man hätte sechs Differentialgleichungen nebeneinander zu betrachten und numerisch von Schritt zu Schritt zu integrieren, wobei die Luftkräfte in nicht einfacher Weise von den Unbekannten abhängen. Diese Aufgabe, die wohl keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietet, aber sehr mühevoll sein muß, ist noch nicht in Angriff genommen. Das ganze Problem der Seitensteuerung ist überhaupt nur in der Nähe des geraden Fluges untersucht, und zwar von Reißner und von Gehlen in ihren schon öfter erwähnten Abhandlungen. Die Grundlage bietet auch dort natürlich die Berechnung der Gleichgewichtszustände bei verschiedenen Steuerausschlägen; daß diese kein einfaches Bild ergeben können, sahen wir schon oben. Beschränken wir uns auf kleine Abweichungen vom geraden Fluge, so werden

wieder, wie oben bei den Stabilitätsuntersuchungen, die Verhältnisse in der Symmetrieebene unabhängig von den unsymmetrischen Kräften und Momenten und umgekehrt. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{k}_s$ und $\mathfrak{l}_s$ die Zusatzmomente um die $\mathfrak{x}$- und die $\mathfrak{y}$-Achse, welche durch die Steuerausschläge hervorgerufen werden, in der dimensionslosen Form der Gleichungen (50 ff.), so können wir für den Fall der stationären Bewegungen die Gleichgewichtsbedingungen in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{S}{\alpha F} - \mathfrak{q}_\tau \Big) \tau + (\mathfrak{G} \cos \varphi - \quad \bar{\omega} + c_a \mu &= 0 \\ \mathfrak{k}_{\bar{\omega}} \bar{\omega} + \mathfrak{k}_s &= 0 \\ \mathfrak{l}_{\bar{\omega}} \bar{\omega} + \mathfrak{l}_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots (66)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgen:

$$\omega = - \frac{}{\mathfrak{k}_{\bar{\omega}} \mathfrak{l}_\tau - \mathfrak{k}_\tau \mathfrak{l}_{\bar{\omega}}} \tag{67}$$

und

$$\tau = \frac{\mathfrak{k}_s \mathfrak{l}_{\bar{\omega}} - \mathfrak{l}_s \mathfrak{k}_{\bar{\omega}}}{\mathfrak{k}_\tau \mathfrak{l}_{\bar{\omega}} - \mathfrak{k}_{\bar{\omega}} \mathfrak{l}_\tau} \tag{68}$$

Die hier auftretenden Größen $\mathfrak{k}_{\bar{\omega}}$, $\mathfrak{k}_\tau$, $\mathfrak{l}_{\bar{\omega}}$, $\mathfrak{l}_\tau$ sind alle normalerweise positiv. Außerdem zeigt Abb. 270, daß bei unserer Festsetzung des Momentenvorzeichens eine positive Drehung $\bar{\omega}$ (im horizontalen Flug eine Drehung von z nach x) nur durch ein negatives $\mathfrak{l}_s$, also ein Steuermoment, welches das Flugzeug von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ zu drehen sucht, eingeleitet werden kann, und daß das richtige Hineinlegen in die Kurve ein positives $\mathfrak{k}_s$, ein Querrudermoment, das den äußeren Flügel nach oben, also von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{y}$ dreht, erfordert. Will der Flugzeugführer daher eine derartige Linkskurve fliegen, so wird er sicher das Seitenruder nach links und das rechte Querruder nach unten ausschlagen, also positives $\bar{\omega}$ mit positivem $\mathfrak{k}_s$ und negativem $\mathfrak{l}_s$ zu erzwingen suchen. Gleichung (67) zeigt nun, daß durch diese Manöver ein stationärer Kurvenflug mit positivem $\bar{\omega}$ dann und nur dann erreicht wird, wenn die Nennerdeterminante

$$\mathfrak{k}_\tau \mathfrak{l}_{\bar{\omega}} - \mathfrak{k}_{\bar{\omega}} \mathfrak{l}_\tau > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (69)$$

ist. Dies ist aber genau die Bedingung, welche wir oben als „statische Seitenstabilitätsbedingung" bezeichnet haben. Der Ausdruck (69) spielt auch hier dieselbe Rolle wie die als „statische Längsstabilität" bezeichnete Größe in der Theorie der Höhensteuerung. Der Steuerausschlag, welcher Momente mit dem verlangten Drehsinn erzeugt, muß auch immer das Flugzeug in eine nichtstationäre Bewegung zwingen, welche die erwünschte Richtung hat; beim Ziehen des Höhensteuers muß das Flugzeug jedenfalls nach oben gedreht werden; bei Seitenruderausschlag nach links und Ausschlag des rechten Querruders nach unten muß das Flugzeug nach links einschwenken und sich in die Kurve hineinlegen. Aber nur im Falle statischer Stabilität verlaufen diese beiden Bewegungen auf einen Gleichgewichtszustand stationären Fluges zu. Ist der Ausdruck (69) < 0, so wird das $\bar{\omega}$, welches zum stationären Kurvenflug gehört, negativ; d. h. der zu den betreffenden Steuerausschlägen gehörige stationäre Zustand ist

keine Linkskurve, sondern eine Rechtskurve, und das Flugzeug entfernt sich im Verlauf seiner durch die Steuerausschläge eingeleiteten Bewegung immer weiter aus dem Gleichgewichtszustand; es ist mit einem Steuerausschlag nicht in eine neue stationäre Kurve zu zwingen. Das analoge Verhalten des statisch instabilen Flugzeugs bei der symmetrischen Bewegung ist oben ausführlich besprochen worden.

Die Schwierigkeit der Seitensteuerung geht aber über diese Analogie zur Höhensteuerung weit hinaus; denn auch bei statischer Seitenstabilität ist der neue Gleichgewichtszustand, dem die nicht stationäre Bewegung zustrebt, kein erwünschter, da der seitliche Abtrieb τ dabei immer unverhältnismäßig groß ist. Nach Gleichung (68) wird τ unter den in unserem Beispiel gemachten Voraussetzungen negativ; das bedeutet nach Abb. 270 Seitenwind von innen, „Schieben nach innen". Diesen Zustand wird man immer noch dem Schieben nach außen vorziehen; aber beim brauchbaren Flug muß der Seitenwind ein nebensächlicher Begleitumstand sein, und dies ist hier nicht der Fall. In der zweiten Gleichung (66) werden nämlich nun $\bar{\omega} > 0$, $\mathfrak{k}_{\bar{\omega}} > 0$, $\mathfrak{k}_s > 0$; und die ganzen Momente, die vom Steuerausschlag und von der Drehung herrühren, muß das vom Seitenwind herrührende Moment, das nur durch V-Stellung einen nennenswerten Betrag erhält, aufnehmen. Das ist bei unendlich kleinen Abweichungen vom geraden Fluge vielleicht noch möglich, bei mäßigen Drehungen unerwünscht, bei stärkeren Drehungen ganz unmöglich.

Will man eine Linkskurve ohne Seitenwind durchfliegen ($\tau = 0$), so fordert Gleichung (69)

$$\mathfrak{l}_s = \mathfrak{k}_s \frac{\mathfrak{l}_{\bar{\omega}}}{\mathfrak{k}_{\bar{\omega}}}$$

also es kann nicht $\mathfrak{l}_s$ negativ und $\mathfrak{k}_s$ positiv sein, wie es dem natürlichen Gefühl bei Einleitung einer derartigen Bewegung entspricht. Seiten- und Querruder müssen gegeneinander arbeiten; und zwar wird nach Gleichung (68)

$$\bar{\omega} = -\frac{\mathfrak{k}_s}{\text{[illegible]}} = -\frac{l_s}{l_{\bar{\omega}}} \qquad (70)$$

Dies besagt, daß positives $\bar{\omega}$ zu negativem $\mathfrak{l}_s$, aber auch zu negativem $\mathfrak{k}_s$ gehört, daß also im stationären Kurvenflug das Seitenruder so ausgeschlagen sein muß, wie es eine Bewegung im richtigen Sinn einleiten kann, das Querruder umgekehrt. Ob sich durch eine solche Kombination von Steuerausschlägen ein richtiger Kurvenflug einleiten läßt, ist noch nicht theoretisch diskutiert; praktisch macht man es natürlich nicht so; die Seitensteuerung auch des statisch stabilen Flugzeugs wird nie eine langsame Führung aus einem Gleichgewichtszustand in den benachbarten sein, wie die Höhensteuerung des stabilen Flugzeugs, sondern ein ständiges Entfernen aus einem Gleichgewichtszustand und Wiederannähern an einen neuen, wie die Höhensteuerung eines instabilen Flugzeugs. Damit mag es zusammenhängen, daß die statische Seitenstabilität, die ja, wie erwähnt, bei den wenigsten Flugzeugen vorhanden ist, praktisch eine viel geringere Rolle spielt, als man nach den theoretischen Erwägungen des vorigen Paragraphen und nach der Analogie mit der statischen Stabilität der symmetrischen Bewegung erwarten sollte.

Alle diese Überlegungen geben aber nur sehr geringe Fingerzeige in dem ungeklärten Gebiet der Seitensteuerung; darum haben Reißner und Gehlen auch das Problem, die nichtstationäre Bewegung des Flugzeugs unter Einwirkung von Steuerausschlägen zu verfolgen, schon aufgenommen, als das viel leichtere Problem der Höhensteuerung noch nicht diskutiert war. Sie beschränken sich auf die kleinen Schwingungen, begnügen sich aber nicht mit der Lösung der Gleichung (54) und der Entscheidung über Stabilität und Instabilität, sondern bestimmen die Bewegung des Flugzeugs unter Einfluß von Steuerausschlägen als Lösung der Differentialgleichungen (53) unter bestimmten Anfangsbedingungen.

Der physikalische Gedankengang ist derselbe, den wir oben bei der Höhensteuerung zugrunde gelegt haben. Bei bestimmten Steuermomenten ist der Gleichgewichtszustand durch die Gleichungen (66) bis (68) gegeben. Wir denken uns in irgendeinem Augenblick, in welchem das Flugzeug sich in einem stationären, geraden oder nahezu geraden Fluge befindet, plötzlich bestimmte Steuerausschläge gegeben; dann befindet sich das Flugzeug nicht mehr im Gleichgewicht; die Größen $\bar{\omega}_0$, τ_0, μ_0 der ursprünglichen Bewegung sind nunmehr als Anfangszustände einer nichtstationären Bewegung anzusehen, die nur dann stationär werden kann, wenn die durch Gleichungen (66) bis (68) gegebenen Werte von $\bar{\omega}$, τ und μ erreicht werden. Die Lösung der Gleichung (53) mit den Anfangsbedingungen $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0$, $\tau = \tau_0$, $\mu = \mu_0$ zur Zeit $t = 0$ zeigt dann an, wie das Flugzeug den neuen Gleichgewichtszustand annimmt, bzw. wie es sich daraus entfernt. Als vierte Anfangsbedingung tritt beim Steuerungsproblem hinzu $\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_0 = \dot{\bar{\mu}}_0 = 0$. Will man nicht einen Steuerungsvorgang verfolgen, sondern den Verlauf einer Störung, so kann man $\bar{\omega}_0$, τ_0 und μ_0 beliebige, nicht durch Gleichgewichtsbedingungen zusammenhängende Werte geben, und kann auch $\dot{\bar{\mu}}_0 = 0$ setzen.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (53) ist

$$\left.\begin{aligned} \tau &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} \\ \bar{\omega} &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t} \\ \mu &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (71)$$

Hierbei werden natürlich A_3 und $A_4, \ldots$ konjugiert komplex wie λ_3 und λ_4. Die Lösung enthält zwölf Konstanten; diese sind aber nicht voneinander unabhängig, da ja die Gleichungen (53) und (54) erfüllt sein müssen. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Konstanten A, B, C einer Partiallösung sich verhalten wie die zu den betreffenden Gliedern der Determinante (54) gehörigen Unterdeterminanten. Bezeichnen wir mit D_{11} die Unterdeterminante des ersten Gliedes der ersten Zeile der Determinante (54) (also des Gliedes $-\frac{S}{q\,F} - \mathfrak{q}_\tau - \mathfrak{q}_i\,\lambda$), mit D_{21} die Unterdeterminante des zweiten Gliedes der ersten Zeile usw., so gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} B_1 : A_1 &= D_{21}(\lambda_1) : D_{11}(\lambda_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_4 : B_4 &= D_{31}(\lambda_4) : D_{21}(\lambda_4) \end{aligned} \qquad (72)$$

Dabei ist es nach den Grundlehren der Determinantentheorie gleichgültig, zu welcher Zeile der Determinante (54) wir die Unterdeterminanten wählen. Durch die Beziehungen (72) werden die zwölf Konstanten von (71) auf vier reduziert, welche sich aus den vier Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Die **einzelnen Konstanten** werden am besten nach einem von **Routh entwickelten Verfahren bestimmt**, das ohne Beweis hier angegeben werden soll.

Man bildet aus den linken Seiten der Gleichung (53) durch Einführung von $\frac{d}{dt} = \lambda$, sowie der Konstanten A, B, C nach (71) und Division mit λ Funktionen:

$$f(\lambda) = A\left[\frac{-\frac{S}{qF} - \mathfrak{q}_\tau}{\lambda} + \mathfrak{q}_{\dot{\tau}}\right] + B\,\frac{\mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\bar{\omega}}}{\lambda} + C\left[\frac{c_a}{\lambda} + \mathfrak{q}_{\dot{\mu}}\right] \text{ usw.}$$

an bildet ferner die Ausdrücke:

$$\frac{\{f(\lambda) - f(\lambda_n)\}}{\lambda - \lambda_n}\cdot\lambda = A\,\frac{\frac{S}{qF} + \mathfrak{q}_\tau}{\lambda_n} - B\,\frac{\mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\bar{\omega}}}{\lambda_n} - C\,\frac{c_a}{\lambda_n} \text{ usw.}, \quad (73)$$

obei λ_n einen der vier Eigenwerte $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ bedeutet, und setzt in diesen für die onstanten A, B, C die Anfangswerte ein, nämlich

$$A = \tau_0 \qquad B = \omega_0 \qquad C = \mu_0$$
$$A\lambda = \dot{\tau}_0 \qquad\qquad C\lambda = \dot{\mu}_0.$$

tritt scheinbar eine fünfte willkürliche Konstante $\dot{\tau}_0$ auf; dies ist aber rein formal; denn $\dot{\tau}_0$ ist keine willkürliche Konstante, sondern nach der ersten Gleichung (53) zwangläufig verbunden mit den vier anderen, frei wählbaren Integrationskonstanten.

Man führt nun die Ausdrücke (73) an Stelle der 1., 2. oder 3. Kolonne in die Determinante (54) ein, wenn man A, B oder C bestimmen will. Die so entstehenden Determinanten bleiben dieselben, wenn man zu den Ausdrücken (73) die 1. Kolonne von (54) multipliziert mit $\frac{\tau_0}{\lambda_n}$ und die 2. Kolonne multipliziert mit $\frac{\bar{\omega}_0}{\lambda_n}$ hinzuaddiert, wodurch sie etwas übersichtlicher werden. Will man also z. B. den Wert von A_1 bestimmen, so bildet man die Determinante

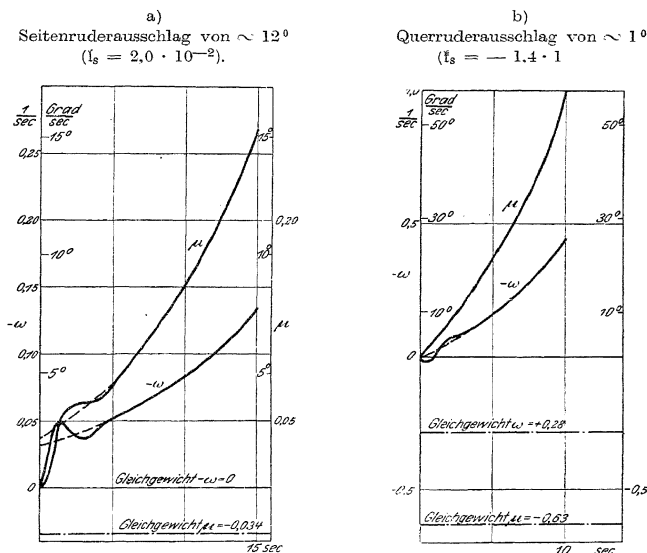
$$II_A(\lambda_1) = \begin{vmatrix} -\mathfrak{q}_{\dot{\tau}}\cdot\tau_0 - \frac{c_a}{\lambda_1}\mu_0 & \mathfrak{G}\cos\varphi - \mathfrak{q}_{\omega} & c_a - \mathfrak{q}_{\dot{\mu}}\lambda_1 \\ \mathfrak{k}_{\dot{\tau}}\tau_0 + \mathfrak{J}_x\sin\vartheta\cdot\omega_0 + \mathfrak{J}_x\sin\alpha\cdot\dot{\mu} & \mathfrak{J}_x\sin\vartheta\cdot\lambda_1 + \mathfrak{k}_{\bar{\omega}} & \mathfrak{J}_x\cos\alpha\cdot\lambda_1 + \mathfrak{k}_{\dot{\mu}}\lambda_1 \\ 2\mathfrak{J}_y\cdot\dot{\tau}_0 + \mathfrak{l}_{\dot{\tau}}\tau_0 + \mathfrak{J}_y\cos\vartheta\cdot\omega_0 - \mathfrak{J}_y\sin\alpha\cdot\dot{\mu} & \mathfrak{J}_y\cos\vartheta\cdot\lambda_1 + \mathfrak{l}_\omega & -\mathfrak{J}_y\sin\alpha\cdot\lambda^2 + \mathfrak{l}_{\dot{\mu}}\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\mathfrak{q}_{\dot{\tau}}\tau_0 - \frac{c_a}{\lambda_1}\mu_0\right) D_{11}(\lambda_1) + (\mathfrak{k}_{\dot{\tau}}\tau_0 + \mathfrak{J}_x\sin\vartheta\cdot\omega_0 + \mathfrak{J}_x\sin\alpha\cdot\dot{\mu}_0)\,D_{12}(\lambda_1)$$
$$+ (2\mathfrak{J}_y\dot{\tau}_0 + \mathfrak{l}_{\dot{\tau}}\tau_0 + \mathfrak{J}_y\cos\vartheta\cdot\bar{\omega}_0 - \mathfrak{J}_y\sin\alpha\cdot\dot{\mu}_0)\,D_{13}(\lambda_1) \quad .\;.\;.\; (74)$$

Der Koeffizient A_1 ist dann gegeben durch

wenn noch $D'(\lambda_1)$ den Differentialquotienten der Determinante (54) für $\lambda = \lambda_1$ bedeutet.

Zur Bestimmung von A_2 hat man in (75) nur λ_2 anstatt λ_1 zu schreiben; bei Bestimmung von B_1 treten in (74) nur an Stelle der Unterdeterminanten D_{11}, D_{12},

Abb. 284. Seitensteuerung eines instabilen Flugzeugs nach Gehlen.

D_{13} die Unterdeterminanten D_{21}, D_{22}, D_{23}, und entsprechend ist bei der Bestimmung der übrigen Koeffizienten zu verfahren.

Die numerische Rechnung ist ziemlich mühevoll, läßt sich aber mit Hilfe der Vernachlässigungen, die bei der Stabilitätsrechnung schon eingeführt wurden, weitgehend vereinfachen. In den meisten Fällen kann man sich ferner damit begnügen, nur die zu λ_2 gehörigen Koeffizienten zu berechnen; denn schon nach ganz kurzer Zeit werden in den Gleichungen (71) die Summanden, welche mit $e^{\lambda_3 t}$, $e^{\lambda_4 t}$ oder gar $e^{\lambda_1 t}$ multipliziert sind, verschwindend klein, und die Bewegung verläuft nach dem durch die „statische Seitenstabilität" beherrschten, im vorigen Paragraphen beschriebenen Typus.

Als Beispiele geben wir in den Abb. 284 und 285 zwei von Gehlen durchgerech-

nete Fälle, und zwar die Bewegung eines instabilen und eines stabilen Flugzeugs. In den Abbildungen ist durch gestrichelte Linien kenntlich gemacht, wie die Bewegung nach dem λ_2-Typus allein verlaufen würde; man erkennt die wichtige Rolle der λ_3-, λ_4-Schwingung für die ersten Sekunden des Steuervorgangs; die λ_1-Schwingung ist in den Abbildungen gar nicht zu erkennen, so rasch gedämpft ist sie. Man beachte ferner die Verschiedenheit des Maßstabs der Kurven μ und $\bar{\omega}$ bei Seitenruder- und bei Querruderausschlag. Beim stabilen Flugzeug, das Gehlen durchgerechnet hat, ist die Querruderwirkung so empfindlich herabgesetzt durch eine für heutige Verhältnisse übergroße V-Stellung ($\nu = 12^0$). Aus demselben

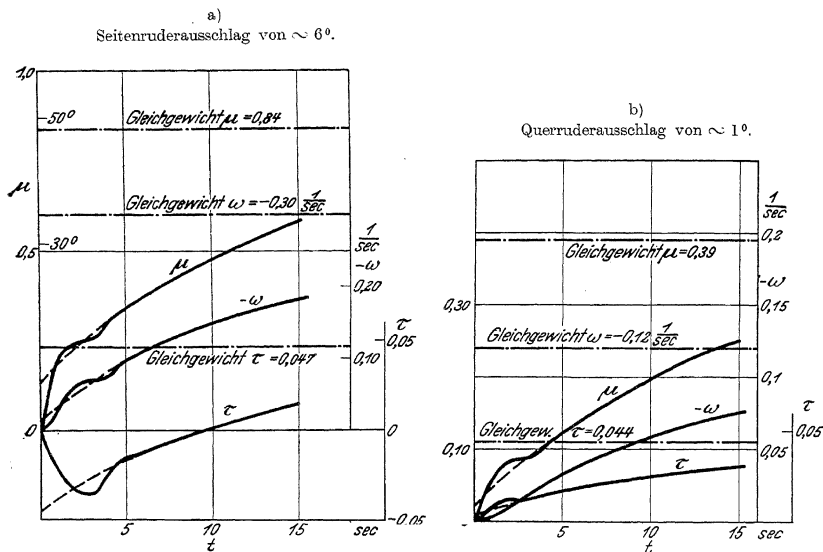



Abb. 285. Seitensteuerung eines stabilen Flugzeugs nach Gehlen.

Grund nimmt auch τ nur mäßige Werte an, so daß die Bewegung nicht als praktisch unmöglich angesehen werden darf. Die Rechnungen Gehlens aus dem Jahr 1912 beziehen sich auf alte Flugzeuge und stützen sich auch auf numerische Werte der Luftkräfte, die zum Teil heute überholt sind. Eine neue numerische Durcharbeitung des Gebietes der Seitensteuerung, womöglich ohne Beschränkung auf kleine Abweichungen vom geraden Fluge, wäre höchst erwünscht und könnte sicher viel praktisch Wichtiges zutage fördern.

Wir können diese Arbeit nicht besser schließen als mit einer solchen Erkenntnis der Unvollkommenheit und mit dem Wunsche, daß infolge reger Arbeit auf dem Gebiete der Aerodynamik recht viel von unseren Ausführungen rasch veralten möge.

Literaturverzeichnis.

Auf Vollständigkeit kann kein Anspruch erhoben werden; die ausländische Literatur, besonders diejenige nach 1914, stand uns nur zum Teil zur Verfügung.

Abkürzungen:

Z. F. M. = Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. R. Oldenbourg, München und Berlin.

T. B. = Technische Berichte der Flugzeugmeisterei. R. C. Schmidt & Co., Berlin.

G. M. 1921 = Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. R. Oldenbourg, München und Berlin, 1. Lieferung, 1921.

W. G. L. = Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt.

Gesamtwerke:

O. Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. R. Oldenbourg, München und Berlin 1890. 2. Aufl. 1910.

F. W. Lanchester, Aerodynamics, 1. Vol. of a complete work on aerial flight 1907.

— Aerodonetics, 2. Vol. of a complete work on aerial flight 1908. London, Archibald Constable & Co. Ptd.

— Deutsche Übersetzung von C. & A. Runge. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1909/11.

Beides klassische Werke, aus denen die Flugwissenschaft mächtige Anregungen geschöpft hat und wohl auch noch weiter schöpfen wird.

Ältere zusammenfassende Darstellungen:

S. Huppert, Leitfaden der Flugtechnik. J. Springer, Berlin 1913.

A. Baumann, Mechanische Grundlagen des Flugzeugbaues. 2 Bde. R. Oldenbourg, München und Berlin 1913.

L. Marchis, Cours d'Aéronautique. 3 Bde. Dunod et Pinat, Paris 1911.

Al. Sée, Les Lois Expérimentales de l' Aviation, Paris 1911.

P. Painlevé u. E. Borel, Theorie und Praxis der Flugtechnik. Übers. von A. Schöning. R. C. Schmidt & Co., Berlin 1911.

H. G. Bader, Einführung in die Dynamik der Flugzeuge. Forschungsarbeiten des V. d. J. Heft 88/89.

Neuere Darstellungen:

R. v. Mises, Fluglehre. J. Springer, Berlin 1918. Kurz gefaßte, allgemeine, populäre Darstellung.

A. Pröll, Flugtechnik. R. Oldenbourg, München und Berlin 1919. Umfaßt ungefähr dieselben Gebiete wie das vorliegende Werk, darüber hinaus auch etwas Flugzeugstatik, aber alles viel kürzer gefaßt.

O. Wiener, Fliegerkraftlehre. S. Hirzel, Leipzig 1920. Populäre Einführung.

H. G. Bader, Grundlagen der Flugtechnik. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1920. Für den praktischen Gebrauch beim Flugzeugentwurf geschrieben.

L. Bairstow, Applied Aerodynamics. Longmans, Green & Co., London 1920. Aus den englischen Arbeiten während des Krieges entstanden, ungefähr ebenso breit wie das vorliegende Werk, umfaßt weniger Theorie, dafür auch Luftschrauben und Luftschiffe.

Einleitung.

§ 2. Text zum größten Teil nach L. Hopf, Modellregeln und Dimensionsbetrachtungen. Naturwissenschaften 1920, Heft 5.

§ 3. Beschreibung einer Schleppversuchsanordnung: F. Bendemann, Die Flugzeugprüfbahn der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt. Z. F. M. 11 (1920), S. 245.

Anordnung und Versuche im Wasserkanal: F. Ahlborn, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 5 (1904), S. 417; 6 (1905), S. 67 und 82; 10 (1909), S. 370.

Englische Versuche im Wasserkanal: Reports of the Adv. Comm. f. Aeronautics 1911/12, S. 97.

Rundlaufversuche verschiedener Forscher ausführlich beschrieben bei Lanchester (deutsche Ausgabe I, S. 283). Abb. 3 und 11 nach O. Föppl, Windkräfte an ebenen und gewölbten Platten. Jahrbuch der Motorl.-Studienges. IV (1910/11), S. 51.

Eiffels Fallversuche: Recherches experimentales sur la résistance de l'air exécutées á la tour. Maretheux, Paris 1907.

Luftstromanordnungen:

Alte Göttinger Anstalt: L. Prandtl, Jahrbuch der Motorl.-Studienges. 1908, 1909 und 1910, S. 43.

Neue Göttinger Anstalt: L. Prandtl, Z. F. M. 11 (1920), S. 84 und G. M. 1921.

Eiffels älterer Luftstrahl: G. Eiffel, La résistance de l'air et l'aviation. Dunod et Pinat, Paris 1910.

Sechskomponentenwagen sind beschrieben: Techn. Rep. of the Adv. Comm. f. Aeron. 1912/13.

J. Hunsaker, Dynamical stability of aeroplanes. Washington 1913.

§ 4. Ältere Versuchsflüge: Legrand, L'Aerophile 15. IX. 1910 und 1. III. 1912; Dorand, La Technique Aéronautique 1. IX. 1912, L'Aerophile 1. V. 1912; Techn. Reports of the Adv. Comm. f. Aeron. 1911/12.

W. Hoff, Versuche an Doppeldeckern. Luftfahrt und Wissenschaft, Heft 6. J. Springer, Berlin 1913.

— Neue aufzeichnende Kräftemeßgeräte und einige Messungen im Flugzeug. Z. F. M. 5 (1914), S. 3 und 17.

— Ermittlung der Seilkräfte in Flugzeugtragkabeln während des Fluges. Z. F. M. 5 (1914), S. 140.

— Seilkraftmessungen. T. B. I, S. 61.

Näheres über Instrumente s. den Band von K. Bennewitz „Die Instrumente des Fliegers" in diesem Handbuch.

E. Everling, Iklé u. Sieber, Flossendruckmessungen. T. B. I, S. 302.

A. Pröll, Druckmessungen am fliegenden Flugzeug. Z. F. M. 12 (1921), S. 177.

W. Stieber, Die Meßnabe für Flugzeuge. T. B. III, S. 221.

E. Jacobi, Die Messung von Flugzeuggeschwindigkeiten. T. B. II, S. 99.

V. Heidelberg u. A. Hölzel, Neuere Geschwindigkeitsmessungen. T. B. III, S. 174.

R. v. Mises, Fluggeschwindigkeit, Windstärke und Eigengeschwindigkeit im Fluge. Z. F. M. 10 (1919), S. 208.

I. Teil.

I. Kap. Eine ausführliche Darstellung der klassischen Hydrodynamik findet man z. B. bei H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (Deutsche Ausgabe von Friedel, Leipzig 1907), wo auch die Literatur genau angegeben ist.

II. Kap. Zusammenfassende Darstellung: R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1917.

§ 1. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen, komplexen Größe. Dissertation. Göttingen 1851. Werke, 2. Aufl., S. 3. Teubner, Leipzig 1892.

Lamb, Hydrodynamik, Kap. IV.

Abb. 25 ist dem Aufsatz von Betz, Untersuchung einer Joukowskyschen Tragfläche, Z. F. M. 1915, S. 173, entnommen.

§ 2 u. 3. Riemann, a. a. O.

W. M. Kutta, Auftriebskräfte in stömenden Flüssigkeiten. Habilitationsschrift, sowie Ill. aeron. Mitteilungen 1902, S. 133.

Blasius, Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 58 (1910), S. 90.

Joukowsky, Arbeiten der d. physik. Sektion d. k. Gesellsch. d. Freunde d. Naturkunde 1906, Bd. 13.

Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Vieweg & Sohn, Braunschweig. II, § 10 und 11.

v. Mises, Zur Theorie des Tragflächenauftriebs, erste Mitteilung. Z. F. M. 1917, S. 158, § 3. In dieser Abhandlung und den sich anschließenden findet sich auch eine Zusammenstellung der hierhergehörigen mathem. Literatur.

§ 4. Kutta, a. a. O., sowie: Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. Sitzungsber. d. Bayr. Ak. 1917. München 1910. Zwei Abhandlungen.

Weiter s. d. unter § 8 angegebenen Arbeiten.

Grammel, die hydrodynamischen Grundlagen usw., I. Abschnitt.

v. Mises, a. a. O., § 5.

Blasius, a. a. O. und: Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionalen Strömungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 59 (1911), S. 225.

Faber, Sitzungsber. der Bayr. Ak. d. Wiss. 1920, S. 63.

§ 5. Blasius, a. a. O.

Grammel, a. a. O., I. und II. Abschnitt.

v. Mises, a. a. O., § 6 und 7. Z. F. M. 1920, S. 68, § 1 und 2.

Betz, Z. F. M. 1915, S. 173. Diesem Aufsatz ist Abb. 39 entnommen.

§ 6. Grammel, a. a. O., I, § 6.

Prandtl, Jahrbuch der W. G. L. V (1920), S. 46 und Anhang, S. 60.

Betz, Z. F. M. 1912, S. 217.

§ 7. Kutta und Joukowsky, a. a. O.

Grammel, a. a. O., II, § 12 und 14.

§ 8. Joukowsky, Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Z. F. M. 1910, S. 281; 1912, S. 81. Aerodynamique, Paris 1916.

Blumenthal, Über die Druckverteilung längs Joukowskyscher Tragflächen. Z. F. M. 1913, S. 125.

Trefftz, Graphische Konstruktion Joukowskyscher Tragflächen. Z. F. M. 1913, S. 130.

v. Mises, Z. F. M. 1920, S. 71, § 3.

§ 9. v. Kármán und Trefftz, Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte. Z. F. M. 1918, S. 111. Von dort sind die Abb. 52—54 entnommen.

v. Mises, a. a. O., § 4.

§ 10. v. Mises, Z. F. M. 1920, § 1—4. Von dort ist Abb. 57 entnommen.

§ 11. v. Mises, Z. F. M. 1920, S. 87, § 5 und 6. Von dort sind die Abb. 59 und 60 entnommen.

§ 12 u. 13. Kutta, Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen. Sitzungsber. d. Bayr. Ak., München 1911, S. 65.

Grammel, a. a. O., II, § 14 und 15.

III. Kap. § 1. Betz, Einführung in die Theorie des Flugzeugtragflügels. Die Naturwissenschaften 1918, Heft 38 und 39.

§ 2 u. 3. Hier sei wieder auf die Hydrodynamik von Lamb verwiesen.

§ 4—7. Prandtl, Jahrbuch der W. G. L. 1920, S. 46ff.

Prandtl, Tragflügeltheorie I. Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1919 II ebenda 1919.

Betz, die gegenseitige Beeinflußung zweier Tragflächen, Z. f. M. 1914, S. 253.

Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Dissertation. Göttingen 1919, 2 und 3.

Betz, Einfluß der Spannweite und Flächenbelastung auf die Luftkräfte von Tragflächen. T. B. I 4, S. 98; Naturwissenschaften 1918, Heft 38 u. 39.

§ 8. Munk, a. a. O., Nr. 6.

Prandtl, Tragflügeltheorie II, Nr. 6.

R. Fuchs, Beiträge zur Prandtlschen Tragflügeltheorie. Zeitschr. f. angew. Math. und Mechanik I, 1921, 2—4.

§ 9. Prandtl, Tragflügeltheorie II, § 7.

Lamb, Hydrodynamik, § 44.

R. Fuchs, a. a. O., Nr. 5.

Trefftz, Mathem. Annalen, Bd. 82, 1921, S. 306.

§ 10. Munk, a. a. O. § 1.

Prandtl, Tragflügeltheorie I § 15.

Betz, T. B. I, 4.

R. Fuchs, a. a. O., Nr. 5, 6.

§ 11. Betz, Beiträge zur Tragflügeltheorie. Dissertation. Oldenbourg, München 1919, II. Teil; dasselbe: Ber. u. Abh. der W. G. L. 1920, Heft 2.

R. Fuchs, a. a. O., Nr. 7. Dorther sind die Abb. 77—81 genommen.

IV. Kap. § 1. Prandtl, Tragflügeltheorie II, 1 und 2.

§ 2. Prandtl, a. a. O., 5, 6 und 8.

Munk, Dissertation, 4 und 5.

R. Fuchs, a. a. O., 5.

§ 3. Prandtl, a. a. O., 9.

§ 4. Prandtl, a. a. O., 3 und T. B. III 7, S. 309. Von dort sind die Abb. 84 und 85 entnommen.

§ 5. Betz, Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen. Z. F. M. 1914, S. 253; T. B. I 4, S. 103.

R. Fuchs, T. B. II 2, S. 177.

§ 6. R. Fuchs, T. B. II 2, S. 177. Von dort sind die Abb. 93—98 entnommen.

V. Kap. § 1. Helmholtz, Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. Monatsber. d. Berl. Ak. 1868, Ges. Abh. I., S. 154.

Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelles Journal f. d. r. u. a. Math. 70, 1869. Ges. Abh., S. 416.

Lord Rayleigh, On the Resistance of Fluids. Phil. Mag. 1877; Math. and phys. papers I, S. 287.

Lanchester, Aerodynamik I, § 99ff.

§ 3. Lamb, Hydrodynamik, S. 441.

Helmholtz, a. a. O.

§ 4. v. Kármán, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. 2. Abh., Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1911, 1912.

v. Kármán und Rubach, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Phys. Zeitschr. 13 (1912), S. 49—59.

§ 5. v. Kármán und Rubach, a. a. O. Abb. 105 und 106 sind dieser Abhandlung entnommen.

§ 6 u. 7. Lamb, Hydrodynamik, Nr. 311—316.

Prandtl, Verh. der III. internat. Math. Vereinigung Heidelberg 1905. Teubner, Leipzig. Dieser Arbeit sind die Abb. 109, 110, 116, 117 entnommen.

Prandtl, Flüssigkeitsbewegung. Handwörterbuch der Naturwissensch. IV, Jena 1913, S. 101.

Prandtl, Jahrbuch der W. G. L. V 1920, S. 40.

Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. S. 107.

Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zeitschr. f. Math. und Phys. 56 (1808), Bl. 1. Dieser Arbeit ist Abb. 113 entnommen.

Vergleiche auch die während des Druckes erschienenen Arbeiten: v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. Zeitschr. f. a. Math. u. Phys. I, 1921, S. 233.

K. Pohlhausen, Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Zeitschr. f. a. Math. u. Mech. I, 1921, S. 252.

VI. Kap. § 1. Prandtl, Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1914, S. 177. Dieser Arbeit sind die Abb. 118 und 119 entnommen.

Wieselsberger, Widerstandszahl von Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt. Zeitschr. f. Phys. 22 (1921), S. 323. Dieser Arbeit sind die Abb. 120 und 120a entnommen.

§ 2. Abb. 121a und b aus G. M. 1921, S. 59, Fig. 41 und 44.
122a und b aus G. M. 1921, S. 50, Abb. 32 und 33.
123a und b aus G. M. 1921, S. 51, Abb. 34 und 35.
124 aus G. M. 1921, S. 52, Abb. 36.
125a und b aus Munk T. B. II 2, Tafel 90.
126 aus Munk T. B. II 2, Tafel 103—108.
127 aus Munk T. B. II 2, Tafel 118.
128 aus G. M. 1921, S. 63, Abb. 47.
129 aus G. M. 1921, S. 64—67, Abb. 48, 54, 55.
130 aus Munk T. B. I 5, Tafel 81ff.
131 aus G. M. 1921, S. 101, Abb. 449—51.
132 aus G. M. 1921, S. 100, Abb. 440—41.
133 aus G. M. 1921, S. 99, Abb. 433—35.
134a, b, c aus G. M. 1921, S. 95, Abb. 413; S. 97, Abb. 423; S. 98, Abb. 426.
135 unveröffentlichte Göttinger Messung, vgl. Everling, T. B. II I, S. 31.
136 Lachmann, Z. F. M. 1921, S. 166, Abb. 5.
137 Wieselsberger, Z. F. M. 1921, S. 163, Abb. 3.
138 und 138a aus Flugsport 1921, Heft 6, S. 133, Abb. 16 und 17; beides nach Handley Pages Vortrag in der Royal Aeronautical Society (17. II. 1921).

Betz, Die Wirkungsweise von unterteilten Flügelprofilen. Jahrbuch der W. G. L. 1921, S. 23.

§ 3. Abb. 139 Föppl, Dissertation Aachen. Springer, Berlin 1911, S. 64, Abb. 26.
140—142 nach einer unveröffentlichten Göttinger Messung.
143 Munk, T. B. II 3, Tafel 144.
144 Munk, T. B. II 3, S. 405.
145 Munk, T. B. II 3, S. 405.
146 Munk, T. B. I 5, S. 179 und 182.
147 Munk, T. B. I 5, S. 184.
148 Munk, T. B. I 6, S. 225, 229.
149 Munk, T. B. I 6, S. 225.
150 Munk, T. B. I 6, S. 228.

§ 4. Abb. 152 Munk, T. B. II 1, Tafel 26 oben.
153 Bairstow, Applied Aerodynamics, S. 176.
154 Munk, T. B. II 1, Tafel 26 unten.
155 G. M. 1921, S. 118, Abb. 65.
156 G. M. 1921, S. 119, Abb. 66, 68, 70.
157—158 Kumbruch, T. B. II 1, Tafel 7.
159 und 160 Munk, T. B. II 1, Tafel 24.
161—163 Wieselsberger, T. B. III 4, S. 109—110, Abb. 6, 7, 8.

§ 5. Abb. 165 Munk, T. B. I 4, Tafel 52.
166 Munk, T. B. I 4, Tafel 58, Abb. 48.
167 Munk, T. B. I 4, Tafel 58, Abb. 47.
168 Munk, T. B. I 4, Tafel 40 ff. (Streben 38, 28, 34, 24, 10).
169 Munk, T. B. I 4 und T. B. II 1 (Streben 7, 12, 30, 33, 61).
170 Munk, T. B. II 1, Tafel 11 (Strebe 49).
171 Munk, T. B. II 1, Tafel 13 (Strebe 53).
172 Munk, T. B. I 4, Tafel 62, Abb. 46.

§ 5. Abb. 173 Pohlhausen, T. B. II 1, Tafel 10.
174, 175, 176 } Wieselsberger, T. B. III 7, S. 277.
177 G. M. 1921, S. 130, Abb. 80.
178 G. M. 1921, S, 132, Abb. 1 und 2.
179—182 T. B. III 2, S. 31.
183, 184, 185 } Munk und Molthan, T. B. III 2, S. 32, 33.

VII. Kap. Ausführliche Literatur siehe den Band dieses Handbuchs über Luftschrauben. Für unsere kurze Darstellung ist hauptsächlich zu Grunde gelegt: F. Bendemann und G. Madelung, Praktische Schraubenberechnung (mit einem Zusatz von L. Prandtl). T. B. II, S. 53.

Über verstellbare Luftschrauben: H. Reissner, Z. F. M. 11 (1920), S. 138, und Z. F. M., 1. Beiheft (1920), S. 60.

II. Teil.

I. Kap. § 2. Der Abb. 2 liegt numerisch zu Grunde: M. Munk und W. Molthan, Messungen an einem Flugzeugmodell, Aeg D I, T. B. III, S. 30.

§ 3. G. König, Zugkraftdiagramme von Flugzeugen. Z. F. M. 2 (1911), S. 301.
G. König, Kraft und Leistung beim Steigen. T. B. III, S. 166.

Spezieller analytischer Ansatz:

Alayrac, Etude sur le vol ascendant. La Technique Aéronautique 10, S. 41.
E. Everling, Der Aufstieg von Flugzeugen. Z. F. M. 7 (1916), S. 124.
L. Hopf, Lilienthalsche Polardiagramme. T. B. I, S. 1.

§ 4. H. Kann, Die Steigfähigkeit der Flugzeuge. T. B. I, S. 231.

§ 5. H. Blasius, Wertung der Steigfähigkeit. T. B. III, S. 193.

Älteres Verfahren:

E. Everling, Die Wertung der Steigfähigkeit. T. B. I, S. 31 und S. 247.

Graphisches Verfahren:

R. von Mises, Ermittlung der Steigfähigkeit eines Flugzeuges aus einem Barogramm. Z. F. M. 8 (1917), S. 173.

§ 6. G. König, Der Zugbedarf von Flugzeugen. Z. F. M. 10 (1919), S. 137.
— Energiemessungen durch Steig- und Gleitflüge. Z. F. M. 11 (1920), S. 170.

A. Pröll, Versuche über den Widerstand von Flugzeugen und den Schraubenzug im Fluge. Z. F. M. 8 (1917), S. 77 und 89.

O. Enoch, Die Meßnabe für Schrauben- und Motorprüfungen im Fluge. Z. F. M. 10 (1919), S. 208.

M. Munk, Rumpf und Schraube. T. B. II, S. 25.

E. Everling, Schraubenkraft und Meßnabe. T. B. II, S. 353.

§ 7. Enthält größtenteils Material der Flugzeugmeisterei. Über Motoren usw. Näheres in den betreffenden Bänden des Handbuchs.

K. Kutzbach, Die Anpassung der Flugmotoren an die Flughöhe. T. B. III, S. 112.

Gewichtszusammenstellung:

E. Everling, Die Vergrößerung der Flugzeuge. T. B. II, S. 299 und 565; T. B. III, S. 38.

In Abb. 16 ist außer den oben zitierten Arbeiten von König, Heidelberg und Hölzel, Munk und Moltahn verwendet:

W. Molthan, Messungen an einem Modell der Dfw C V, T. B. III, S. 253.

§ 8. Übersicht über Flügelprofile: M. Munk und E. Hückel, Der Profilwiderstand von Tragflügeln. T. B. II, S. 451.

§ 9. H. von Sanden, Die Bedeutung von $\frac{C_a^3}{C_w^2}$, T. B. III, S. 330.

Andere Darstellungsarten:

Eiffel, Logarithmische Polardiagramme. 1914.

E. Everling, Kurvendarstellung des Fluges. Z. F. M. 8 (1917), S. 33.

II. Kap. § 1. Abb. 3 liegt zugrunde: A. Betz, Angriffspunkte der Windkräfte bei Doppeldeckern. Z. F. M. 5 (1914), S. 162.

J. Hunsaker, Stabilitätsuntersuchungen an Doppeldeckern. Engineering 7. und 14. I. 1916. Deutsch Flugsport 9 (1917), S. 37.

Abb. 4 nach G. Eiffel, Neue Untersuchungen über den Luftwiderstand und den Flug (Tabellen und Tafeln).

R. Fuchs und L. Hopf, Momentenausgleich und statische Längsstabilität. T. B. I, S. 15.

— — Die statische Stabilität des Doppeldeckers. T. B. II, S. 33.

Ältere Arbeiten über den Begriff der statischen Längsstabilität:

H. Reissner, Betrachtungen über die Lage der Druckresultierenden, Flugsport 2 (1910), S. 158.

R. Knoller, Über die Längsstabilität der Drachenflugzeuge. Z. F. M. 2 (1911), S. 177, 188 und 205.

— Zur Festlegung einiger aeromechanischer Begriffe. Jahrbuch der W. G. L. 1914/15, S. 105.

M. Brillouin, Stabilité des aéroplanes; surface métacentrique. Revue de Mécanique, Paris 1909.

C. Wieselsberger, Über die statische Längsstabilität der Drachenflugzeuge. Münchner Dissertation. Berlin 1913.

§ 2—4. R. Fuchs, H. Hamburger und L. Hopf, Zur Berechnung der Längsmomente von Flugzeugen. T. B. II, S. 463.

Abwindmessungen:

O. Föppl, Auftrieb und Widerstand eines Höhensteuers, das hinter einer Tragfläche angeordnet ist. Z. F. M. 2 (1911), S. 182.

M. Munk und G. Cario, Luftstromneigung hinter Flügeln. T. B. III, S. 10.
Englische Messungen bei L. Bairstow, Applied Aérodynamics in guter Übereinstimmung mit den deutschen und mit unserer Faustformel.

§ 5. H. Hamburger, Der Momentensausgleich in der Praxis. T. B. III, S. 292.
V. Heidelberg, Rudermomentmessungen an einem fliegenden Flugzeug. Z. F. M. 10 (1919), S. 236 und 249.

III. Kap. § 1. P. Painlevé, Etude sur le régime normal d'un aéroplane. La technique aéronautique 1 (1910), S. 3.

§ 3 u. 4. G. H. Bryan, Die Stabilität der Flugzeuge. Übersetzt von H. G. Bader. J. Springer, Berlin 1914.
G. de Bothézat, Etude de la stabilité de l'aéroplane. Dunod et Pinat, Paris 1911.
C. Runge, Über die Längsschwingungen von Flugmaschinen. Z. F. M. 2 (1911), S. 193 und 201.
W. Deimler, Stabilitätsuntersuchungen über symmetrische Gleitflieger. Dissertation. Göttingen. Z. F. M. 1 (1910), S. 49, 64, 91 und 106.
Th. v. Kármán und E. Trefftz, Über Längsstabilität und Längsschwingungen von Flugzeugen. Jahrbuch der W. G. L. III (1914/15), S. 116.
V. Quittner, Untersuchungen über die Stabilität der Flugzeuge. Jahrbuch der W. G. L. III (1914/15), S. 144.
H. G. Bader, Das Höhensteuer der Flugzeuge. Z. F. M. 8 (1917), S. 116 u. 125.

Stabilitätsgleichung in sehr allgemeiner Form, sowie experimentelle Diskussion derselben:
L. Bairstow u. a., Investigations into the stability of an aeroplane und die folgenden Abhandlungen. Techn. Reports of the Adv. Comm. f. Aeronautics 1912/13, S. 135.

Bericht über diese Versuche:
A. Betz, Ein experimenteller Beitrag zum vollständigen Problem der Flugzeugstabilität. Z. F. M. 7 (1916), S. 145.

Weitere Versuche:
J. Hunsaker u. a., Dynamical Stability of aeroplanes. Washington (Smithsonian Institution) 1916.

§ 5. F. W. Lanchester, Aerodynamik, 2. Bd. Deutsche Ausgabe von S. 28 an.
§ 6—9. R. Fuchs und L. Hopf, Die allgemeine Längsbewegung des Flugzeugs. T. B. III, S. 317.
§ 9 u. 11. Die Beispiele sind einer unveröffentlichten Arbeit von R. Fuchs und W. Zabel entnommen.
§ 10. L. Hopf, Der überzogene Flug. Z. F. M., 1. Beiheft (1920), S. 72.

IV. Kap. § 1. Der Abb. 2 liegen unveröffentlichte Messungen zugrunde, die in Göttingen für die Flugzeugmeisterei ausgeführt wurden.
§ 3. H. Kann, Der wagrechte Kurvenflug des Flugzeugs. T. B. III, S. 260.
E. Salkowski, Der Kurvenflug eines Flugzeugs. T. B. III, S. 267.
§ 4. L. Hopf, Flug- und Trudelkurven. Z. F. M. 12 (1921), S. 273.
§ 5—7. Siehe auch die im III. Kap. zitierten Veröffentlichungen von Bryan, Bader, Deimler, de Bothézat.
H. Reissner, Über eine neue notwendige Bedingung für die automatische Seitenstabilität der Drachenflieger. Flugsport 2 (1910), S. 633 und 669.
— Die Seitensteuerung der Flugmaschinen. Z. F. M. 1 (1910), S. 101 und 117.
— Einige Bemerkungen zur Seitenstabilität der Drachenflieger. Verh. der Vers. von Vertretern der Flugwissenschaft zu Göttingen (1911). R. Oldenbourg, München und Berlin 1912.
K. Gehlen, Querstabilität und Seitensteuerung von Flugmaschinen. Aachener Dissertation (Oldenbourg 1913) und Z. F. M. 4 (1913), S. 173, 186, 201 und 213.
Experimentelles in den zum III. Kap. zitierten Veröffentlichungen von Bairstow und Hunsaker.

Namen- und Sachregister.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Berichtigungen.

Abb. 52 S. 79: An der Hinterkante muß das Profil die Kreissichel berühren.
Abb. 66 S. 100: Der Pfeil von dv muß senkrecht nach unten gehen.
Abb. 262 S. 398: Die hinter den dc_a in Klammern stehenden Bezeichnungen „Spad“ und „Fok“ sind vertauscht.

(Fortsetzung nächste Seite)

(Fortsetzung nächste Seite)